Jacques Azéma
Paul-André Meyer

Une nouvelle représentation du type de Skorohod

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 8 (1974), p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1974__8__1_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1973/74

UNE NOUVELLE REPRESENTATION DU TYPE DE SKOROKHOD

par J.AZEMA et P.A.MEYER

Nous considérons un semi-groupe de Markov droit transient sur un espace d'états E, et deux mesures positives[1] bornées λ et μ. Nous cherchons des représentations de la forme

(1) $$\mu = \lambda P_T$$

où T est un temps d'arrêt d'une réalisation $(\Omega, \underline{\underline{F}}, \underline{\underline{F}}_t, X_t \ldots)$ du semi-groupe donné, éventuellement plus riche que la réalisation continue à droite canonique. En particulier, toute représentation de la forme

(2) $$\mu(f) = E^{\lambda}[\ -\int_{[0,\infty[} f \circ X_s dM_s\ ]$$

où (M_t) est un processus décroissant à valeurs dans $[0,1]$, continu à droite, adapté à la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$, peut s'interpréter comme une représentation du type (1) sur un espace d'états élargi $\Omega \times \mathbb{R}$.

Une condition évidemment nécessaire pour l'existence d'une représentation du type (1) est que

(3) $\mu \dashv \lambda$: $\mu(f) \leq \lambda(f)$ pour toute fonction excessive f

ROST a montré, dans un travail très remarquable [3] que cette condition entraîne - au moins dans le cas transient - l'existence d'une représentation du type (2) sur la réalisation canonique, donc du type (1) sur une réalisation élargie. Une conséquence : (3) entraîne la condition plus forte

(3') $\mu(f) \leq \lambda(f)$ pour toute f fortement surmédiane

[Cette dernière condition étant d'ailleurs strictement plus forte que (3) si le semi-groupe n'est pas transient]. ROST a posé le problème suivant : peut on choisir pour T, dans la formule (1) un temps terminal, ou pour M, dans la formule (2), une fonctionnelle multiplicative ? Existe t'il alors une représentation unique ? Ou du moins une représentation canonique[2] ?

Cet exposé contient des réponses partielles aux questions de ROST. Nous ne savons pas encore beaucoup de choses sur ce genre de représentations, mais nous préférons publier tout de suite le peu que nous savons dans ce volume, car celui-ci contient tous les outils qui nous sont nécessaires : la représentation de mesures au moyen de fonctionnel-

1. Ne chargeant pas ∂.
2. canonique : "qui correspond à une règle" (Petit Robert).

les additives gauches ou droites (cf " les travaux d'Azéma sur le retournement du temps") ; le passage de l'additif au multiplicatif en théorie des martingales (cf " une représentation de surmartingales"). Nous espérons revenir sur ces représentations dans un travail ultérieur (s'il s'avère qu'elles possèdent des propriétés intéressantes).

REPRESENTATION GAUCHE

Supposons donc $\mu \dashv \lambda$. Soit A un ensemble λ-négligeable et λ-polaire[1]. Si D_A est le début de A, $H_A 1$ la réduite (non régularisée) $P^{\bullet}\{D_A<\infty\}$, nous avons $<\lambda, H_A 1>=0$. Comme λ ne charge pas A, nous savons d'après le théorème du balayage de HUNT qu'il existe une suite décroissante (f_n) de fonctions excessives (que l'on peut supposer $\leqq 1$) décroissant vers $H_A 1$ λ-p.p. - <u>en vertu de la transience du semi-groupe</u>. Donc $<\lambda, f_n> \to 0$. Comme $\mu \dashv \lambda$, nous avons le même résultat pour $<\mu, f_n>$, et comme les f_n majorent $H_A 1 \geqq I_A$, nous voyons que A est μ-négligeable. Ainsi

μ <u>ne charge pas les ensembles</u> λ-<u>négligeables et</u> λ-<u>polaires</u> .

Nous savons alors, d'après l'exposé sur le retournement du temps, qu'<u>il existe une fonctionnelle additive gauche</u> (A_t) <u>unique, telle que</u>

(4) $$\mu(f) = E^{\lambda}\Big[\int_{[0,\infty[} f\circ X_s \, dA_s\Big] \text{ pour toute } f\geqq 0 \text{ sur } E .$$

Considérons le processus continu à droite $(A_{t+})_{t\geqq 0}$, et formons sa P^{λ} <u>projection coprévisible</u> : c'est un processus à la fois optionnel et coprévisible, donc de la forme $(u\circ X_t)_{t\geqq 0}$ - où u peut être choisie borélienne si le semi-groupe est borélien, et dans le cas général, mesurable pour la tribu des excessives. Ce processus est projection coprévisible d'un processus c.à d. avec l.à g., il est donc indistinguable (pour P^{λ}) d'un processus c.à.d.avec l.à g. La fonction u, définie λ-q.p., est donc finement continue λ-q.p..

LEMME 1. <u>On a</u> $u\leqq 1$ λ-<u>q.p.</u>

DEMONSTRATION. Soit L un temps a.$\hat{p}$. précisé fini, et soit Z le processus coprévisible $I_{[0,L]}$. La projection optionnelle de Z est le processus $(c\circ X_t)_{t\geqq 0}$, où c est la fonction fortement surmédiane régulière $P^{\bullet}\{L\geqq 0\}$. Nous avons alors

$$E^{\lambda}[u\circ X_L I_{\{L\geqq 0\}}] = E^{\lambda}[A_{L+} I_{\{L\geqq 0\}}] = E^{\lambda}\Big[\int_{[0,\infty[} Z_s \, dA_s\Big] = E^{\lambda}\Big[\int_{[0,\infty[} c\circ X_s \, dA_s\Big]$$

1. Dans cet exposé, l'expression λ-quasi-partout (λ-q.p.) se rapportera à de tels ensembles λ-négligeables et λ-polaires.

$= < \mu, c > \leqq < \lambda, c > = P^\lambda\{L \geqq 0\}$

Admettons pour un instant, dans cette chaîne d'inégalités, le pas $<\mu, c > \leqq < \lambda, c >$ qui demande justification , c n'étant pas excessive. Alors le lemme est établi : en effet l'ensemble coprévisible $\{u \circ X_{\dot{}}(.)>1\}$ n'a pas de sections par des a.p̂.p., il est donc P^λ-évanescent.

La justification de l'inégalité manquante se trouve dans l'équivalence entre (3) et (3'), établie par ROST et d'autres auteurs. Mais il est aussi intéressant de rendre notre exposé entièrement indépendant du travail de ROST, en modifiant légèrement la démonstration de la manière suivante. Le semi-groupe étant transient, nous pouvons nous borner à établir la propriété précédente <u>lorsque</u> L <u>est majoré strictement par un temps de retour fini</u> M . Retournons le temps à M. Le temps d'arrêt T qui vaut M-L sur $\{L \geqq 0\}$, $+\infty$ sur $\{L=0_-\}$ est alors prévisible, il peut être approché P^λ-p.s. par des t.d'a. strictement plus petits T_n . Retournant le temps à M, nous trouvons des temps a.ô. L_n tels que L_n décroîsse, $L_n \downarrow L$ P^λ-p.s. et $L_n > L$ P^λ-p.s. sur $\{L \geqq 0\}$, tandis que sur $\{L=0_-\}$ on a $L_n=0$ pour n assez grand. Alors la fonction c est égale λ-p.p. à la limite des fonctions excessives $c_n=P^{\bullet}\{L_n>0\}$, et l'inégalité cherchée en résulte.

Nous allons en déduire quelques conséquences. Le processus $(A_{0+} \circ \Theta_t)$ est optionnel (A_{0+} étant mesurable par rapport à la tribu $\underline{\underline{F}}^{oo}_{0+}$, où $\underline{\underline{F}}^{oo}_{t}$ est engendrée par les v.a. $f \circ X_s$, $s \leqq t$, f 1-excessive). Soit h la fonction $E^{\bullet}[A_{0+}]$; h est mesurable pour la tribu $\underline{\underline{B}}_e$ engendrée par les fonctions 1-excessives, et le processus $(h \circ X_t)$ est donc optionnel. Pour tout temps d'arrêt T nous avons p.s. $h \circ \Theta_T = A_{0+} \circ \Theta_T$, donc les deux processus sont indistinguables. Comme nous avons identiquement $\Delta A_t = A_{0+} \circ \Theta_t$, nous voyons que A s'écrit

(5) $$A_t = A_t^c + \sum_{0 \leqq s < t} h \circ X_s \qquad (A^c \text{ continue })$$

de sorte que h est nulle hors d'un ensemble semi-polaire. Le processus (A_t) lui aussi est optionnel, de sorte que sa projection coprévisible est un processus de la forme $(v \circ X_t)$. Le processus (A_{t+}) valant $(A_t + h \circ X_t)$, nous obtenons en projetant

(6) $$u = h+v \qquad \lambda\text{-quasi-partout}$$

Il résulte alors du lemme 1 que $h \leqq u \leqq 1$ λ-q.p.. Nous supposerons que ces fonctions ont été modifiées de manière que les inégalités $h \leqq u \leqq 1$ aient lieu partout, et nous poserons v=u-h (partout). Dans ces conditions nous pouvons énoncer et établir notre première représentation.

THEOREME 1. Avec les notations précédentes, l'expression

(7) $$M_t = \exp\left(-\int_0^t \frac{dA^c_s}{1-v\circ X_s}\right) \prod_{0\leq s<t} \left(1 - \frac{h}{1-v}\circ X_s\right) \qquad [M_0=1]$$

est une fonctionnelle multiplicative gauche, et l'on a pour toute f positive

(8) $$\mu(f) = E^\lambda\left[-\int_{[0,\infty[} f\circ X_s dM_s \right]$$

DEMONSTRATION. Nous allons prouver que pour tout temps a.ô. L

(9) $$E[A_L I_{\{L>0\}}] = E[(1-M_L)I_{\{L>0\}}]$$

Cela suffira à montrer que les deux processus croissants gauches (A_t) et $(1-M_t)$ ont même projection duale coprévisible (car les intervalles stochastiques $[0,L[$ engendrent la tribu coprévisible) ; le processus $(f\circ X_t)$ étant coprévisible, (8) résulte alors de (4).

Nous procédons par retournement du temps à L. Nous introduisons le processus croissant continu à droite

$$\hat{B}_t = A_L - A_{L-t} \text{ si } 0\leq t<L \quad , \quad A_L \text{ si } t\geq L$$

adapté à la famille de tribus retournée à L, $(\hat{\underline{F}}_t)$. Si $(\hat{X}_t)$ est le processus continu à gauche

$$\hat{X}_t = X_{L-t} \text{ pour } 0<t\leq L \quad , \quad \partial \text{ si } t>L$$

adapté à la famille retournée, le saut de $\hat{B}_{\cdot}$ en t vaut $h\circ\hat{X}_t$ $(t>0)$, donc $(\hat{B}_t)$ est prévisible pour la famille retournée[1]. Recherchons le potentiel engendré : nous savons que pour tout temps d'arrêt prévisible T de la famille retournée, strictement positif

(10) $$E[(\hat{B}_\infty - \hat{B}_{T-})I_{\{T<\infty\}}] = E[(\hat{B}_\infty - \hat{B}_{T-})I_{\{T<L\}}] = E[A_{K+} I_{\{K>0_-\}}]$$
$$= E[u\circ X_K I_{\{K>0-\}}] = E[u\circ\hat{X}_T I_{\{T<\infty\}}]$$

où K est le temps a.p̂.p. valant L-T si $T\leq L$, 0_- si $T>L$. Nous en déduisons que si T est un temps d'arrêt quelconque de la famille retournée

$$\xi_T = E[B_\infty - B_T | \hat{\underline{F}}_T] = (u\circ\hat{X})_{T+}$$

Si T est un temps d'arrêt prévisible, un calcul tout analogue à (10) nous donne la projection prévisible $(\dot{\xi}_t)$ de (ξ_t) :

(11) $$\dot{\xi}_T = E[(\hat{B}_\infty - \hat{B}_T)|\hat{F}_{T-}] = v\circ\hat{X}_T$$

Les hypothèses de la proposition 1 de l'exposé sur les représentations de surmartingales sont satisfaites, et nous avons que

---

1. Au lieu de ce raisonnement direct, on peut invoquer la prop.11 de l'exposé sur le retournement.

$$E[\hat{B}_\infty] = E[1-\hat{D}_\infty] = E[1-\exp(-\int_0^\infty \frac{d\hat{B}^c_s}{1-\xi_s})]\prod_s(1 - \frac{\Delta\hat{B}_s}{1-\xi_s})$$

et cela signifie exactement que $E[A_L I_{\{L>0\}}] = E[(1-M_L)I_{\{L>0\}}]$.

REMARQUE. Si l'on compare avec l'exposé sur les représentations de surmartingales, on voit que la méthode de démonstration consiste à considérer d'abord la mesure $(1-\varepsilon)\mu$ correspondant à la f.a. gauche $(1-\varepsilon)A_t$, pour laquelle u est bornée par $1-\varepsilon$ ($\varepsilon>0$), et il n'y a aucune difficulté d'intégrabilité ou de convergence, puis à faire tendre ε vers 0. La limite d'une suite décroissante de fonctions décroissantes continues à <u>gauche</u> (s.c.s.) étant encore continue à gauche, il ne se pose aucun problème quant à la continuité à gauche de (M_t).

REPRESENTATION AU MOYEN D'UNE F.M.DROITE

Il est clair qu'une telle représentation n'est pas toujours possible. Par exemple, prenons le mouvement brownien dans $\mathbb{R}^3$, un point x, la mesure $\lambda=\varepsilon_x$, $\mu=\frac{1}{2}\varepsilon_x$. La fonctionnelle gauche (M_t) est donnée par $M_0(\omega)=1$, $M_t(\omega)=1$ pour tout t si $X_0(\omega)\neq x$, $M_t(\omega)=1/2$ pour tout $t>0$ si $X_0(\omega)=x$ [cette fonctionnelle est parfaite, mais il faut la modifier un peu si l'on veut que la relation multiplicative soit une identité : peu importe]. En revanche, le saut en 0 d'une fonctionnelle droite ne peut être que 1 ou 0 P^x-p.s., et cela ne peut nous donner μ .

Nous avons apparemment une voie toute tracée : au lieu de supposer que μ ne charge pas les ensembles λ-négligeables-et-λ-polaires, faisons l'hypothèse plus forte que μ ne charge pas les ensembles λ-polaires. Alors nous avons une représentation

(12) $$\mu(f) = E^\lambda[\int f\circ X_s dA'_s]$$

où la fonctionnelle droite A' a même partie continue que A, et des sauts de la forme

(13) $$\Delta A'_s = h'\circ X_s$$ (s>0, h' positive nulle hors d'un ensemble semi-polaire)

Dans ces conditions , nous essayons de construire une fonctionnelle multiplicative droite par une formule exponentielle convenable... Malheureusement, cela ne semble pas marcher, car nous aurions besoin de savoir que <u>la projection cooptionnelle du processus</u> (A'_t) <u>est majorée par</u> 1 , et nous ne savons pas l'établir. La méthode s'applique cependant dans un cas particulier intéressant, auquel nous allons nous ramener .

Nous commençons par mettre en 0 toute la masse possible : autrement dit, nous posons à la manière de ROST

(14) $\lambda^\bullet=(\lambda-\mu)^+$, $\mu^\bullet=(\mu-\lambda)^+$, $\varphi=\frac{\lambda\wedge\mu}{\lambda}\leqq 1$

et nous nous occupons de trouver une représentation de SKOROKHOD $\mu^\bullet=\lambda^\bullet P_S$ pour les mesures étrangères $\lambda^\bullet,\mu^\bullet$. Après quoi nous construirons le temps d'arrêt T en choisissant à l'instant 0

T=0 avec probabilité $\varphi(X_0)$

T=S avec probabilité $1-\varphi(X_0)$

Sur une représentation du type de la formule (2), si $M^\bullet$ représente $\mu^\bullet$ au moyen de $\lambda^\bullet$, μ sera représentée au moyen de λ par la mesure

$$dM_s=\varphi(X_0)\varepsilon_0(ds)+(1-\varphi(X_0))dM^\bullet_s$$

Nous sommes donc amenés à nous poser le problème de SKOROKHOD pour deux mesures <u>étrangères</u> . Mais alors, reprenons la représentation (8) : μ et λ étant étrangères, la mesure dM_s ne charge pas 0, et nous avons

THEOREME 1'. <u>Avec les notations du théorème 1, supposons μ étrangère à λ et posons</u>

(15) $$M^*_0=1\ ,\ M^*_t=\exp\left(-\int_0^t\frac{dA^c_s}{1-v\circ X_s}\right)\prod_{0<s\leqq t}\left(1-\frac{h}{1-v}\circ X_s\right)$$

<u>Ce processus est continu à droite, à l'exception peut être d'un seul point t où $M^*_t(\omega)>0$, $M^*_{t+}(\omega)=0$, et le processus $(M^*_{t+})=(M'_t)$ est une fonctionnelle multiplicative</u> (ordinaire, i.e. droite). <u>On a</u>

(16) $$\mu(f)=E^\lambda[-\int_{[0,\infty[}f\circ X_s dM'_s\ ]$$

<u>et λ-presque tout x est permanent pour M', de sorte que $[0,\infty[$ peut être remplacé par $]0,\infty[$ dans</u> (17).

DEMONSTRATION. Tout est très facile.

Nous savons que λ et μ sont étrangères. Donc dM (représentation (8)) n'a pas de masse en 0, et $M_{0+}=1$ P^λ-p.s. Soit ω tel que $M_{0+}(\omega)=1$, et soit $r>0$ le premier instant où $M_{r+}(\omega)=0$.

Comme $M_{0+}(\omega)=1$, nous avons d'abord $h\circ X_0(\omega)=0$, et nous pouvons enlever le terme correspondant de l'expression de M_t . Ensuite, sur l'intervalle $[0,r[$, l'intégrale et le produit infini définissant M_t sont convergents, et nous en déduisons aisément que $M_{t+}=M^*_t$. Pour $t>r$, nous avons $M^*_t\leqq M_{r+}=0$. Il y a donc un seul point où $M^*_t(\omega)$ peut différer de $M_{t+}(\omega)$, c'est au point r lui même, si $M^*_r(\omega)>0$ (intégrale et produit convergents sur $[0,r]$) tandis que $M_{r+}(\omega)=0$ (divergence sur $[0,r+\varepsilon]$ pour tout $\varepsilon>0$. On a de toute façon $M^*_{t+}=M_{t+}=M'_t$, d'où la formule (16).

La vérification de la propriété multiplicative de (M'_t) est triviale aux points $t\neq r$, où $M'_t=M^*_t$. Nous laisserons au lecteur la vérification pour $t=r$, qui est facile.

REMARQUE. Nous nous étions demandé si l'opération (14) conduisait à quelque chose d'"optimal" . ROST nous a indiqué qu'il n'existe, dans le cas transient, aucun temps d'arrêt T tel que $\mu=\lambda P_T$, qui soit " meilleur" que les autres. En effet, pour toute fonction positive f, l'espérance $E^\lambda[\int_0^T f\circ X_s\, ds\,]$ est indépendante du temps d'arrêt T représentant μ, puisqu'elle vaut $<\lambda U-\mu U,f>$. Si l'on diminue T d'un côté (par exemple en rendant $\{T=0\}$ aussi grand que possible) on l'augmente de l'autre.

Par ailleurs, ROST nous a indiqué la forme de la représentation (7) dans le cas discret, qui était connue de lui avant notre travail.

CONSIDERATIONS SUR L'UNICITE

Nous continuons à employer les notations $(A_t),(M_t)$, u,v,h , et nous considérons une seconde fonctionnelle multiplicative gauche (N_t) telle que

$$\mu(f) = E^\lambda[\int_{[0,\infty[} -f\circ X_s dN_s\,] \tag{17}$$

Nous nous demandons si M et N sont P^λ-indistinguables. Nous choisirons une version de N adaptée - sans complétion - aux tribus $\underline{\underline{T}}(X_s,s\leqq t)$, E étant muni de la tribu presque-borélienne. La possibilité d'un tel choix tient au fait que les fonctions fortement surmédianes sont presque boréliennes, mais nous n'insisterons pas sur ce point. Il est évident en tout cas qu'il existe une telle version de A, donc de M .

Nous n'avons pas envie de décomposer la démonstration en lemmes pourvus d'énoncés formels. Nous la décomposerons en étapes successives, ce qui aura l'avantage de nous permettre des considérations heuristiques.

A) Nous commençons par remarque que, μ ne chargeant pas ∂, les fonctionnelles M,N ne chargent pas $[\zeta,\infty[$. Soient L un temps a.$\hat{p}$. précisé fini, et Z le processus coprévisible $I_{[0,L]}$, dont la projection optionnelle est de la forme $(c\circ X_t)$. Le processus (N_t) étant adapté, la mesure dN commute avec la projection optionnelle . Donc

$$E^\lambda[(1-N_{L+})I_{\{L\geqq 0\}}]= E^\lambda[\int_{[0,\infty[}-Z_s dN_s] = E^\lambda[\int_{[0,\infty[}-c\circ X_s dN_s\,] = \mu(c).$$

En comparant à la démonstration du lemme 1, on voit que le processus $(1-N_{t+})$ a pour projection coprévisible $(u\circ X_t)$, et de même que le processus $(1-N_t)$ a pour projection coprévisible $(v\circ X_t)$.

B) Montrons alors avec quelle facilité on établit l'unicité d'une fonctionnelle multiplicative qui ne s'annule pas sur $[0,\zeta[$. L'ensemble $[0,\zeta[$ étant coprévisible, la projection coprévisible $(1-v\circ X_t)$ ne s'annule pas non plus sur cet intervalle, et il en résulte que le processus $N_t/1-v\circ X_t$ a une projection coprévisible égale à 1 sur cet intervalle. Considérons alors la fonctionnelle additive gauche

$$(18) \qquad B_t = \int_{[0,t[} -(1-v\circ X_t)\,\frac{dN_t}{N_t} \quad \text{pour } t<\zeta\ , \quad B_t=B_{\zeta-} \text{ pour } t\geqq\zeta$$

Nous avons pour tout processus coprévisible (Z_t)

$$E^\lambda[\int_{[0,\infty[} -Z_s dN_s\ ] = E^\lambda[\int_{[0,\zeta[} -Z_s dN_s\ ] = E^\lambda[\int_{[0,\zeta[} \frac{Z_s N_{s-}}{1-v\circ X_s}\, dB_s\ ]$$

Comme dB commute à la projection coprévisible, nous remplaçons le processus sous la dernière intégrale par sa projection coprévisible $ZI_{[0,\zeta[}$, et la chaîne d'égalités continue

$$= E^\lambda[\int_{[0,\zeta[} Z_s dB_s\ ] = E^\lambda[\int_{[0,\infty[} Z_s dA_s\ ]$$

Donc la fonctionnelle additive gauche B représente μ (prendre $Z_s = f\circ X_s$), et elle est donc indistinguable de A. Mais alors, les relations

$$N_0=1 \quad , \quad \frac{dN_t}{N_t} = \frac{dA_t}{1-v\circ X_t}$$

entraînent que N est donnée par (7), donc indistinguable de M.

C) Il est facile de généraliser un peu cette démonstration. Supposons que tout point soit permanent pour N ($P^x\{N_{0+}>0\}=1$ pour tout x) et que $1-v\circ X_t$ ne s'annule pas sur $[0,\zeta[$. Soit τ le temps terminal inf $\{t : N_t=0\}$; la formule (18) ne nous définit qu'une fonctionnelle additive gauche jusqu'au temps terminal τ , mais d'après un théorème récent de GETOOR-SHARPE [2], il est possible de construire une mesure aléatoire commutant avec les projections optionnelle et coprévisible (mais non nécessairement bornée) coincidant sur $[0,\tau[$ avec dB. On fait alors le calcul avec cette mesure aléatoire là. Comme $1-v\circ X_t$ ne s'annule pas, la projection coprévisible de $N_s/1-v\circ X_s$ reste bien égale à 1, et le raisonnement peut se poursuivre jusqu'au bout.

Encore une autre généralisation : il suffit en fait de supposer que l'ensemble des points x tels que $P^x\{N_{0+}=0\}=1$, ou que $v(x)=1$, est

λ-négligeable et λ-polaire. Pour voir cela, tuer les processus à la rencontre de cet ensemble, et appliquer le raisonnement précédent.

D) Considérons le temps terminal

$$\sigma = \inf \{ t : u\circ X_t = 1 \}$$

et l'ensemble (finement ouvert) $U = \{u<1\}$. Nous allons montrer d'abord que $N_{0+}\circ\theta_t$ ne s'annule pas sur $[0,\sigma[$, et en particulier que tout $x\in U$ est permanent pour N .

Projetons en effet sur la tribu coprévisible l'identité

$$N_t - N_{t+} = N_t(1-N_{0+}\circ\theta_t)$$

Il vient $\quad u\circ X_t - v\circ X_t = (1-v\circ X_t)(1-N_{0+}\circ\theta_t)$

Sur $[0,\sigma[$, nous avons $u\circ X_t<1$, donc a fortiori $v\circ X_t<1$, donc $N_{0+}\circ\theta_t = 1-\frac{h}{1-v}\circ X_t = \frac{1-u}{1-v}\circ X_t \neq 0$.

E) Montrons ensuite que N_{t+} est identiquement nulle sur $[\sigma,\infty[$. Le processus N_{t+} (décroissant continu à droite) a une projection coprévisible nulle sur l'ensemble coprévisible fermé à droite $\{u\circ X_t=1\}$. Il s'agit de prouver qu'il est nul à partir du début σ de cet ensemble. Retournons le temps : il s'agit de voir qu'un processus croissant continu à gauche $C_t \leqq 1$, dont la projection prévisible est nulle sur un ensemble prévisible fermé à gauche A, est nul sur l'intervalle $]0,L]$, où L est la fin de A . Nous suivons un raisonnement de [1] : soit W_t le processus croissant, projection duale prévisible du processus croissant $I_{[L,\infty[}$; soit (C'_t) la projection prévisible de (C_t), qui est continue à gauche. Nous avons

$$E[\int C_t dW_t] = E[\int C'_t dW_t] = E[C'_L] = 0 \quad \text{puisque } C'=0 \text{ sur } A$$

C étant continu à gauche et W-négligeable est nul en tout point de croissance à gauche de W. Comme il est croissant, il est nul jusqu'à la fin de l'ensemble des points de croissance à gauche de W. D'après [1] cette fin est égale à L, et le résultat cherché est obtenu.

Cela nous permet d'affaiblir un peu l'hypothèse de C) : si l'on a seulement que tout point est permanent pour N, on peut en déduire que tout point est permanent pour le temps terminal σ, donc $1-u$ ne s'annule pas, et l'hypothèse quant à l'annulation de $1-v$ est inutile.

F) Plaçons nous sur U, notons λ' la mesure λI_U, μ' la mesure μI_U , (X'_t) le processus tué à σ . Nous avons, si f est nulle sur U^c

$$\mu'(f) = \mu(f) = E^{\lambda}[\int_{[0,\sigma]} -f\circ X_s \, dN_s] \quad \text{d'après E)}$$

Regardons ce qui se passe à l'instant σ , sachant que $N_{\sigma+}=0$: si $N_\sigma=0$, il n'y a pas de saut, et nous pouvons remplacer $[0,\sigma]$ par $[0,\sigma[$. Si $N_\sigma>0$, c'est que $N_{0+}\circ\theta_\sigma=0$, donc que $X_\sigma \in U^c$, et comme f est nulle sur U^c nous pouvons aussi remplacer $[0,\sigma]$ par $[0,\sigma[$.

D'autre part, nous pouvons remplacer λ par λ' : en effet, $\lambda-\lambda'$ est portée par U^c , donc par les points tels que $\sigma=0$ p.s., et l'intégrale correspondante est nulle. Ainsi

$$\mu'(f) = E^{\lambda'}[\int_{[0,\infty[} -f\circ X'_t \, dN'_t \,]$$

où $N'_t = N_t$ si $t<\sigma$, N_σ si $t\geq\sigma$ est une fonctionnelle multiplicative du processus (X'_t) sur U, telle que tous les points de U soient permanents pour N'. On construit de même M', et la partie C) entraîne que M' et N' sont indistinguables jusqu'à σ . Comme M et N sont égales à M' et N' avant σ , et nulles toutes deux après σ , l'unicité est établie dans le cas général.

BIBLIOGRAPHIE

J.AZEMA. Quelques applications de la théorie générale des processus I. Invent. Math. 18 (1972), p.293-336.

R.GETOOR et M.J. SHARPE . Balayage and multiplicative functionals. Z. für W-theorie, 1974.

H.ROST. The stopping distributions of a Markov process . Invent. Math. 14 (1971) p. 1-16.