SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

JOSÉ DE SAM LAZARO
PAUL-ANDRÉ MEYER

Questions de théorie des flots (III)

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 9 (1975), p. 30-37
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1975__9__30_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1971/72

QUESTIONS DE THEORIE DES FLOTS (III)

par J. de SAM LAZARO et P.A. MEYER

Cet exposé-ci est presque entièrement consacré à des exemples de flots - en fait, à des <u>exemples de K-flots</u>. Nous considérons d'abord les flots des processus à accroissements indépendants (p.a.i.), et en particulier les deux " modèles" que nous considérerons sans cesse dans la suite : le flot brownien et le flot de Poisson. Puis nous étudions un flot lié aux processus de renouvellement en temps continu, et enfin un exemple "simple" de flot sous une fonction, traité par Totoki dans un article récent.

1. LE FLOT D'UN P.A.I.

Donnons nous sur $\mathbb{R}$ (la même théorie s'appliquerait à $\mathbb{R}^n$!) un semi-groupe de convolution $(\mu_t)_{t\geq 0}$ étroitement continu, et construisons les noyaux de convolution P_t associés aux μ_t , qui forment un semi-groupe de noyaux markoviens

(1) $$P_t(x,f) = \int f(x+y)\mu_t(dy)$$

Soit Ω l'ensemble de toutes les applications $\omega(t)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continues à droite et pourvues de limites à gauche (cadlag), telles que $\omega(0)=0$. Nous poserons $X_t(\omega)=\omega(t)$, et nous munirons Ω de la tribu $\underline{\underline{F}}^o$ engendrée par toutes les applications X_t, $t\in\mathbb{R}$, ainsi que de la famille de tribus $\underline{\underline{F}}^o_t$ ainsi définie

(2) $$\underline{\underline{F}}^o_t = \underline{\underline{T}}(X_u-X_v \ , \ u\leq t,\ v\leq t)$$

Nous définirons l'opérateur de translation θ_t sur Ω par la relation

(3) $$X_s(\theta_t\omega) = X_{s+t}(\omega)-X_t(\omega)$$

Il est très facile de vérifier que les θ_t forment un groupe d'automorphismes de l'espace mesurable $(\Omega,\underline{\underline{F}}^o)$, que l'application $(t,\omega)\mapsto \theta_t\omega$ est mesurable, et enfin que $\underline{\underline{F}}^o_t=\theta_t^{-1}\underline{\underline{F}}^o_0$.

THEOREME 1. <u>Il existe sur</u> Ω <u>une loi</u> P <u>et une seule telle que, pour tout</u> $t\in\mathbb{R}$, <u>le processus</u> $(X_{s+t}-X_t)_{s\geq 0}$ <u>soit un processus de Markov admettant</u> (P_t) <u>comme semi-groupe de transition</u>, ε_0 <u>comme loi initiale</u>. <u>On a pour tout</u> t $\theta_t(P)=P$.

La condition précédente peut se dire autrement : si l'on a $t_1<t_2\ldots<t_n$, les différences $X_{t_2}-X_{t_1}$, $X_{t_3}-X_{t_2}\ldots X_{t_n}-X_{t_{n-1}}$ sont des v.a. indépendantes, admettant respectivement pour lois $\mu_{t_2-t_1}$, $\ldots\mu_{t_n-t_{n-1}}$.

Il y a bien des manières de démontrer ce théorème. En voici une. Désignons par $\hat{\mu}_t$ la mesure symétrique de μ_t par rapport à 0, par $(\hat{P}_t)$ le semi-groupe de noyaux correspondant. Soit Ω^+ l'ensemble de toutes les applications ω^+ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, nulles en 0, c.à.d. et pourvues de limites à gauche. Nous posons $X_t^+(\omega^+)=\omega^+(t)$ $(\omega^+\in\Omega^+)$, et nous désignons par $\underline{\underline{F}}^+$ la tribu engendrée par les applications X_t^+ , par P^+ l'unique mesure sur Ω^+ pour laquelle le processus (X_t^+) est markovien, avec mesure initiale ε_0 bien entendu, et (P_t) comme semi-groupe de transition. De même, soit Ω^- l'ensemble des applications ω^- de $]0,\infty[$ dans $\mathbb{R}$, continues à gauche, pourvues de limites à droite sur $[0,\infty[$; posons $X_t^-(\omega^-)=\omega^-(t)$, et notons $X_{t+}^-(\omega^-)$ la limite à droite en t . Définissons la tribu $\underline{\underline{F}}^-$ comme plus haut, et soit P^- l'unique mesure pour laquelle le processus X_{t+}^- (ou X_t^-) est markovien, avec $(\hat{P}_t)$ comme semi-groupe de transition et ε_0 comme loi initiale (loi de X_{0+}^-). Nous définissons maintenant une bijection de $\Omega^-\times\Omega^+$ sur Ω

$$(\omega^-,\omega^+)\longmapsto\omega=\varphi(\omega^-,\omega^+) \text{ défini par } X_t(\omega)=\begin{matrix} X_t^+(\omega^+) \text{ si } t\geqq 0 \\ X_{-t}^-(\omega^-) \text{ si } t<0\end{matrix}$$

La loi P cherchée est alors la loi image $\varphi(P^-,P^+)$: la vérification de ce fait ne présente aucune difficulté, et nous laissons les détails au lecteur.

Deux exemples remarquables : si (μ_t) est le semi-groupe du mouvement brownien, on a défini le <u>flot brownien</u> : on restreint d'habitude Ω^+ à l'ensemble des applications <u>continues</u> de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, nulles en 0, on prend $\Omega^-=\Omega^+$, et Ω est réduit à l'ensemble des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, nulles en 0 . Si (μ_t) est le semi-groupe de Poisson, on a défini le <u>flot de Poisson</u> : on restreint d'habitude Ω^+ à l'ensemble des applications de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, nulles en 0, croissantes, en escalier et à sauts unité (continues à droite) ; Ω^- à l'espace analogue d'applications continues à gauche, et on ne permet à X_{0+}^- que les valeurs 0 et -1, de telle sorte que $\omega=\varphi(\omega^-,\omega^+)$ présente aussi un saut en 0 égal à 0 ou 1.

Nous allons démontrer que les flots de p.a.i. sont des K-flots . Plus précisément

THEOREME 2 . La filtration $(\underline{\underline{F}}_t^o)$ est purement stochastique.

DEMONSTRATION. Il suffit de démontrer que pour toute v.a. $\underline{\underline{F}}^o$-mesurable bornée f , $E[f|\underline{\underline{F}}_t^o]$ tend vers $E[f]$ dans L^1 lorsque $t\to-\infty$ (cette espérance conditionnelle convergeant d'autre part vers $E[f|\underline{\underline{F}}^o_{-\infty}]$ dans L^1, d'après la théorie des martingales). L'espace des fonctions f possédant cette propriété étant fermé dans L^1, il suffit de vérifier cela pour des f formant un ensemble total dans L^1. On choisit des fonctions de la forme

$$f = f_1\circ(X_{t_1}-X_{t_1'}).f_2\circ(X_{t_2}-X_{t_2'})\ldots f_n\circ(X_{t_n}-X_{t_n'})$$

où $f_1,\ldots,f_n$ sont bornées sur $\mathbb{R}$, et $t_1\leq t_1'\leq t_2\leq t_2'\ldots\leq t_n\leq t_n'$. Mais alors f est indépendante de $\underline{\underline{F}}_t$ pour t assez près de $-\infty$, et $E[f|\underline{\underline{F}}_t^o]$ $=E[f]$ dans ce cas.

Nous étudierons ces flots plus tard, de manière plus approfondie.

2. LE FLOT D'UN PROCESSUS DE MARKOV

Considérons un espace d'états $(E,\underline{\underline{E}})$ - polonais par exemple - et sur cet espace un semi-groupe markovien $(P_t)_{t\geq 0}$, admettant une réalisation sur l'espace des applications continues à droite et pourvues de limites à gauche de $\mathbb{R}_+$ dans E. Soit α une loi[1] de probabilité invariante : $\alpha P_t=\alpha$ pour tout t.

Soit Ω l'ensemble de toutes les applications de $\mathbb{R}$ dans E, continues à droite et pourvues de limites à gauche. Pour tout $t\in\mathbb{R}$ posons $X_t(\omega)=\omega(t)$ ($\omega\in\Omega$) ; munissons Ω de la tribu $\underline{\underline{F}}^o$ engendrée par toutes les applications $X_t(t\in\mathbb{R})$, et de la filtration $\underline{\underline{F}}_t^o$

(4) $$\underline{\underline{F}}_t^o = \underline{\underline{T}}(X_s\ ,\ -\infty< s \leq t\ )$$

Nous définissons l'opérateur de translation θ_t sur Ω par la relation $X_s(\theta_t\omega)=X_{s+t}(\omega)$ pour tout $s\in\mathbb{R}$. On a bien un groupe d'automorphismes, etc...

THEOREME 3. Il existe sur Ω une loi P et une seule telle que, pour tout $t\in\mathbb{R}$, le processus $(X_{t+s})_{s\geq 0}$ soit markovien, admette (P_t) comme semi-groupe de transition et α comme loi initiale. Le système $(\Omega,\underline{\underline{F}}^o,P,\theta_t)$ est un flot, filtré par la famille $(\underline{\underline{F}}_t^o)$.

[1] Le cas plus général où α est seulement supposée σ-finie est aussi intéressant, mais nous le laisserons de côté.

Nous ne démontrerons pas ce théorème, qui est classique et facile : une méthode rapide consiste à construire le processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Q}}$ au moyen du théorème de Kolmogorov, puis $X_t, t\in\mathbb{R}$ par limite à droite, et enfin à passer sur l'espace canonique Ω.

A quelle condition la filtration $(\underline{\underline{F}}^o_t)$ est elle purement stochastique ? Il s'agit d'exprimer que pour toute $f\in L^1(\underline{\underline{F}}^o)$, $E[f|\underline{\underline{F}}^o_t]$ converge dans L^1 vers $E[f]$ lorsque $t\to -\infty$, et comme d'habitude on peut se limiter à des f qui forment un ensemble total dans L^1. Par exemple des f de la forme

$$f_1\circ X_{t_1}\dots f_n\circ X_{t_n} \quad (f_i \text{ bornées sur } E,\ t_1\leq\dots\leq t_n)$$

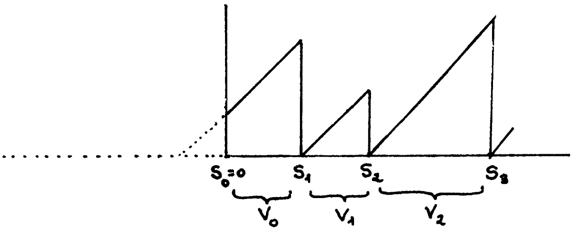
Mais si $t<t_1$, $E[f|\underline{\underline{F}}^o_t]=E[f|\underline{\underline{F}}^o_{t_1}|\underline{\underline{F}}^o_t]$ et cette dernière espérance, d'après la propriété de Markov, peut se mettre sous la forme $E[g\circ X_{t_1}|\underline{\underline{F}}^o_t]$, g étant bornée sur E. En définitive, tout revient à voir si, pour toute fonction g bornée sur E

$$(5) \qquad P_t g \longrightarrow < \alpha,g > \text{ dans } L^1(\alpha) \text{ lorsque } t\to+\infty$$

et il suffit d'ailleurs de démontrer cela pour des g formant un ensemble total dans $L^1(\mu)$. Inversement, cette condition suffisante pour que $(\underline{\underline{F}}^o_t)$ soit une K-filtration est aussi nécessaire : écrire simplement que $E[g\circ X_0|\underline{\underline{F}}_t] \to E[g\circ X_0|\underline{\underline{F}}_{-\infty}]=E[g\circ X_t]$ dans L^1. Par exemple, ce critère est facile à appliquer aux chaînes de Markov à un nombre fini d'états ! On va en donner, d'après Totoki, une application plus intéressante.

PROCESSUS DE RENOUVELLEMENT

Le dessin suivant représente une "fonction en dents de scie" ω, continue à droite, affine de pente 1 par morceaux, ne présentant qu'un nombre fini de sauts sur tout intervalle compact. On pose $\tau_t(\omega)=\omega(t)$, on désigne par $S_i(\omega)$ les instants de sauts successifs, par $V_i(\omega)$ les intervalles successifs entre les sauts



Soit W l'ensemble de toutes les applications en dents de scie, muni de la tribu engendrée par toutes les applications τ_t . Pour se donner une loi P sur W , il suffit de se donner la loi des v.a. V_i. Pour $x\in\mathbb{R}_+$, nous définissons la loi P^x sur W par les conditions suivantes

- toutes les v.a. V_i , $i\geqq 0$, sont indépendantes
- les v.a. V_i ont, pour $i\geqq 1$, une même loi λ portée par $\mathbb{R}_+$, de moyenne finie m, ne chargeant pas 0
- la v.a. V_0 a pour loi

$$P^x\{V_0>t\} = \frac{\lambda(]x+t,\infty[)}{\lambda(]x,\infty[)}$$

si le dénominateur n'est pas nul. S'il est nul, $V_0=+\infty$ P^x-p.s.. Posons $P_t(x,A)=P^x\{\tau_t\in A\}$. Il est alors classique que les noyaux P_t forment un semi-groupe, que pour tout x le processus (τ_t) est markovien pour la loi P^x, avec ε_x comme loi initiale et (P_t) comme semi-groupe de transition. Enfin, si la loi λ n'est pas arithmétique (i.e. n'est pas portée par l'ensemble des multiples d'un nombre réel d)

(6) $$\lim_{t\to\infty} P_t(x,[0,a]) = \frac{1}{m}\int_0^a \lambda([u,\infty[)\,du$$

On pourra consulter par exemple le volume 2 du traité de Feller, p. 354-357. La mesure α de densité $\lambda([u,\infty[)/m$ est la seule mesure invariante bornée pour le semi-groupe (P_t), et la condition (5) est satisfaite, d'après (6), pour suffisamment de fonctions g. Autrement dit, si λ n'est pas arithmétique, le flot du processus de Markov de semi-groupe (P_t) pour sa loi invariante α est un K-flot.

Nous aurons besoin pour la suite de quelques autres calculs sur cet exemple. Nous réaliserons un processus du type précédent de la manière suivante. Soit $(H,\underline{\underline{H}},\zeta)$ un espace probabilisé quelconque. Formons l'espace probabilisé $(\Omega,\underline{\underline{A}},\mu)$, où $\Omega=H^{\mathbb{Z}}$, muni de la tribu et de la mesure produit. Notons Z_n la coordonnée d'indice n, et s l'automorphisme de translation : $Z_n(s\omega)=Z_{n+1}(\omega)$. Un tel flot discret s'appelle un <u>flot de Bernoulli</u> . Nous considérons maintenant une fonction f sur Ω, strictement positive, et ne dépendant que de Z_0 : $f=\varphi\circ Z_0$, où φ sur H est partout >0, d'intégrale 1 par rapport à ζ . Nous posons alors $V_i=\varphi\circ Z_i$ $(i\geqq 0)$, $S_{i+1}=V_0+\ldots+V_i$, et nous voulons étudier le comportement, lorsque $t\to+\infty$, de

$$E[\sum_{k=0}^{\infty} I_{\{S_k\leqq t<S_{k+1}\}} g_1\circ Z_{k-1}\ldots g_n\circ Z_{k-n}\, h(t-S_k)\,] \qquad (7)$$

$g_1,\ldots,g_n$ étant bornées sur H, h sur $\mathbb{R}_+$, et n étant un entier fixe. On supposera pour fixer les idées que tous les $|g_i|$ et $|h|$ sont $\leqq 1$.

Nous commençons par remarquer que, t tendant vers $+\infty$, on ne change pas le comportement de cette expression en sommant de n à $+\infty$ au lieu de 0 à $+\infty$. Ensuite, conditionnons relativement à la tribu

$$\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}(S_k, S_{k+1}, S_{k+2}\dots)$$

Nous avons par symétrie

$$E[g_1 \circ Z_{k-1} \dots g_n \circ Z_{k-n} | \underline{\underline{T}}_k] = E[g_1 \circ Z_1 \dots g_n \circ Z_n | \underline{\underline{T}}_k]$$

fonction que nous noterons G_k . Lorsque $k \to \infty$, il résulte du théorème de convergence des martingales que G_k converge p.s. et dans L^1 vers une v.a. G ; G est mesurable par rapport à $\bigcap_n \underline{\underline{T}}_n$, et elle est donc dégénérée (théorème de Hewitt et Savage : voir Meyer, probabilités et potentiel, VIII, T.5 (p.191)). Rétablissant (7) sous la forme

$$(8) \qquad E[\sum_{k=n}^{\infty} I_{\{S_k \leq t < S_{k+1}\}} G_k h(t-S_k)]$$

qui en diffère très peu pour t grand, et que l'on compare à

$$(9) \qquad E[\sum_{k=n}^{\infty} I_{\{S_k \leq t < S_{k+1}\}} G h(t-S_k)]$$

La différence entre (8) et (9) se coupe en deux : $\sum_n^N$ et $\sum_N^\infty$. Le premier terme se majore par $2P\{t<S_{N+1}\}$ qui tend vers 0 , le second par $E[\sup_{k>N} |G_k - G|]$, arbitrairement petit. Les expressions (7) et (9) ont donc le même comportement à l'infini. Quant à (9), G étant une constante, elle a été précédemment étudiée , et converge vers $G.\int h d\alpha$, où α est la mesure invariante pour le processus de renouvellement. Noter aussi que $G=E[g_1 \circ Z_1 \dots g_n \circ Z_n]$.

UN EXEMPLE DE FLOT SOUS UNE FONCTION

Nous construisons maintenant le <u>flot sous f</u> , associé à la cascade de Bernoulli $(\Omega, \underline{\underline{A}}, s, \mu)$. Nous allons établir le théorème de Totoki

THEOREME 4. <u>Si la loi de</u> f (autrement dit la loi de φ pour ζ) <u>n'est pas arithmétique</u>, <u>le flot sous</u> f <u>est un K-flot</u>.

Nous reprenons les notations précédemment utilisées pour les flots sous une fonction : $\tilde{\Omega}$, $\tilde{\underline{\underline{A}}}$, θ_t , $\tilde{\mu}$; $\underline{\underline{A}}_0$ étant la tribu engendrée par les v.a. $Z_0, Z_{-1}, Z_{-2}\dots$, qui filtre la cascade de Bernoulli, on note $\tilde{\underline{\underline{A}}}_0$ la tribu engendrée par les applications $(\omega,u) \mapsto Z_k(\omega)$ $(k \leq 0)$, et $\tau_0 : (\omega,u) \mapsto u$, tribu qui filtre le flot sous f .

On pourrait interpréter le processus $(X_t) = (Y_t, \tau_t))$ à valeurs dans $(\tilde{\Omega}, \tilde{\underline{\underline{A}}}_0)$ comme un processus de Markov, auquel on appliquerait les raisonnements précédents. On préfére ne pas le faire, et recommencer en partie ces raisonnements. Il s'agit de montrer que pour suffisamment de fonctions g, $\tilde{\underline{\underline{A}}}$-mesurables et bornées, $E[g|\tilde{\underline{\underline{A}}}_t] \to \int g d\tilde{\mu}$ dans L^1 lorsque $t\to-\infty$. Cela revient à montrer que $E[g\circ\Theta_t|\tilde{\underline{\underline{A}}}_0] \to \int g d\tilde{\mu}$ lorsque $t\to+\infty$. Par un argument de densité on se ramène au cas où g est $\tilde{\underline{\underline{A}}}_r$-mesurable pour un r fini, puis par translation au cas où g est $\tilde{\underline{\underline{A}}}_0$-mesurable. Enfin, il suffit de traiter le cas où

$$g(\omega,u) = g_0\circ Z_0(\omega)\ g_1\circ Z_{-1}(\omega)\dots g_n\circ Z_{-n}(\omega)\ h(u)$$

et il s'agit de calculer ($\tilde{E}$ désignant une espérance relative à $\tilde{\mu}$)

$$\lim_{t\to+\infty} \tilde{E}[g_0\circ Z_0\circ\Theta_t\dots g_n\circ Z_{-n}\circ\Theta_t\ h\circ\tau_t \mid \tau_0, Z_0,\dots,Z_{-k}\dots]$$

La fonction sous le signe $\tilde{E}[\ |\ ]$ vaut, si $\tau_0=u$

$$\sum_k I_{\{f_k\leqq t+u<f_{k+1}\}} g_0\circ Z_k\dots g_n\circ Z_{k-n}\ h(u+t-f_k)$$

et l'espérance en question vaut, E désignant cette fois une espérance relative à μ , et toujours si $\tau_0=u$

$$\frac{\sum_k E[I_{\{f>u\}} I_{\{f_k\leqq t+u<f_{k+1}\}} g_0\circ Z_k\dots g_n\circ Z_{k-n} h(u+t-f_k)\,|\,Z_0\dots Z_{-i}\dots]}{P\{f>u\,|\,Z_0,\dots Z_{-i}\dots\}}$$

nous commettons une très petite erreur, lorsque $t\to\infty$, en remplaçant la sommation de 0 à $+\infty$ par une sommation de n+1 à $+\infty$. Posons alors

$$Z'_0 = Z_1,\quad Z'_i=Z_{i+1}\quad ;\ V'_i=\varphi\circ Z'_i\quad ,\ V_0=\varphi\circ Z_0$$

$$S'_i = V'_0+\dots+V'_{i-1}$$

Regardons un terme du numérateur : comme $k\geqq n+1$, la quantité sous le signe $E[|]$ est indépendante de $Z_{-1}, Z_{-2}\dots$ et le terme s'écrit simplement

$$\frac{E[I_{\{V_0>u\}} I_{\{S'_{k-1}\leqq t+u-V_0<S'_k\}} g_0\circ Z'_{k-1}\dots g_n\circ Z'_{k-n-1} h(u+t-V_0-S'_{k-1})\,|\,Z_0]}{P\{V_0>u\,|\,Z_0,\dots,Z_{-i}\dots\}}$$

L'indicatrice au numérateur sort du signe $E[\ |\ ]$ et disparaît avec le dénominateur les Z'_i sont indépendantes de Z_0, de sorte que l'espérace conditionnelle devient une espérance absolue, et il reste simplement, en notant s la variable aléatoire $t+u-V_0$

$$\sum_{n+1}^{\infty} E[I_{\{S'_{k-1}\leqq s<S'_k\}} g_0\circ Z'_{k-1}\dots g_n\circ Z'_{k-n-1} h(s-S'_{k-1})]$$

Mais ceci n'est autre que (7), avec des notations un peu différentes : lorsque $t\to+\infty$, $s\to+\infty$, et nous savons que cette expression tend vers une constante, indépendante de Z_0 aussi bien que de u. Autrement dit , $\tilde{E}[g\circ\Theta_t|\tilde{\underline{\underline{A}}}_0]$ converge p.s. vers une constante, qui ne saurait être égale qu'à $<\tilde{\mu},g>$. Le théorème est établi.

REMARQUE. Si la répartition de f est arithmétique, toutes les valeurs de f sont multiples d'un nombre d>0. Considérons alors la fonction sur $\tilde{\Omega}$

$$j(\omega,u) = \exp[2\pi iu/d]$$

Nous avons alors $j\circ\Theta_t = \exp[2\pi it/d].j$, de sorte que j est invariante par Θ_d , par exemple. Mais si le flot continu $(\tilde{\Omega},\tilde{\underline{\underline{A}}},\tilde{\mu},(\Theta_t))$ est un K-flot, il en est évidemment de même du flot discret $(\tilde{\Omega},\tilde{\underline{\underline{A}}},\tilde{\mu},\Theta_d)$, et d'après le lemme 1 de l'exposé II (p.II.13) celui-ci ne peut admettre de fonctions invariantes non constantes.

BIBLIOGRAPHIE

Notre référence principale est ici l'article

TOTOKI (H.). On a class of special flows. Z.W-th. 15, 1970, p.157-167 .

Une autre référence intéressante est

GUREVIČ (B.M.). Some conditions for existence of a K-partition for special flows. Trudy Mosk. Mat. Obšč. 17, 1967.

Notre démonstration est assez différente de celle de Totoki. Le modèle de flots considéré par Totoki apparaît aussi dans les travaux (beaucoup plus difficiles !) d'Ornstein. Voir

ORNSTEIN (D.S.) . Imbedding Bernoulli shifts in flows. Contributions to ergodic theory and probability, p.178-218. Lecture Notes in Mathematics n°160, Springer 1970.