

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

PIERRE PRIOURET

Construction de processus de Markov sur \mathbf{R}^n

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 8 (1974), p. 316-328

http://www.numdam.org/item?id=SPS_1974__8__316_0

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

CONSTRUCTION de PROCESSUS de MARKOV sur \mathbb{R}^n

par Pierre PRIOURET

1. INTRODUCTION.

Désignant par C_k^2 l'espace des fonctions de classe C^2 à support compact sur \mathbb{R}^n , on définit pour $u \in C_k^2$, l'opérateur W ,

$$(1) Wu(x) = \sum_{i,j} a_{ij}(x) D_{i,j} u(x) + \sum_i b_i(x) D_i u(x) + c(x)u(x) \\ + \int \{u(y) - \Psi(|x-y|)(u(x) + \langle y-x, \nabla_u(x) \rangle)\} s(x, dy) = P(x) + S(x)$$

où

- la matrice $(a_{ij}(x))$ est non négative,
- $s(x, dy)$ est une mesure de Radon sur $\mathbb{R}^n - \{x\}$ telle que

$$\int \frac{|x-y|^2}{1+|x-y|^2} s(x, dy) < +\infty,$$

- Ψ est une fonction de classe C^∞ telle que $\Psi(y) = 1$ si $|y| \leq 1$, $\Psi(y) = 0$ si $|y| \geq 2$,
- $W1(x) = c(x) + \int (1 - \Psi(|x-y|)) s(x, dy) \leq 0$.

On sait que les générateurs infinitésimaux des processus de Markov sur \mathbb{R}^d sont de la forme de W sur C_k^2 (voir par exemple [1]). Le problème auquel on va s'intéresser ici est, W donné (avec les hypothèses de régularité), de construire un processus de Markov de semi-groupe P_t tel que

$$(2) \quad \text{quelle que soit } u \in C_k^2, P_t u - u = \int_0^t P_s W u ds.$$

On va également établir l'unicité de ce processus.

La méthode utilisée pour construire un tel processus est en général, après Ito, celle des équations différentielles stochastiques (voir Skorokhod [7], Maizenberg [6]). La méthode présentée ici est analytique, s'inspirant de celle de [1] pour les variétés compactes ; on obtiendra également des renseignements sur la régularité des solutions du problème de Dirichlet associé à W . (Voir Maizenberg [5] pour un traitement du problème de Dirichlet par les équations différentielles stochastiques). Nous allons présenter ici les grandes lignes de cette construction.

2. Soit U un ouvert borné régulier (∂U de classe C^3 par exemple) et $0 < \alpha < 1$. Nous allons introduire quelques espaces de fonctions holdériennes sur U (voir Friedman [4]).

On pose pour $x \in U$, $d_x = \text{dist}(x, \partial U)$, $d_{x,y} = \inf(dx, dy)$.

$$|g|_\infty = \sup_{x \in U} |g(x)|,$$

$$|g|_\alpha = |g|_\infty + \sup_{x,y \in U} \frac{|g(x) - g(y)|}{|x-y|^\alpha},$$

$$|g|_{2+\alpha} = |g|_\alpha + \Sigma |D_i g|_\alpha + \Sigma |D_{i,j} g|_\alpha, \text{ et pour } m \geq 1,$$

$$|g|_{m,\alpha} = |d^m \cdot g|_\infty + \sup_{x,y \in U} \frac{d_{x,y}^{m+\alpha} |g(x) - g(y)|}{|x-y|^\alpha},$$

$$|g|_{0,2+\alpha} = |g|_\alpha + \Sigma |D_i g|_{1,\alpha} + \Sigma |D_{i,j} g|_{2,\alpha}.$$

On désigne par $C^\alpha(U)$, $C^{2+\alpha}(U)$, $C^{m,\alpha}(U)$, $C^{0,2+\alpha}(U)$ les espaces de fonctions pour lesquelles les sommes $| \cdot |_\alpha$, $| \cdot |_{2+\alpha}$, $| \cdot |_{m,\alpha}$, $| \cdot |_{0,2+\alpha}$ sont finies ; munis de ces normes, ce sont des espaces de Banach.

On va faire sur $W = P + S$ les hypothèses suivantes :

(P1) a_{ij} , b_i , c sont de classe C^α ; (a_{ij}) est strictement elliptique. On suppose une fois pour toute que $s(x, dy)$ a une densité et on pose :

$$(3) \quad S_U u(x) = \int_U \{u(y) - \Psi(|x-y|)(u(x) + \langle y-x, \nabla u(x) \rangle)\} s(x,y) dy$$

et pour f borélienne à support compact ,

$$(4) \quad Tf(x) = \int f(y) |x-y|^2 s(x,y) dy$$

$$(5) \quad T^{i,j} f(x) = \int f(y) (y_i - x_i) (y_j - x_j) s(x,y) dy .$$

Pour tout compact K on note $L^p(K)$ - $1 \leq p \leq +\infty$ - l'espace des fonctions de L^p à support inclus dans K .

On suppose :

(S1) Pour tout compact K l'opérateur T est continu de $L^\infty(K)$ dans C_{loc}^α .

(S2) Pour tout ouvert U régulier, l'opérateur S_U est compact de $C^{0,2+\alpha}(U) \cap C(\bar{U})$ dans $C^{2,\alpha}(U)$.

Le reste de ce paragraphe est consacré à l'indication de conditions suffisantes pour avoir (S1) - (S2) . Soient,

(S'1) Il existe p , $0 \leq p < +\infty$, tel que pour tout compact K , T est continu de $L^p(K)$ dans C_{loc}^α .

(S'2) Pour tout ouvert U régulier, S_U est continu de $C^2(\bar{U})$ dans $C(\bar{U})$ et envoie, pour un $\beta > \alpha$, $C^{2+\beta}(U)$ dans $C^\beta(U)$.

(S''1) Il existe p , $0 \leq p < +\infty$ tel que pour tout compact K , et pour tout i, j , $T^{i,j}$ est continu de $L^p(K)$ dans C_{loc}^α .

On a alors,

PROPOSITION 1. - Les conditions (S'1) et (S'2) impliquent (S1), (S2) .

L'idée de la démonstration est la suivante. L'hypothèse (S'2) et les techniques d'interpolation développées dans [1] montrent que S_U est compact de $C^{2+\alpha}(U)$ dans $C^\alpha(U)$. Notant φ_n une suite de fonctions

C^∞ à support compact dans U telle que $\varphi_n \uparrow 1_U$; on définit

$$S_U^n u(x) = S_U(\varphi_n u)(x) ;$$

on a alors facilement que S_U^n est compact de $C^{0,2+\alpha}(U) \cap C(\bar{U})$ dans $C^{2,\alpha}(U)$.

Enfin l'hypothèse (S'1) permet de montrer que, lorsque $n \rightarrow +\infty$, les S^n convergent vers S en norme d'opérateur, ce qui entraîne le résultat.

PROPOSITION 2. - La condition (S"1) implique (S1) et (S2).

Il suffit pour cela d'appliquer la formule de Taylor avec reste intégral dans (3) et d'un peu de calculs.

3. Donnons un exemple de noyau vérifiant (S"2).

Soit $N(x,y)$ une fonction borélienne positive sur $R^n \times R^n$, sommable en y pour chaque x , localement bornée, et supposons,

(N1) Quels que soient les compacts H, K , on a pour $y \in H, x, x' \in K$,

$$|N(x,y) - N(x',y)| \leq C(H,K) |x-x'|^\gamma ;$$

alors $s(x,y) = \frac{N(x,y)}{|x-y|^{n+2-\mu}}$, $-0 < \mu < n$ - vérifie (S"2) pour tout $\alpha < \inf(\gamma, \frac{\mu}{2})$ et $p > \frac{n}{\mu-2\alpha}$.

Soient donc H et K des compacts et f une fonction à support dans K , il s'agit de montrer :

$$(6) \quad |T^{i,j} f(x)| \leq C_1(K) \|f\|_{p,K} \text{ pour tout } x \in H ;$$

$$(7) \quad |T^{i,j} f(x) - T^{i,j} f(x')| \leq C_2(H,K) \|f\|_{p,K} |x-x'|^\alpha, \text{ pour tout } x, x' \in H .$$

D'une part,

$$\begin{aligned} |T^{i,j} f(x)| &= \left| \int N(x,y) (y_i - x_i) (y_j - x_j) |x-y|^{-n-2+\mu} f(y) dy \right| \\ &\leq C_1'(K) \left| \int_K |x,y|^{-n+\mu} f(y) dy \right| \end{aligned}$$

$$\leq C'_1(K) \|f\|_{p,K} \left\{ \int_K |x-y|^{(-n+\mu)q} dy \right\}^{1/q}$$

où $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$ et on a le résultat cherché si $(n-\mu)q < n$ i.e. $\frac{1}{q} > 1 - \frac{\mu}{n}$ ce qui est le cas si $\frac{1}{p} < \frac{\mu}{n} - \frac{2\alpha}{n}$.

D'autre part, si on pose,

$$N'(x,y) = N(x,y)(y_i - x_i)(y_j - x_j) |y-x|^{2-\alpha},$$

on a, compte tenu de $\alpha < \gamma$ et de $(N-1)$,

$$N'(x,y) \leq C_3(H,K), \quad x \in H, \quad y \in K,$$

$$|N'(x,y) - N'(x',y)| \leq C_4(H,K) |x-x'|^\alpha, \quad x, x' \in H, \quad y \in K,$$

on a alors pour $x, x' \in H$,

$$|T^{i,j} f(x) - T^{i,j} f(x')| = \left| \int (N'(x,y) |x-y|^{-n+\mu-\alpha} - N'(x',y) |x'-y|^{-n+\mu-\alpha}) f(y) dy \right|$$

$$\leq D_1 + D_2 \quad \text{où}$$

$$\begin{aligned} D_1 &\leq \int_K |N'(x,y) - N'(x',y)| \cdot |x-y|^{-n+\mu-\alpha} \cdot f(y) dy \\ &\leq C_4(H,K) |x-x'|^\alpha \int_K |x-y|^{-n+\mu-\alpha} f(y) dy, \\ &\leq C_4(H,K) |x-x'|^\alpha \|f\|_{p,K} \left\{ \int_K |x-y|^{(-n+\mu-\alpha)q} dy \right\}^{1/q} \\ &\leq C'_4(H,K) |x-x'|^\alpha \|f\|_{p,K} \end{aligned}$$

car $p > \frac{n}{\mu-2\alpha} > \frac{n}{\mu-\alpha}$ implique $(n-\mu+\alpha)q < n$.

$$D_2 = \left| \int_K N'(x',y) (|y-x|^{-n+\mu-\alpha} - |y-x'|^{-n+\mu-\alpha}) f(y) dy \right|$$

et compte tenu de l'inégalité, $x, x' \in H, \quad y \in K$

$$||y-x|^{-n+\mu-\alpha} - |y-x'|^{-n+\mu-\alpha}| \leq C_5(H,K) |x-x'|^\alpha \{ \inf(|y-x|, |y-x'|) \}^{-n+\mu-2\alpha}$$

$$\begin{aligned} D_2 &\leq C_6(H,K) |x-x'|^\alpha \|f\|_{p,K} \left\{ \int_K [\inf(|y-x|, |y-x'|)]^{(-n+\mu-2\alpha)q} dy \right\}^{1/q} \\ &\leq C'_6(H,K) |x-x'|^\alpha \|f\|_{p,K} \end{aligned}$$

car $p > \frac{n}{\mu-2\alpha}$ implique que $(-n-\mu+2\alpha)q < n$.

Ceci montre les inégalités (6) et (7).

Remarque : On peut également montrer directement que si $s(x,y)$ est associé comme ci-dessus à un noyau $N(x,y)$ vérifiant (N1) alors les hypothèses (S1) et (S2) sont satisfaites sans utiliser les propositions 1 et 2.

5. Dans ce paragraphe, on fixe un ouvert U régulier (i.e. borné, connexe, de classe C^3) et on suppose vérifiées (P1), (S1) et (S2). D'abord, un résultat qui nous sera utile à plusieurs reprises.

PROPOSITION 3. - Si $f \in L^\infty(K)$ - K compact - $h(x) = \int_{U^c} s(x,z)f(z)dz$ appartient à $C^{2,\alpha}(U)$ et $|h|_{2,\alpha} \leq C_K |f|_\infty$.

Démonstration : Il faut montrer :

$$(8) \quad \text{quel que soit } x \in U, \quad |d_x^2 h(x)| \leq C \cdot |f|_\infty$$

$$(9) \quad \text{quels que soient } x,y \in U, \quad d_{x,y}^{2+\alpha} |h(x)-h(y)| \leq C |x-y|^\alpha |f|_\infty.$$

Pour (8) il suffit de remarquer que si $x \in U, z \in U^c, d_x \leq |x-y|$ d'où $|h(x)| = \left| \int_{U^c} s(x,z) |x-z|^2 \frac{f(z)}{|x-z|^2} \right| \leq d_x^{-2} \int_{U^c} s(x,z) |x-z|^2 |f(z)| \leq d_x^{-2} \cdot C \cdot |f|_\infty$ d'après (S.1).

La démonstration de (9) est un peu plus délicate mais se fait par le même principe.

On va définir à partir de W un nouvel opérateur de $C^2(U)$ dans U par

$$(10) \quad W_U f(x) = P_U f(x) + S_U f(x), \quad f \in C^2(U), \quad x \in U;$$

où S_U est défini par (3) et où

$$(11) \quad P_U f(x) = \sum a_{i,j}(x) D_{i,j} f(x) + \sum b_i^U(x) D_i f(x) + c^U(x) f(x)$$

avec

$$(12) \quad b_i^U(x) = b_i(x) - \int_{U^c} \Psi(|x-z|)(z_i - x_i) s(x,z) dz$$

$$(13) \quad c_i^U(x) = c(x) - \int_{U^c} \Psi(|x-z|) s(x,z) dz .$$

Par une démonstration analogue à celle de la proposition 3 , on établit facilement la

PROPOSITION 4. - On a $b_i^U \in C^{1,\alpha}(U)$, $c \in C^{2,\alpha}(U)$.

Si $u \in C(\bar{U})$, on note $\gamma^\circ u$ la restriction de u à ∂U ; d'après des résultats de Douglis-Nirenberg [3] (voir également Friedman [4]), on a le théorème suivant :

THEOREME 5. - Si $a_{i,j} \in C^\alpha(U)$, $b_i^U \in C^{1,\alpha}(U)$, $c \in C^{2,\alpha}(U)$ alors l'application $u \rightarrow (P_U u, \gamma^\circ u)$ est un isomorphisme de $C^{0,2+\alpha}(U) \cap C(\bar{U})$ sur $C^{2,\alpha}(U) \times C(\partial U)$.

Considérons maintenant l'application de $C^{0,2+\alpha}(U) \cap C(\bar{U})$ dans $C^{2,\alpha}(U) \times C(\partial U)$, $u \rightarrow (W_U u, \gamma^\circ u) = (P_U u, \gamma^\circ u) + (S_U u, 0)$; c'est la somme d'une application d'indice zéro d'après le théorème 5 et d'une application compacte d'après (S2) ; elle est donc d'indice 0 . Pour montrer que c'est un isomorphisme des espaces considérés, il suffit de montrer qu'elle est injective. Ceci est une conséquence du principe du maximum de W_U et plus précisément des lemmes suivants (rappelons qu'on a supposé U connexe).

LEMME 1. - Si $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$ et si $W_U u(x) \geq 0$ pour $x \in U$, alors si u atteint un maximum ≥ 0 en $x_0 \in U$, u est constante.

La démonstration de ce lemme est assez longue mais à peu près semblable (sous des hypothèses cependant un peu différentes) à celle du théorème VII, chapitre I de [1] .

Du lemme 1, on déduit de façon classique le

LEMME 2. - Soit $u \in C^2 \cap C(\bar{U})$ telle que $W_u(x) \geq 0$ pour $x \in U$ et $\gamma^\circ u \leq 0$ alors $u \leq 0$.

On peut donc énoncer, $W_U - \lambda$ ayant les mêmes propriétés que W_U ,

THEOREME 6. - Pour tout $\lambda \geq 0$, l'application $u \rightarrow ((W_U - \lambda)u, \gamma^\circ u) - W_U$ défini par (10) - est un isomorphisme de $C^{0,2+\alpha}(U) \cap C(\bar{U})$ sur $C^{2,\alpha}(U) \times C(\partial U)$.

6. On fixe toujours un ouvert U régulier et on considère l'opérateur \hat{W}_U défini par $\hat{W}_U u(x) = Wu(x) \cdot 1_U(x)$, $u \in C_k^2$.

En particulier,

$$\hat{W}u(x) = \begin{cases} W_U u(x) + \int_{U^c} u(y) s(x,y) dy, & x \in U \\ 0, & x \notin U. \end{cases}$$

On va montrer que la fermeture de (C_k^2, \hat{W}_U) est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de Feller sur $C_0(\mathbb{R}^n)$. Cela repose sur le

LEMME. - Soit $f \in C_k(\mathbb{R}^n)$ telle que $f|_U \in C^{2,\alpha}(U)$, pour tout $\lambda > 0$, il existe u unique, $u \in C_k(\mathbb{R}^n)$ avec $u|_U \in C^{0,2+\alpha}(U)$, telle que $(\lambda - \hat{W}_U)u = f$.

En effet, $(\lambda - \hat{W}_U)u = f$ équivaut à :

$$(14) \quad (\lambda - W_U)u(x) - \int_{U^c} u(y) s(x,y) dy = f(x), \quad x \in U; \quad \lambda u(x) = f(x), \quad x \notin U.$$

Soit encore

$$(15) \quad (\lambda - W_U)u(x) = f(x) + \frac{1}{\lambda} \int_{U^c} f(y) s(x,y) dy, \quad x \in U; \quad u(x) = \frac{f(x)}{\lambda}, \quad x \in \partial U.$$

D'après la proposition 3, n° 5, $\int_{U^c} f(y) s(x,y) dy \in C^{2,\alpha}(U)$, d'où il existe une et seule solution à (15) d'après le théorème 6, n° 5.

Soit $\mathcal{D}_U = \{u; u \in C_k(\mathbb{R}^n), u|_U \in C^{0,2+\alpha}(U)\}$, alors on a le

THEOREME 7. - Il existe un unique semi-groupe de Feller sur $C_0(\mathbb{R}^n)$ dont le générateur infinitésimal prolonge $(\mathcal{D}_U, \hat{W}_U)$.

C'est le théorème de Hille-Yosida-Ray car $\mathcal{D}_U \supset C_k^3$ est dense dans C_0 , \hat{W}_U a le principe du maximum (Lemme 2, n° 5) et $(\lambda - \hat{W}_U)\mathcal{D}_U \supset C_k^3$ - Lemme ci-dessus - donc $(\lambda - \hat{W}_U)\mathcal{D}_U$ est dense dans C_0 .

Notations : On note P_t^U ce semi-groupe, G_λ^U sa résolvante, $X^U = (\Omega, X_t, P_x^U)$ le processus de Markov canonique associé, Ω est l'ensemble des applications c.a.d.l.à.g. de \mathbb{R}_+ dans $\mathbb{R}^n \cup \{\partial\}$ absorbées en $\{\partial\}$; alors

$$G_\lambda^U f(x) = E_x^U \left(\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} f(X_t) dt \right).$$

On a également (formule de Dynkin), pour tout temps d'arrêt τ :

$$(16) \quad E_x^U (e^{-\lambda \tau} u(X_\tau)) - u(x) = E_x^U \left(\int_0^\tau e^{-\lambda s} (\hat{W}_U - \lambda) u(X_s) ds \right), \quad u \in \mathcal{D}_U.$$

7. Soient U et V deux ouverts réguliers tels que $\bar{V} \subset U$.

Considérons le processus X^U et soit $\sigma_V = \inf(t \geq 0, X_t \notin V)$; on peut considérer le processus $\bar{X} = (\bar{X}^U)^V$ "stoppé" de X^U au temps σ_V : $\bar{X}_t = X_t^U \wedge \sigma_V$. Sa résolvante $\bar{G}_\lambda = (\bar{G}^U)_\lambda^V$ est donnée par

$$(17) \quad \bar{G}_\lambda f(x) = E_x^U \int_0^{\sigma_V} e^{-\lambda t} f(X_t) dt + \frac{1}{\lambda} E_x^U (e^{-\lambda \sigma_V} f(X_{\sigma_V})).$$

Le problème est de montrer l'équivalence des processus \bar{X} et X^V .

Cela repose sur le

LEMME. - On a pour $x \in V$ et $u \in \mathcal{D}_V$, la formule

$$(18) \quad E_x^U (e^{-\lambda \sigma_V} u(X_{\sigma_V})) - u(x) = E_x^U \left(\int_0^{\sigma_V} e^{-\lambda t} (W - \lambda) u(X_t) dt \right).$$

Cette formule se réduit à (16) si $u \in \mathcal{B}_U$; il faut la prolonger à \mathcal{B}_V ; ceci se fait en approximant une fonction $u \in \mathcal{B}_V$ par des éléments $u_n \in \mathcal{B}_U$ et un peu de calcul.

Ce lemme montré, soit $f \in (\lambda - \hat{W}_V)\mathcal{B}_V$, $f = (\lambda - \hat{W}_V)u$, $u \in \mathcal{B}_V$ et $G_\lambda^V f(x) = u(x)$; de plus si $x \notin V$, $f(x) = \lambda u(x)$.

Si $x \in V$,

$$\begin{aligned} (\bar{G}_\lambda)f(x) &= E_x^U \int_0^{\sigma_V} e^{-\lambda t} f(X_t) dt + \frac{1}{\lambda} E_x^U (e^{-\lambda \sigma_V} f(X_{\sigma_V})) - \text{d'après (17)} - , \\ &= E_x^U \int_0^{\sigma_V} e^{-\lambda t} (\lambda - W)u(X_t) dt + E_x^U (e^{-\lambda \sigma_V} \cdot u(X_{\sigma_V})) , \\ &= u(x) \quad \quad \quad - \text{d'après (18)} - , \\ &= G_\lambda^V f(x) . \end{aligned}$$

Si $x \notin V$,

$$\bar{G}_\lambda f(x) = \frac{1}{\lambda} f(x) = u(x) = G_\lambda^V f(x) .$$

Comme $(\lambda - \hat{W}_V)\mathcal{B}_V$ est dense dans $C_0(\mathbb{R}^n)$ - Lemme n° 6 - $\bar{G}_\lambda = G_\lambda^V$ et on a montré le

THEOREME 8. - Soient U et V deux ouverts réguliers tels que $\bar{V} \subset U$, alors le processus X^U stoppé au temps de sortie de V est équivalent au processus X^V .

8. Prenons pour U_n la boule de centre 0, de rayon n , il résulte du théorème de recollement ([2], p. 344) qu'il existe un unique processus standard $X = (\Omega, X_t, P_x)$ - Ω espace canonique - dont le processus stoppé au temps de sortie de U_n est X^{U_n} . Plus généralement, si U est un ouvert régulier, le stoppé de X à σ_U est X^U , ce qui signifie que l'on a les relations, pour $\lambda > 0$ et $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$,

$$(19) \quad G_\lambda^U f(x) = E_x^U \left(\int_0^{\sigma_U} e^{-\lambda t} f(X_t) dt \right) + \frac{1}{\lambda} E_x^U (e^{-\lambda \sigma_U} \cdot f(X_{\sigma_U})) .$$

$$(20) \quad P_t^U f(x) = E_x(f(X_{t \wedge \sigma_U})) .$$

Si on choisit $f \in C_k^2$ et U un ouvert régulier contenant $\text{supp}(f)$, on a, grâce à (20),

$$\begin{aligned} E_x(f(X_{t \wedge \sigma_U})) - f(x) &= E_x \int_0^t \hat{W}^U f(X_{s \wedge \sigma_U}) ds \\ &= E_x \int_0^{t \wedge \sigma_U} Wf(X_s) ds . \end{aligned}$$

Mais comme $f(X_{\sigma_U}) = 0$, on a aussi

$$E_x(f(X_t) 1_{[t < \sigma_U]}) - f(x) = E_x \int_0^{t \wedge \sigma_U} Wf(X_s) ds ;$$

si maintenant on fait croître U vers R^n , σ_U croît vers la durée de vie ζ de X (le processus est standard) et compte tenu des conventions usuelles, on obtient

$$(21) \quad E_x(f(X_t)) - f(x) = E_x \int_0^t Wf(X_s) ds .$$

Considérons maintenant un processus de Markov standard $\tilde{X} = (\Omega, X_t, \tilde{P}_x)$ vérifiant

$$(21) \quad \tilde{E}_x u(X_t) - u(x) = \tilde{E}_x \int_0^t W u(X_s) ds , \text{ quelle que soit } u \in C_k^2 .$$

On notera R_λ^U la résolvante de \tilde{X}^U processus stoppé de \tilde{X} au temps σ_U .

De (21), on déduit de façon usuelle, pour $\lambda > 0$, $u \in C_k^2$,

$$(22) \quad \tilde{E}_x (e^{-\lambda t} u(X_t)) - u(x) = \tilde{E}_x \int_0^t e^{-\lambda s} (W - \lambda) u(X_s) ds ,$$

$$(23) \quad \tilde{E}_x (e^{-\lambda \sigma_U} u(X_{\sigma_U})) - u(x) = \tilde{E}_x \int_0^{\sigma_U} e^{-\lambda s} (W - \lambda) u(X_s) ds .$$

Cette dernière relation s'étend à $u \in \mathcal{D}_U$ et on a donc, pour U ouvert régulier et $u \in \mathcal{D}_U$,

$$(24) \quad u(x) = \tilde{E}_x \int_0^{\sigma_U} e^{-\lambda s} (\lambda - W) u(X_s) ds + \tilde{E}_x (e^{-\lambda \sigma_U} u(X_{\sigma_U}))$$

soit encore puisque $W = \hat{W}^U$ sur U , $\hat{W}^U = 0$ sur U^c ,

$$(25) \quad \begin{aligned} u(x) &= R_\lambda^U [(\lambda - \hat{W}^U)u](x) \\ &= G_\lambda^U [(\lambda - \hat{W}^U)u](x) \end{aligned}$$

d'où comme $(\lambda - \hat{W}^U)\mathcal{D}_U$ est dense dans $C_0(\mathbb{R}^n)$, $R_\lambda^U = G_\lambda^U$ puis, d'après l'unicité du recollement, $X = \tilde{X}$.

On peut énoncer le

THEOREME 9. - Soit W un opérateur de la forme (1), vérifiant les hypothèses (P1), (S1), (S2); il existe un et un seul processus de Markov standard sur \mathbb{R}^n , $X = (\Omega, X_t, P_x)$ tel que,

$$E_x u(X_t) - u(x) = E_x \int_0^t W u(X_s) ds, \text{ quelle que soit } u \in C_k^2.$$

9. Nous terminons par deux remarques.

D'abord, U étant un ouvert régulier et f une fonction donnée sur U^c , continue nulle en dehors d'un compact, il résulte de ce qui précède que $u(x) = E_x (f(X_{\sigma_U}))$ est l'unique solution du problème de Dirichlet $Wu(x) = 0$, $x \in U$; $u(x) = f(x)$, $x \in U^c$ et que cette solution est telle que $u \in C_k(\mathbb{R}^n)$, $u|_U \in C^{0,2+\alpha}(U)$.

Enfin, on peut donner des conditions sur les coefficients de P et sur le noyau $s(x,y)$ pour que le processus X soit conservatif ou de Feller.

R E F E R E N C E S

- [1] BONY - COURREGE - PRIOURET Semi-groupes de Feller sur une variété à bord compacte...
Ann. Inst. Fourier, 18.2 (1969),
p. 369.
- [2] COURREGE - PRIOURET Recollements de processus de Markov.
Publ.Math.Stat.Univ., Paris 14 (1965),
p. 275.
- [3] DOUGLIS - NIREMBERG Interior estimates for elliptic systems of partial differential equations.
Comm.Pure Appl.Math., 8 (1955), p. 503.
- [4] FRIEDMAN Partial differential equations of parabolic Type.
Prentice-Hall.
- [5] MAIZENBERG The Dirichlet problem for certain integro-differential equations.
Math. URSS, Izvestija, Vol. 3 (1969),
n° 3.
- [6] MAIZENBERG The Cauchy problem for some integro-differential equations.
Izv.Vyss.Uceb.Zaved Matematika, (1969),
n° 8.
- [7] SKOROHOD Studies in the theory of random processes.
Addison-Wesley (1965).