Claude Dellacherie

Intégrales stochastiques par rapport aux processus de Wiener ou de Poisson

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 8 (1974), p. 25-26
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1974__8__25_0>

Université de Strasbourg
Institut de Recherche Mathématique Avancée
Séminaire de Probabilités Année 1972/73

INTEGRALES STOCHASTIQUES PAR RAPPORT AUX PROCESSUS DE WIENER OU DE POISSON

C. Dellacherie

On travaille sur un espace probabilisé complet $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ muni d'une famille $(\underline{\underline{F}}_t)$ vérifiant les conditions habituelles. Le but de cet exposé est de donner des démonstrations "simples" des deux théorèmes classiques suivants

THEOREME 1.- <u>Soit</u> (B_t) <u>un mouvement brownien</u> (<u>issu de</u> 0) <u>par rapport à</u> $(\underline{\underline{F}}_t)$ <u>et soit</u> $(\underline{\underline{B}}_t)$ <u>sa famille de tribus naturelle dûment complétée</u>. <u>Alors toute v.a.</u> Z <u>de</u> $L^2(\underline{\underline{B}}_\infty)$ <u>est de la forme</u>

$$Z = E[Z] + \int_0^\infty f_t(\omega)\, dB_t(\omega)$$

<u>où</u> (f_t) <u>est un processus prévisible par rapport à</u> $(\underline{\underline{B}}_t)$ <u>tel que</u> $E[\int_0^\infty f_t^2(\omega)\, dt] < +\infty$.

THEOREME 2.- <u>Soit</u> (N_t) <u>un processus de Poisson par rapport à</u> $(\underline{\underline{F}}_t)$ <u>et soit</u> $(\underline{\underline{N}}_t)$ <u>sa famille de tribus naturelle dûment complétée</u>. <u>Alors toute v.a.</u> Z <u>de</u> $L^2(\underline{\underline{N}}_\infty)$ <u>est de la forme</u>

$$Z = E[Z] + \int_0^\infty f_t(\omega)\, d(N_t - t)(\omega)$$

<u>où</u> (f_t) <u>est un processus prévisible par rapport à</u> $(\underline{\underline{N}}_t)$ <u>tel que</u> $E[\int_0^\infty f_t^2(\omega)\, dt] < +\infty$.

Les démonstrations ne vont pas faire intervenir le caractère markovien de ces processus; elles feront appel uniquement à la théorie générale des intégrales stochastiques par l'intermédiaire des deux résultats suivants

1) D'après la théorie de l'orthogonalité de Kunita-Watanabé, il suffit dans les deux cas de montrer qu'une martingale de carré intégrable par rapport à la famille de tribus naturelle, nulle en 0, et orthogonale à (B_t) dans le premier cas, à $(N_t - t)$ dans le second, est nulle. Comme de plus les martingales bornées sont denses dans l'espace des martingales de carré intégrable, on pourra supposer la martingale bornée.

2) D'après la formule de changement de variable, on sait qu'une martingale continue (B'_t), nulle à l'origine, telle que $(B'^2_t - t)$ soit une martingale, est

un mouvement brownien, et qu'une martingale compensée de sauts (M'_t), nulle à l'origine et de sauts égaux à 1, telle que $(M'^2_t - t)$ soit une martingale, est un processus de Poisson compensé, i.e. est de la forme $(N'_t - t)$ où (N'_t) est un processus de Poisson.

DEMONSTRATION DU THEOREME 1.- Soit (X_t) une martingale bornée par rapport à $(\underline{\underline{B}}_t)$, nulle à l'origine et orthogonale à (B_t). Soit M une constante > 0 telle que $|X_t| < 2M$ pour tout t et posons $Q = (1 + \frac{X}{M}\infty).P$. La mesure Q est une loi de probabilité sur Ω, équivalente à P. D'autre part, (X_t) est orthogonale à toute intégrale stochastique par rapport à (B_t) et $(\underline{\underline{B}}_t)$,et en particulier à $(B_t^2 - t)$: les processus $(X_t.B_t)$ et $(X_t.(B_t^2 - t))$ sont des martingales par rapport à $(\underline{\underline{B}}_t)$. On en déduit que (B_t) et $(B_t^2 - t)$ sont encore des martingales par rapport à $(\underline{\underline{B}}_t)$ <u>lorsque</u> $(\Omega, \underline{\underline{F}})$ <u>est muni de la loi</u> Q. Le processus (B_t) est donc encore un mouvement brownien par rapport à $(\underline{\underline{B}}_t)$ lorsque $(\Omega, \underline{\underline{F}})$ est muni de la loi Q. Comme la loi d'un brownien (B_t) est uniquement déterminée sur la tribu engendrée par les B_t, on en conclut que Q = P sur $\underline{\underline{B}}_\infty$ et que $X_\infty = 0$. Le théorème est démontré. Il implique que toute martingale par rapport à $(\underline{\underline{B}}_t)$ est continue; on en déduit aisément des propriétés bien connues de $(\underline{\underline{B}}_t)$: $(\underline{\underline{B}}_t)$ n'a pas de temps de discontinuité et tout temps d'arrêt de $(\underline{\underline{B}}_t)$ est prévisible.

La démonstration du théorème 2 est en tout point analogue à celle du théorème 1.