

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

CLAUDE DELLACHERIE

Un ensemble progressivement mesurable...

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 8 (1974), p. 22-24

http://www.numdam.org/item?id=SPS_1974__8__22_0

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

UN ENSEMBLE PROGRESSIVEMENT MESURABLE ...

C. Dellacherie

Le titre exact de l'exposé devrait être : " Un exemple d'ensemble progressivement mesurable ne contenant pas de graphe de temps d'arrêt, ou , ce qui est équivalent, ayant une projection bien-mesurable nulle ".
Un premier exemple, dû à Meyer et maintenant classique, est le suivant : soit (B_t) un mouvement brownien linéaire issu de 0, et, pour tout réel a , désignons par H_a l'ensemble des extrémités gauches des intervalles contigus au fermé aléatoire $\{(t, \omega) : B_t(\omega) = a\}$; les ensembles H_a sont alors progressifs, non évanescents, et ne contiennent pas de graphes de temps d'arrêt. On sait maintenant, depuis les travaux de Gettoor-Sharpe, l'importance de ces ensembles progressifs non bien-mesurables, contenus dans l'ensemble des extrémités gauches des intervalles contigus à un fermé aléatoire bien-mesurable. Mais, tous ces ensembles ont leurs coupes dénombrables, et notre propos est de donner un exemple d'ensemble dont les coupes seront non-dénombrables : ce sera tout simplement l'ensemble $H = \bigcup_{a \in \mathbb{R}} H_a$, où H_a est défini ci-dessus.

On désigne par Ω l'ensemble des applications continues ω de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R} telles que $\liminf_{t \rightarrow +\infty} \omega(t) = -\infty$ et $\limsup_{t \rightarrow +\infty} \omega(t) = +\infty$, par (B_t) les applications coordonnées et par $\mathbb{F}, \mathbb{F}_t^0$ les tribus habituelles. On sait qu'il existe une loi P sur (Ω, \mathbb{F}^0) telle que (B_t) soit un mouvement brownien

issu de 0, et on désigne par \underline{F} la tribu complétée de \underline{F}^0 , par \underline{F}_t la tribu engendrée par \underline{F}_t^0 et les ensembles négligeables de \underline{F} . Pour tout réel a , l'ensemble $F_a = \{(t, \omega) : B_t(\omega) = a\}$ est un fermé aléatoire bien-mesurable; nous appellerons H_a l'ensemble des extrémités gauches des intervalles contigus à F_a , et nous poserons $H = \bigcup_{a \in \mathbb{R}} H_a$. Comme les trajectoires oscillent entre les deux infinis, toutes les coupes de H sont non-dénombrables.

PROPOSITION 1.- L'ensemble H est progressivement mesurable

DEMONSTRATION.- Les tribus \underline{F}_t contenant les ensembles négligeables de \underline{F} , il suffit de montrer que, pour t fixé, $H \cap ([0, t[\times \Omega)$ appartient à la tribu $\underline{B}([0, t[\times \underline{F}_t)$. Pour $u \in [0, t[$ et $r \in [0, t[\cap \mathbb{Q}$ (\mathbb{Q} désigne les rationnels), l'application $(u, r, \omega) \rightarrow B_u(\omega) - B_r(\omega)$ est $\underline{B}([0, t[\times \underline{B}(\mathbb{Q}) \times \underline{F}_t$ -mesurable. Posons, pour m, n, p entiers, et u et r comme ci-dessus,

$$A_{m,n,p} = \left\{ (u, r, \omega) : r \notin \left[u + \frac{1}{m}, u + \frac{1}{n} \right] \text{ ou } |B_u(\omega) - B_r(\omega)| \geq \frac{1}{p} \right\}$$

L'ensemble $A_{m,n,p}$ appartient à $\underline{B}([0, t[\times \underline{B}(\mathbb{Q}) \times \underline{F}_t)$, et on a l'équivalence logique $((u, \omega) \in H \text{ et } u < t) \Leftrightarrow (\exists n \forall m > n \exists p \forall r < t (u, r, \omega) \in A_{m,n,p})$

Les rationnels étant dénombrables, on en déduit aisément le résultat voulu.

PROPOSITION 2.- L'ensemble H ne contient pas de graphe de temps d'arrêt.

DEMONSTRATION.- Au lieu d'employer une technique markovienne, nous utiliserons un raisonnement adaptable à toute autre martingale continue que (B_t) .

Nous raisonnerons par l'absurde et supposons qu'il existe un t.d'a. S

non p.s. infini dont le graphe est contenu dans H . Soit T le t.d'a.

défini par $T(\omega) = \inf \{t > S(\omega) : B_t(\omega) = B_{S(\omega)}(\omega)\}$. On a $T > S$ sur $\{S < +\infty\}$.

Soient d'autre part S_1 et S_2 les t.d'a. définis par

$$S_1(\omega) = \inf \{t > S(\omega) : B_t(\omega) > B_{S(\omega)}(\omega)\}$$

$$S_2(\omega) = \inf \{t > S(\omega) : B_t(\omega) < B_{S(\omega)}(\omega)\}$$

Comme $T > S$ sur $\{S < +\infty\}$ et que les trajectoires sont continues, les graphes de S_1 et S_2 sont disjoints et leur réunion est égale au graphe de S ;

de plus, on a $B_t(\omega) > B_S(\omega)$ pour $S_1(\omega) < t < T(\omega)$ et $B_t(\omega) < B_S(\omega)$ pour $S_2(\omega) < t < T(\omega)$. Si S n'est pas p.s. infini, S_1 ou S_2 ne l'est pas non plus : nous supposerons pour fixer les idées que S_1 n'est pas p.s. infini. Choisissons alors un entier n suffisamment grand tel que $P\{S_1 < T \leq n\} > 0$, et désignons par U le t.d'a. égal à S_1 sur $\{S_1 < T \leq n\}$ et à $T \wedge n$ sur le complémentaire. La martingale arrêtée $(M_t) = (B_{T \wedge n \wedge t})$ est uniformément intégrable et l'on a, pour tout entier p , $M_{U+(1/p)} > M_U$ sur $\{S_1 + \frac{1}{p} < T \leq n\}$ et $M_{U+(1/p)} = M_U$ sur le complémentaire. Comme on a aussi $M_U = M_T$ et $E[M_U] = E[M_{U+(1/p)}]$, on obtient une contradiction pour p suffisamment grand.