SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

CLAUDE DELLACHERIE

Quelques commentaires sur les prolongements de capacités

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 5 (1971), p. 77-81
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1971__5__77_0>

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (http://portail.mathdoc.fr/SemProba/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

INSTITUT DE RECHERCHE MATHEMATIQUE AVANCEE
STRASBOURG

SEMINAIRE DE PROBABILITES 1969/70

QUELQUES COMMENTAIRES SUR LES PROLONGEMENTS DE CAPACITES

par C. DELLACHERIE

Soient K un espace métrisable compact, $\underline{\underline{K}}$ l'ensemble des parties compactes de K et soit I une capacité positive sur K, i.e. une application définie sur les parties de K et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant les conditions suivantes :

a) $I(\emptyset) = 0$

b) I est monotone croissante : $A \subset B \Rightarrow I(A) \leq I(B)$

c) I "monte" : si (A_n) est une suite croissante, $I(\cup A_n) = \sup I(A_n)$

d) I "descend sur les compacts " : si (K_n) est une suite décroissante de compacts , $I(\cap K_n) = \inf I(K_n)$

Rappelons que I est dite fortement sous-additive si $I(A \cup B) + I(A \cap B) \leq I(A) + I(B)$ pour tout couple (A,B) de parties de K. Suivant CHOQUET [1], on peut prolonger I à l'ensemble Φ des fonctions positives (finies ou non) sur E, en posant pour tout $f \in \Phi$

$$\hat{I}(f) = \int_0^\infty I[\{f>t\}] \; dt$$

(analogue à une formule bien connue en théorie de la mesure). Bien-entendu, $\hat{I}(f) = I(A)$ si f est la fonction caractéristique d'un ensemble A, et d'autre part $\hat{I}$ vérifie des propriétés de monotonie et de continuité séquentielle analogues à celles de I : $\hat{I}$ est monotone, croissante, monte sur les suites croissantes de fonctions, et descend sur les suites décroissantes de fonctions s.c.s. (semi-continues supérieurement). De plus, $\hat{I}$ est positivement homogène :

pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+$ et tout $f \in \phi$, $\hat{I}(\lambda f) = \lambda \hat{I}(f)$.

En ce qui concerne les propriétés d'additivité de $\hat{I}$, CHOQUET a établi le beau théorème suivant (cf [1]-54.2) : la fonctionnelle $\hat{I}$ est sous-additive sur ϕ (i.e. $\hat{I}(f+g) \leq \hat{I}(f) + \hat{I}(g)$) si et seulement si la capacité I est fortement sous-additive. Supposons I fortement sous-additive et désignons par M l'ensemble des mesures de RADON positives sur K défini par

$$\mu \in M \iff \mu(f) \leq \hat{I}(f) \quad \text{pour tout } f \in \underline{\underline{C}}^+(K)$$

où $\underline{\underline{C}}^+(K)$ désigne l'ensemble des fonctions continues et positives sur K.
On vérifie sans peine que M est un convexe compact pour la topologie vague, et une application simple du théorème de HAHN-BANACH (cf STRASSEN [5]) montre que l'on a alors, pour tout $f \in \underline{\underline{C}}^+(K)$,

$$\hat{I}(f) = \sup \mu(f) \quad \text{pour } \mu \text{ parcourant } M$$

et cette égalité est encore vérifiée pour toute fonction borélienne positive f[1], en vertu du théorème de capacitabilité dont on peut donner une version pour les fonctions (cf CHOQUET [2]). Autrement dit, toute capacité fortement sous-additive est égale à l'enveloppe supérieure des mesures qu'elle majore.
La situation peut être très différente si on suppose seulement que la capacité I est sous-additive (i.e. $I(A \cup B) \leq I(A) + I(B)$) : il résulte en particulier d'un contre-exemple de DAVIES et ROGERS [3] à un fameux problème sur les mesures de HAUSDORFF qu'il existe un espace métrisable compact K et une capacité sous-additive (positive) I sur K tels que $I(K) \neq 0$ et que toute mesure de RADON sur K soit portée par un borélien de I-capacité nulle. Notons d'autre part que, si M est un convexe compact de mesures de RADON positives pour la topologie vague, la fonction d'ensemble définie par

$$I(A) = \sup \mu^*(A) \quad \text{pour } \mu \text{ parcourant } M$$

(où μ^* est la mesure extérieure associée à μ et A est une partie de K)

---

[1]) plus généralement, l'égalité est vérifiée si f est analytique, i.e. $\{f > t\}$ est analytique pour tout réel t.

est une capacité sur K : les propriétés a), b) et c) sont trivialement vérifiées. La propriété d) résulte du fait que la fonction $\mu \longrightarrow \mu(A)$ est s.c.s. pour la topologie vague lorsque A est compact, et du théorème du minimax (cf MEYER [4]-X-6). Cette capacité I, qui est sous-additive, n'est pas fortement sous-additive en général (les contre-exemples foisonnent !). Bien-entendu, la fonctionnelle J définie sur ϕ par

$$J(f) = \sup \mu^*(f) \quad \text{pour } \mu \text{ parcourant } M$$

est sous-additive et vérifie des propriétés de continuité séquentielle analogues à c) et d), mais on a $J(f) = \hat{I}(f)$ pour tout $f \in \underline{C}^+(K)$ si et seulement si I est fortement sous-additive. Nous ne connaissons pas de condition simple sur M pour qu'il en soit ainsi.

Nous terminerons par une remarque sur les problèmes d'additivité vus sous un angle différent : nous allons donner une condition suffisante portant sur le couple (f,g) d'éléments de ϕ pour que l'on ait

$$\hat{I}(f+g) = \hat{I}(f) + \hat{I}(g)$$

quelle que soit la capacité initiale de départ. En fait nous n'aurons pas besoin pour cela du cadre topologique, ni des propriétés de descente de I.
On se donne donc un ensemble E et une fonction I définie sur les parties de E et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant les conditions

a) $I(\emptyset) = 0$

b) I est monotone croissante

c) I monte : si (A_n) est une suite croissante, $I(\cup A_n) = \sup I(A_n)$

Comme ci-dessus, on prolonge I à l'ensemble ϕ des fonctions positives (finies ou non) définies sur E en posant, pour tout $f \in \phi$,

$$\hat{I}(f) = \int_0^\infty I[\{f > t\}]\, dt$$

$\hat{I}$ est une fonctionnelle positivement homogène, monotone, croissante; elle monte sur les suites croissantes de fonctions, et coincide avec I sur les fonctions caractéristiques.

Avec une pensée émue pour nos jeunes années, nous dirons que deux éléments f et g de ϕ ont <u>même tableau de variation</u> (en abrégé : même t. de v.) si on a, pour tout $(x,y) \in E \times E$,

$$[f(y)-f(x)][g(y)-g(x)] \geq 0$$

(où, pour une fois, la convention $(+\infty)-(+\infty) = 0$ est conséquente).

Cette relation est reflexive, symétrique, mais n'est pas transitive dès que card $E \geq 2$: en effet, tout élément de ϕ a même t. de v. qu'une fonction constante. Nous allons montrer que $\hat{I}(f+g) = \hat{I}(f)+\hat{I}(g)$ dès que f et g ont même t. de v. Mais nous allons d'abord établir quelques propriétés de cette relation. Nous laissons au lecteur le soin d'établir la proposition suivante, dont la démonstration est triviale, mais compliquée à écrire

PROPOSITION.- <u>Soit Ψ un sous-ensemble de ϕ formé par des fonctions ayant deux à deux le même t. de v. Il en est alors de même pour le plus petit sous-ensemble $\overline{\Psi}$ de ϕ contenant Ψ, les fonctions constantes (positives) et stable pour</u>

a) <u>les opérations algébriques (polynômes sur Ψ à plusieurs variables et à coefficients positifs)</u>

b) <u>les opérations latticielles (enveloppes supérieures et inférieures de familles finies)</u>

c) <u>les limites simples de suites</u>

En particulier, si Ψ est réduit à un élément $\{f\}$, l'ensemble $\overline{\Psi}$ contient les fonctions de la forme $p_t(f) = 1_{\{f>t\}}$, où $t \in \mathbb{R}_+$, puisque $p_t(f) = \lim_n (\frac{f}{t})^n \wedge 1$.

Et on retrouve alors f comme somme continue des $p_t(f)$

$$f(x) = \int_0^\infty p_t(f)(x)\, dt$$

On remarque l'analogie avec la définition du prolongement $\hat{I}$ de I. D'autre part, en approchant l'intégrale par des sommes de RIEMANN, on obtient la proposition suivante

PROPOSITION.- <u>Soient f_∞ et g_∞ deux éléments de ϕ ayant même t.de v. Il existe deux suites croissantes (f_n) et (g_n) de combinaisons linéaires à coefficients positifs de fonctions caractéristiques telles que</u>

a) f_p <u>et</u> g_q <u>aient même t. de v. pour</u> $p,q = 1,\dots,n,\dots,\infty$.

b) $f_\infty = \lim f_n$ <u>et</u> $g_\infty = \lim g_n$.

Terminons enfin par la remarque annoncée

PROPOSITION.- <u>Soient f et g deux éléments de ϕ ayant même t. de v. Alors</u>

$$\hat{I}(f+g) = \hat{I}(f) + \hat{I}(g)$$

DEMONSTRATION.- D'après les propriétés de continuité séquentielle de $\hat{I}$ et la proposition précédente, on peut supposer que f et g sont des fonctions étagées. Comme f et g ont même t.de v., il existe alors un entier n et n parties disjointes $A_1,\dots A_n$ de E tels que f et g admettent des représentations de la forme

$$f = \lambda_1 1_{A_1} + \lambda_2 1_{A_2} + \dots + \lambda_n 1_{A_n} \qquad 0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$$

$$g = \mu_1 1_{A_1} + \mu_2 1_{A_2} + \dots + \mu_n 1_{A_n} \qquad 0 \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_n$$

et donc

$$\hat{I}(f) = \lambda_1 I(A_1) + \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_{i+1} - \lambda_i) I(A_i) \qquad \hat{I}(g) = \mu_1 I(A_1) + \sum_{i=1}^{n-1} (\mu_{i+1} - \mu_i) I(A_i)$$

tandis que

$$\hat{I}(f+g) = (\lambda_1+\mu_1) I(A_1) + \sum_{i=1}^{n-1} [(\lambda_{i+1}+\mu_{i+1}) - (\lambda_i + \mu_i)] I(A_i)$$

On a donc bien $\hat{I}(f+g) = \hat{I}(f) + \hat{I}(g)$.

Cette commutativité de $\hat{I}$ avec la somme s'étend évidemment aux sommes finies de fonctions ayant même t. de v., et on remarquera que la définition du prolongement $\hat{I}$ exprime encore la commutativité de $\hat{I}$ avec des sommes continues.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CHOQUET G. : Theory of capacities (Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t5, 1955, p131-295)

[2] : Forme abstraite du théorème de capacitabilité (Ibid., t9, 1959, p83-89)

[3] DAVIES R.O. et ROGERS C.A. : The problem of subsets of finite positive measure (Bull. London math. soc. t1, 1969, p47-54)

[4] MEYER P.A. : Probabilités et potentiel (Paris, Hermann, 1966)

[5] STRASSEN V. : Messfehler und Information (Z. für Wahrscheinlich..., t2, 1964, 273-305)