

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

CHRISTOPHE STRICKER

Mesure de Föllmer en théorie des quasimartingales

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 9 (1975), p. 408-419

http://www.numdam.org/item?id=SPS_1975__9__408_0

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

MESURE DE FÖLLMER EN THEORIE DES QUASIMARTINGALES

par C. STRICKER

Grâce à un théorème de PARTHASARATHY [1], FÖLLMER [2] a démontré qu'à toute quasimartingale $X = (X_t)_{t \geq 0}$ définie sur un "bon" espace probabilisé $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ muni d'une famille de sous-tribus $(\mathfrak{F}_t)_{t \geq 0}$ correspond une mesure signée P^X sur les ensembles prévisibles de $\Omega \times [0, +\infty]$ telle que $P^X[A \times]t, +\infty] = E[X_t \cdot A]$ pour tout $t \geq 0$ et tout $A \in \mathfrak{F}_t$.

L'objet de cet exposé est de donner une démonstration de ce résultat fondée sur la convergence vague de mesures et sur le critère de Prokhorov.

I. EXISTENCE DE MODIFICATIONS CONTINUES A DROITE DES QUASIMARTINGALES.

Considérons un espace probabilisé $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$. On ne suppose pas que la tribu \mathfrak{F} est complète.

1.1. DEFINITION. Soit $X = (X_t)_{t \in [0, +\infty]}$ un processus stochastique adapté à une famille de tribus $(\mathfrak{F}_t)_{t \geq 0}$, croissante et continue à droite, qui engendre \mathfrak{F} , tel que X_t soit intégrable pour tout t . On dit que X est une quasimartingale si :

Var $X = \sup \sum_{i=0}^{n-1} E|X_{t_{i+1}} - E[X_{t_{i+1}} | \mathfrak{F}_{t_i}]|$ est fini, le sup étant pris sur l'ensemble des suites finies :

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = +\infty .$$

Si nous posons $X_\infty = 0$, nous retrouvons la définition de FÖLLMER [2].

Dans la suite de l'exposé (X_t) désignera toujours une quasimartingale.

OREY [3] a démontré que ces processus avaient des propriétés analogues à celles des surmartingales.

1.2. LEMME. - Soit I un sous-ensemble dénombrable de \mathbb{R}^+ . Alors pour tout $\lambda \geq 0$, on a :

$$\lambda P[\sup_{i \in I} X_i \geq \lambda] \leq \text{Var } X + E|X_\infty|$$

$$\lambda P[\inf_{i \in I} X_i \leq -\lambda] \leq \text{Var } X + E|X_\infty|$$

1.3. LEMME. - Soit I un sous-ensemble dénombrable de \mathbb{R}^+ . Si $a < b$ alors l'espérance du nombre de montées de $(X_i)_{i \in I}$ sur l'intervalle $[a, b]$ est majorée par $\frac{\text{Var } X + E|X_\infty|}{b - a}$.

1.4. LEMME. - Soit $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de nombres réels positifs. Alors la famille $(X_{t_n})_{n \in \mathbb{N}}$ est uniformément intégrable.

Ces trois lemmes ont permis à FÖLLMER de démontrer le théorème suivant qui contrairement aux régularisations habituelles ne suppose pas la complétion des tribus \mathfrak{F} ou \mathfrak{F}_t .

1.5. THEOREME. - Il existe une version continue à droite de la quasimartingale X si et seulement si pour tout t_0 , $\lim_{t \downarrow t_0} E|X_t - X_{t_0}| = 0$.

Démonstration. * Le lemme 1.4 montre que l'existence d'une version continue à droite entraîne la continuité à droite dans L^1 .

* Démontrons la réciproque. Soit $H_{t,a,b}$ l'ensemble des $\omega \in \Omega$ tels que la fonction $X_r(\omega)$ ($0 \leq r \leq t$, r rationnel) soit non bornée ou traverse une infinité de fois l'intervalle $[a,b]$. $H_{t,a,b}$ appartient à \mathfrak{F}_t . Posons alors :

$$X_t^0(\omega) = \lim_{r \downarrow t} X_r(\omega) \quad (r \text{ rationnel}) \quad \text{pour } \omega \notin H_t \quad \text{et } \infty \quad \text{pour } \omega \in H_t \quad \text{où}$$

$$H_t = \bigcap_{s > t} \bigcup_{\substack{a < b \\ a, b \text{ rationnels}}} H_{s,a,b} \quad \text{est un élément de } \mathfrak{F}_t. \quad \text{Comme } H_t \text{ croît avec}$$

t , le processus X_t^0 a des trajectoires continues à droite dans $[0, +\infty[$, des limites à gauche avant d'atteindre ∞ et est adapté à \mathfrak{F}_t . De plus, les lemmes 1.2 et 1.3 montrent que $P(H_t) = 0$. Puisque X_t est continu à droite dans L^1 , $P[X_t^0 \neq X_t] = 0$ pour tout t .

1.6. Remarques. a) Comme nous n'avons pas supposé que les tribus \mathfrak{F}_t sont complètes, nous ne pouvons pas obtenir une modification continue à droite et ayant des limites à gauche en tout point t . En effet prenons : $\Omega = [0, 1]$, \mathfrak{F} tribu borélienne sur Ω , P mesure de Lebesgue, $B_i = [0, \frac{1}{2^i}]$.

Posons : \mathfrak{F}_t tribu engendrée par B_1, \dots, B_n si $\frac{n-1}{n} \leq t < \frac{n}{n+1}$

$$\mathfrak{F}_t = \mathfrak{F} \quad \text{si } t \geq 1.$$

$$X_t(\omega) = 0 \quad \text{si } \omega \notin B_n \quad \text{et } \frac{n-1}{n} \leq t < \frac{n}{n+1}$$

$$X_t(\omega) = (-1)^n \quad \text{si } \omega \in B_n \quad \text{et } \frac{n-1}{n} \leq t < \frac{n}{n+1}$$

Ce processus est continu à droite ; de plus sa variation est finie.

Cependant si X_t^0 est une modification de X_t , $X_t^0 = X_t$ sur B_n si $\frac{n-1}{n} \leq t < \frac{n}{n+1}$.

On ne peut donc pas éliminer la trajectoire $t \rightarrow X_t(0)$ qui n'a pas de limite à gauche en $t = 1$.

b) L'énoncé de FÖLLMER [2] comporte une légère erreur. Contrairement aux surmartingales, il ne suffit pas de supposer que $t \rightarrow E(X_t)$ est continue à droite. En effet prenons $\Omega = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, P la mesure de Lebesgue et $\mathfrak{F}_t = \mathfrak{F} =$ tribu borélienne sur Ω . Posons :

$$\begin{aligned} X_t &= 0 \quad \text{si } t \leq 1 \\ \left. \begin{aligned} X_t(\omega) &= 1 \quad \text{si } \omega \geq 0 \\ X_t(\omega) &= -1 \quad \text{si } \omega < 0 \end{aligned} \right\} & \text{pour } t > 1 \end{aligned}$$

On vérifie facilement que X_t est une quasimartingale et que $E(X_t) = 0$ pour $t \geq 0$. Mais il n'existe pas de modification continue à droite.

II. CONSTRUCTION DE LA MESURE DE FÖLLMER POUR DES QUASIMARTINGALES ELEMENTAIRES.

2.1. DEFINITION. - La tribu prévisible \mathfrak{P} est la tribu sur $\overline{\mathbb{R}^+} \times \Omega$ engendrée par les rectangles $]u, v] \times A$ où $A \in \mathfrak{F}_u$.

Remarquons que les tribus \mathfrak{F}_u ne sont pas complètes contrairement aux définitions classiques. Dans ce paragraphe $\overline{\Omega}$ désigne $\overline{\mathbb{R}^+} \times \Omega$.

2.2. Quasimartingales élémentaires :

Soient $0 < a \leq \infty$ et Y une variable aléatoire intégrable. Posons :

$$\begin{aligned} X_t &= 0 \quad \text{pour } t < a \\ X_t &= E[Y | \mathfrak{F}_t] \quad \text{pour } a \leq t \leq \infty . \end{aligned}$$

Ce processus est évidemment une quasimartingale.

2.3. Mesure associée à X :

Soit $\mu(]u, v] \times A) = E[(X_u - X_v) \cdot A]$ pour $A \in \mathcal{F}_u$ et $0 \leq u < v \leq \infty$

$$\mu(\{0\} \times A) = 0 \quad \text{pour } A \in \mathcal{F}_0 .$$

On obtient ainsi une mesure sur l'algèbre \mathcal{G} engendrée par les rectangles $]u, v] \times A$ ($A \in \mathcal{F}_u$), qui admet pour extension à \mathcal{P} la mesure, que nous noterons encore μ , définie par :

si (Z_t) est un processus prévisible positif, $\mu(Z) = -E(Z_a \cdot Y)$.

2.4. LEMME. - Soit $|\mu|(\bar{\Omega}) = \sup \sum_i |\mu(\bar{C}_i)|$, le sup étant pris sur l'ensemble des partitions finies de Ω dans \mathcal{G} . Alors

$$|\mu|(\bar{\Omega}) = E|E[Y | \mathcal{F}_{a-}]| .$$

Démonstration. - posons $\bar{C}_i \cap \{a\} \times \Omega = \{a\} \times A_i$. Nécessairement $A_i \in \mathcal{F}_{a-}$.

D'où

$$\begin{aligned} \sum_i |\mu(\bar{C}_i)| &= \sum_i |E[E[Y | \mathcal{F}_{a-}] \cdot A_i]| \\ &\leq E|E[Y | \mathcal{F}_{a-}]| . \end{aligned}$$

Réciproquement : soit $u < a$. Considérons la partition

$$\bar{C}_1 =]u, a] \times \{E[Y | \mathcal{F}_u] > 0\}$$

$$\bar{C}_2 =]u, a] \times \{E[Y | \mathcal{F}_u] \leq 0\}$$

$$\bar{C}_3 = \text{complémentaire de } \bar{C}_1 \cup \bar{C}_2$$

$$|\mu(\bar{C}_1)| + |\mu(\bar{C}_2)| + |\mu(\bar{C}_3)| = E|E[Y | \mathcal{F}_u]|$$

En faisant tendre u vers a , on obtient :

$$|\mu|(\bar{\Omega}) \geq E|E[Y | \mathcal{F}_{a-}]|$$

Nous avons ainsi établi la proposition suivante :

2.5. PROPOSITION. - Soit (X_t) une quasimartingale élémentaire. Il existe une mesure unique μ^X sur la tribu prévisible \mathcal{P} telle que

$$E[(X_t - X_\infty) \cdot A] = \mu^X([t, +\infty] \times A) \text{ pour } t \geq 0 \text{ et } A \in \mathcal{F}_t.$$

$$\text{De plus } |\mu^X|(\bar{\Omega}) = E |E[Y | \mathcal{F}_{a-}]|$$

On étend aisément cette proposition à une somme finie de quasimartingales élémentaires : si X^1, \dots, X^n sont des quasimartingales élémentaires et μ^1, \dots, μ^n les mesures associées, on pose $\mu^{X^1 + \dots + X^n} = \mu^1 + \mu^2 + \dots + \mu^n$ et on vérifie que si $X^1 + \dots + X^n = X'^1 + \dots + X'^n$, alors $\mu^{X^1 + \dots + X^n} = \mu^{X'^1 + \dots + X'^n}$.

Nous aimerions maintenant étendre cette proposition à des quasimartingales quelconques en approchant celles-ci par des sommes finies de quasimartingales élémentaires. Afin de pouvoir utiliser le critère de convergence étroite de Prokhorov, nous allons définir une "bonne" topologie sur $\bar{\Omega}$.

III. LA TRIBU PREVISIBLE \mathcal{P} EST UNE "BONNE" TRIBU.

3.1. Notations. - nous allons maintenant préciser l'ensemble Ω et les tribus \mathcal{F}_t . Soit (E, d) un espace métrique compact. Ω sera l'ensemble des applications continues à droite de \mathbb{R}^+ dans E . Y_t désignera la coordonnée d'indice t sur Ω la tribu engendrée par les Y_t est noté \mathcal{F} , celle qui est engendrée par les $Y_t (t \leq s)$ est notée \mathcal{F}_s^0 et $\mathcal{F}_t = \bigcap_{s > t} \mathcal{F}_s^0$.

3.2. Définition d'une topologie sur $\overline{\mathbb{R}^+ \times \Omega}$. Application à \mathcal{P} .

Considérons le système suivant de voisinages sur $\overline{\mathbb{R}^+} \times \Omega$.

$$V(0, \omega) = [0, u[\times \Omega \quad u \in \overline{\mathbb{R}^+}$$

$$V(t, \omega) =]u, v] \times \{\omega' \in \Omega, d(\omega(t_1), \omega'(t_1)) < \epsilon_1, \dots, d(\omega(t_n), \omega'(t_n)) < \epsilon_n\}$$

où $0 \leq u < t < v$ et t_1, \dots, t_n une suite de rationnels positifs strictement inférieurs à u .

$$V(\infty, \omega) =]u, +\infty] \times \{\omega' \in \Omega, d(\omega(t_1), \omega'(t_1)) < \epsilon_1, \dots, d(\omega(t_n), \omega'(t_n)) < \epsilon_n\}$$

les t_1, \dots, t_n étant choisis comme avant.

LEMME 1. - Ce système de voisinages définit une topologie à base dénombrable non séparée sur $\overline{\mathbb{R}^+} \times \Omega$. De plus \mathcal{P} est la tribu borélienne de $\overline{\mathbb{R}^+} \times \Omega$ muni de cette topologie.

Considérons la relation d'équivalence sur $\overline{\mathbb{R}^+} \times \Omega$ définie par les atomes de \mathcal{P} :

$(r, \omega) \sim (r', \omega')$ si et seulement si $r = r'$ et $\omega|_{[0, r[} = \omega'|_{[0, r[}$
(restriction de ω à $[0, r[$).

LEMME 2. - $\overline{\mathbb{R}^+} \times \Omega$ muni de la topologie quotient est un espace métrique à base dénombrable.

Démonstration. - Remarquons d'abord que $\overline{\mathbb{R}^+} \times \Omega$ muni de la topologie quotient est un espace séparé et à base dénombrable. Si on munit $\overline{\mathbb{R}^+} \times \Omega$ de la topologie produit, (la topologie de Ω étant celle induite par $E^{\mathbb{Q}^+}$), la projection canonique $p : \overline{\mathbb{R}^+} \times \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}^+} \times \Omega$ est continue. En particulier si on remplace dans la construction précédente Ω par $E^{\mathbb{Q}^+}$, il en résulte que $\overline{\mathbb{R}^+} \times E^{\mathbb{Q}^+}$ est un compact métrisable et en plongeant $\overline{\mathbb{R}^+} \times \Omega$ dans $\overline{\mathbb{R}^+} \times E^{\mathbb{Q}^+}$, nous en concluons que $\overline{\mathbb{R}^+} \times \Omega$ est métrisable.

Nous désignerons $\overline{\mathbb{R}^+} \times \Omega$ par $\overline{\Omega}$.

3.3. Régularité des mesures sur $(\bar{\Omega}, \mathcal{P})$

LEMME 1. - Ω plongé dans le compact métrisable $E^{\mathbb{Q}^+}$ est universellement mesurable et la tribu \mathcal{F} est la tribu borélienne dans ce plongement. Toute mesure bornée sur (Ω, \mathcal{F}) est alors intérieurement régulière .

Ce lemme est démontré dans MEYER [4]

LEMME 2. - Soit Γ un compact de Ω muni de la topologie précédente. Alors :

i) L'ensemble $\tilde{\Gamma}_r = \{\omega \in \Omega, \exists \omega' \in \Gamma, \omega|_{[0, r[} = \omega'|_{[0, r[}\}$ appartient à \mathcal{F}_{r-}

ii) $\bar{\Gamma}_r = \{r\} \times \tilde{\Gamma}_r$ est un compact de $\bar{\Omega}$.

Démonstration. -

i) \mathcal{F}_{r-} est la tribu borélienne sur Ω si Ω est muni de la topologie dont les ouverts sont des réunions d'ensemble du type $\{y_{t_1} \in O_1, \dots, y_{t_n} \in O_n\}$ où $t_1 < t_2 < \dots < t_n < r$ et O_1, \dots, O_n ouverts de E . Comme $\bar{\Gamma}_r$ est fermé dans cette topologie, il appartient à \mathcal{F}_{r-} .

ii) est évident.

IV. THEOREME DE FÖLLMER.

4.1. Approximation dyadique de X :

Soit X une quasimartingale continue à droite. Posons :

$$\text{Si } 0 \leq k < n 2^n : Z_t^{n,k} = \begin{cases} 0 & \text{si } t < k/2^n \\ E \left[X_{\frac{k+1}{2^n}} - X_{\frac{k}{2^n}} \mid \mathcal{F}_t \right] & \text{si } t \geq \frac{k}{2^n} \end{cases}$$

$$\text{Si } k = n 2^n \quad Z_t^{n,k} = \begin{cases} 0 & \text{si } t < n \\ E[X_\infty - X_n | \mathcal{F}_t] & \text{si } t \geq n. \end{cases}$$

Soient $X_t^n = \sum_{k=0}^{n 2^n} Z_t^{n,k}$ et μ_n la mesure associée à X_t^n .

En vertu du lemme 2.4. nous avons :

$$|\mu_n|(\bar{\Omega}) = \sum_{k=0}^{n 2^n - 1} E \left| E \left[X_{\frac{k+1}{2^n}} - X_{\frac{k}{2^n}} \mid \mathcal{F}_{\frac{k}{2^n}} \right] + E \left[X_\infty - X_n \mid \mathcal{F}_{\frac{k}{2^n}} \right] \right|$$

4.2. LEMME. - la suite $|\mu_n|(\bar{\Omega})$ croît vers $\text{Var } X$.

Démonstration. - Soient $a < b < c$. On a :

$$E |E[X_a - X_c | \mathcal{F}_{a-}]| \leq E |E[X_a - X_b | \mathcal{F}_{a-}]| + E |E[X_b - X_c | \mathcal{F}_{a-}]|$$

Or d'après l'inégalité de convexité des espérances conditionnelles :

$$E |E[X_b - X_c | \mathcal{F}_{a-}]| \leq E |E[X_b - X_c | \mathcal{F}_{b-}]|$$

d'où :

$$E |E[X_a - X_b | \mathcal{F}_{a-}]| \leq E |E[X_a - X_b | \mathcal{F}_{a-}]| + E |E[X_b - X_c | \mathcal{F}_{b-}]|$$

Ceci montre la croissance de $|\mu_n|(\bar{\Omega})$.

D'autre part, soit $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_p = +\infty$ une subdivision de $[0, \infty]$.

Prenons n assez grand pour que $\frac{1}{2^n} < \text{Min}(t_{i+1} - t_i)$.

Appelons r_k^n le premier rationnel dyadique après t_k . Alors :

$$\sum_{k=0}^{p-1} E |E[X_{r_{k+1}^n} - X_{r_k^n} | \mathcal{F}_{t_k}]| \leq |\mu_n|(\bar{\Omega}) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} |\mu_n|(\bar{\Omega})$$

Comme X_t est continu à droite,

$$\sum_{k=0}^{p-1} E|E[X_{t_{k+1}} - X_{t_k} | \mathcal{F}_{t_k}]| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{p-1} E|E[X_{r_{k+1}^n} - X_{r_k^n} | \mathcal{F}_{t_k}]| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} |\mu_n|(\bar{\Omega})$$

D'autre part, il est clair que $|\mu_n|(\bar{\Omega}) \leq \text{Var } X$. Donc $\text{Var } X = \lim_{n \rightarrow \infty} |\mu_n|(\bar{\Omega})$

4.3. Convergence de la suite μ_n vers une mesure μ .

Fixons $\epsilon > 0$. Soit n_0 tel que $|\mu_{n_0}|(\bar{\Omega}) \geq \text{Var } X - \epsilon$.

D'après le lemme 1 de 3.3. les mesures sur Ω sont intérieurement régulières. Donc il existe un compact Γ^k de Ω tel que :

$$E|E[X_{\frac{k}{2^{n_0}}} - X_{\frac{k+1}{2^{n_0}}} | \mathcal{F}_{\frac{k}{2^{n_0}}}]| \leq E|E[X_{\frac{k}{2^{n_0}}} - X_{\frac{k+1}{2^{n_0}}} | \mathcal{F}_{\frac{k}{2^{n_0}}}] \cdot \Gamma^k| + \frac{\epsilon}{n_0 2^{n_0} + 1}$$

D'après le lemme 2 de 3.3. il en résulte que si $\bar{\Gamma} = \bigcup_{0 \leq k \leq n_0} \Gamma^k$ on a $|\mu_{n_0}|(\bar{\Gamma}) \geq \text{Var } X - 2\epsilon$.

Le théorème de Prokhorov entraîne que la suite $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est étroitement relativement compacte. On peut donc en extraire une sous-suite étroitement convergente vers une mesure μ (en réalité le théorème suivant nous montrera que la suite $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ toute entière converge vers μ).

4.5. Théorème de FÖLLMER : il existe une mesure μ sur la tribu prévisible \mathcal{P} telle que :

$$(4.6) \quad E[(X_t - X_\infty) \cdot A] = \mu([t, +\infty] \times A) \quad \forall t \geq 0 \\ \forall A \in \mathcal{F}_t.$$

Démonstration. - On a $\mu_n([t, +\infty] \times A) = E[(X_t^n - X_\infty^n) \cdot A]$

$$= E[(X_{\frac{k+1}{2^n}} - X_\infty) \cdot A]$$

si $\frac{k}{2^n} \leq t < \frac{k+1}{2^n}$ et $A \in \mathfrak{F}_t$. ($k < n2^n$).

En vertu de la continuité à droite dans L^1 de $(X_t)_{t \geq 0}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[(X_t^n - X_\infty^n).A] = E[(X_t - X_\infty).A].$$

Or $\mu_n(]t, +\infty] \times A)$ tend vers $\mu(]t, +\infty] \times A)$ si la frontière du borélien n'est pas chargée par $|\mu|$. Prenons :

$$A_{\omega_0}^{\varepsilon, r} = \{\omega' \in \Omega, d(\omega_0(r), \omega'(r)) \leq \varepsilon\} \text{ où } r \in \mathbb{Q}^+ \text{ et } r < t.$$

La frontière de $]t, +\infty] \times A_{\omega_0}^{\varepsilon, r}$ est :

$$\{t\} \times A_{\omega_0}^{\varepsilon, r} \cup]t, +\infty] \times \{\omega' \in \Omega : d(\omega_0(r), \omega'(r)) = \varepsilon\}$$

Il existe alors un sous-ensemble $D \subset \mathbb{R}^2$ partout dense tel que

$|\mu|$ ne charge pas la frontière de $]t, +\infty] \times A_{\omega_0}^{\varepsilon, r}$ pour $(t, \varepsilon) \in D$.

Dans ce cas, on a :

$$E[(X_t - X_\infty).A_{\omega_0}^{\varepsilon, r}] = \mu(]t, +\infty] \times A_{\omega_0}^{\varepsilon, r})$$

Pour obtenir 4.6 il suffit d'utiliser la continuité à droite dans L^1 et de remarquer que les deux membres sont des mesures sur \mathfrak{F}_t .

4.7. COROLLAIRE. - Pour tout temps d'arrêt T et tout $A \in \mathfrak{F}_T$ on a :

$$\mu(]T, +\infty] \times A) = E[(X_T - X_\infty).A]$$

Le corollaire est démontré dans FÖLLMER.

En utilisant la décomposition de Jordan d'une mesure signée, FÖLLMER [2] a démontré que toute quasimartingale continue à droite est la différence de deux surmartingales positives, ce qui permet de ramener l'étude des quasimartingales à des mesures positives.

4.8. THEOREME. - Une surmartingale positive est de la classe D si et seulement si la mesure associée ne charge pas les ensembles évanescents.

Le théorème, dû lui aussi à FÖLLMER [2], montre qu'on ne peut pas étendre le théorème 4.5 à des tribus quelconques. Il explique en particulier pourquoi nous n'avons pas complété les tribus \mathfrak{F}_t lors des régularisation de I .

L'article de FÖLLMER [2] comporte un grand nombre d'applications de 4.5 .

REFERENCES

- [1] PARTHASARATHY, K.R. Probability measures on metric spaces,
New York - London : Academic Press (1967)

- [2] FÖLLMER, H. On the representation of semi-martingales.
The Annals of Probability, Vol 1, n° 4
580 - 589 (1973)

- [3] OREY, S. F - processes. Proc. Fifth Berkeley Symp.
Math. Statis. Prob. 2 Univ. California Press
301 - 313 (1965 - 66)

- [4] MEYER, P.A. Le retournement du temps d'après CHUNG et
WALSH. Séminaire de Prob. de Strasbourg V,
Lecture Notes in Math. vol. 191, Springer.
(1971)