Michel Émery

Primitive d'une mesure sur les compacts d'un espace métrique

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 9 (1975), p. 425-436
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1975__9__425_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1973/74

PRIMITIVE D'UNE MESURE SUR LES COMPACTS D'UN ESPACE METRIQUE

par M. EMERY

0. INTRODUCTION.

Soit (E,d) un espace métrique localement compact, dénombrable à l'infini. La formule

$$d'(K_1,K_2) = \inf(d(x,y),(x,y) \in K_1 \times K_2)$$

ne définit pas une distance sur l'ensemble $\mathcal{K}$ des compacts de E ; en revanche, la formule

$$D(K_1,K_2) = \sup(\sup_{x\in K_1} d'(x,K_2), \sup_{y\in K_2} d'(y,K_1))$$

munit $\mathcal{K}$ d'une structure d'espace métrique localement compact ($D(K,\emptyset)$ n'a pas été défini : $\emptyset$ est isolé dans $\mathcal{K}$) telle que, si $K\in\mathcal{K}, CK = \{L \in\mathcal{K}, L\subset K\}$ est un compact de $\mathcal{K}$.

A. REVUZ a donné dans [1] une caractérisation des mesures de Radon positives sur $\mathcal{K}$ à l'aide de leurs "primitives", dans un contexte beaucoup plus général que celui-ci. Ici, il est possible de parvenir plus simplement au même résultat, en montrant en particulier que les ensemble CK engendrent la tribu borélienne de $\mathcal{K}$.

Si m est une mesure de Radon positive sur $\mathcal{K}$, définissons sa "primitive" F (par analogie avec les primitives de mesures sur $\mathbb{R}$) comme étant l'application de $\mathcal{K}$ dans $\mathbb{R}_+$

$$F(K) = m(CK) .$$

Sous quelles conditions une application F de $\mathcal{K}$ dans $\mathbb{R}_+$ est-elle la primitive d' (au moins) une mesure sur $\mathcal{K}$? F détermine-t-elle alors m ?

1. LES CONDITIONS NECESSAIRES.

Comme dans le cas des mesures réelles, ces conditions sont de deux ordres : une condition de croissance, une condition de continuité à droite (les "intervalles" CK sont fermés à droite) .

La condition de croissance :

Si $K_o, L_1, \ldots, L_n$ sont des compacts de E $(n \geq 0)$, la partie

$$S = S(K_o; L_1, \ldots, L_n) = CK_o \setminus \bigcup_{i=1}^{n} CK_i$$

de $\mathcal{K}$ peut encore se mettre sous la forme (dite réduite) $S(K_o; K_1, \ldots K_p)$ où chaque K_i est inclus dans K_o et où les K_j $(j > 0)$ sont deux à deux sans relation d'inclusion (il suffit de remplacer L_i par $L_i' = L_i \cap K_o$, puis de supprimer les L_i' inclus dans un L_j' pour $j \neq i$) . Cette écriture de S est unique (à permutation des indices non nuls près) [1] puisque $K_o = \bigcup_{K \in S} K$ et que les $K_i (i > 0)$ sont les seuls compacts K de E tels que

. $K \subset K_o$

. $K \notin S$

. $\forall\, L \in \mathcal{K}\ ,\ K \subsetneq L \subset K_o \Rightarrow K \in S$.

1
Sauf pour $S = S(K_o; K_o) = S(L; L) = S(\emptyset; \emptyset) = \emptyset$.
Par convention sa forme réduite sera $S(\emptyset; \emptyset)$.
Remarquer que $S(K_o) = CK_o$; $S(\emptyset) = \{\emptyset\} \neq \emptyset$.

La classe des parties S de $\mathcal{K}$ est notée $\mathcal{S}$. Comme les CK sont des compacts de $\mathcal{K}$, $\mathcal{S}$ est incluse dans la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathcal{K})$ de $\mathcal{K}$.

Donnons-nous maintenant une mesure positive sur $(\mathcal{K},\mathcal{B}(\mathcal{K}))$.

Si $S = S(K_o;K_1,\ldots K_n)$ est écrit sous forme réduite, la formule de Poincaré permet d'écrire, en utilisant $\bigcap_{i\in I} CK_i = C(\bigcap_{i\in I} K_i)$, que

$$(*) \qquad m(S) = \sum_{j\subset[1,n]} (-1)^{|J|} F(\bigcap_{j\in j\cup\{0\}} K_j)$$

où F est la primitive de m .

Si l'on appelle "accroissement de F sur S " (noté $\Delta F(S)$) le deuxième membre de $(*)$, une condition nécessaire pour qu'une fonction F soit une primitive est que

$$\forall S \in \mathcal{S} , \Delta F(S) \geq 0 .$$

Remarquons que l'expression de ΔF peut être aussi bien calculée à partir d'une forme non réduite de S . En introduisant par exemple L dans la détermination, avec $L\cap K_o \subset K_1 \cap K_o$, on augmente $\Delta F(S)$ de la quantité

$$\sum_{J\subset[2,n]} (-1)^{|J|}[F(K_1\cap L\cap \bigcap_{J\cup\{0\}} K_j) - F(L\cap \bigcap_{J\cup\{0\}} K_j)] = 0 .$$

La condition de continuité à droite.

Si F est la primitive d'une mesure m sur $\mathcal{K}$, pour toute suite décroissante de compacts $(K_n, n \in \mathbb{N})$, les ensembles $C K_n$ décroissent vers $C(\bigcap_n K_n)$, et $F(K_n)$ vers $F(\bigcap_n K_n)$.

Remarquons que cette continuité à droite s'exprime également avec la topologie de $\mathcal{K}$. En effet, si $(K_n, n \in \mathbb{N})$ est une suite décroissante de compacts d'intersection K , $\lim_n K_n = K$.

Démonstration. - Pour $x \in K$, $d'(x,K_n) = 0$, et

$$D(K,K_n) = \sup_{x \in K_n} d'(x,K)$$

Soit alors $\varepsilon > 0$; la suite de compacts

$$K_n \cap \{ x \in E \, , \, d'(x,K) \geq \varepsilon \}$$

est vide à partir d'un certain rang, et, pour n assez grand,

$$\sup_{x \in K_n} d'(x,K) < \varepsilon \quad . \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

2. CES CONDITIONS SONT SUFFISANTES.

Soit F une application de $\mathcal{K}$ dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant les deux conditions ci-dessus :

$$\forall\, S \in \mathcal{S} \, , \, \Delta F(S) \geq 0$$

$$K_n \searrow K \Rightarrow F(K_n) \searrow F(K) \; .$$

Ce paragraphe établit qu'alors il existe une - et une seule - mesure sur $\mathcal{K}$ de primitive F .

a) Cas où E est compact.

Alors la classe $\mathcal{S}$ est une semi-algèbre de Boole (voir [2]) .

En effet ,

. $\mathcal{K} = C\,E \in \mathcal{S}$; $\emptyset \in \mathcal{S}$;

. Stabilité par intersection finie :

$$S(K_o;K_1,\dots,K_n) \cap S(L_o,L_1,\dots,L_p) = S(K_o \cap L_o;\, K_1,\dots,K_n,L_1,\dots,L_p)$$

. Si $S \in \mathcal{S}$, $S^c = \mathcal{K} - S$ est union finie disjointe d'éléments de $\mathcal{S}$:

Soit $S(K_o,K_1,\dots,K_n)$ la forme réduite de S .

Alors S^c est l'union disjointe de $(CK_o)^c$ et des

$$CK_i \setminus \bigcup_{\ell=1}^{i-1} CK_\ell \ (i = 1,\dots,n) \ .$$

Mais

$$(CK_o)^c = S(E;K_o)$$

$$CK_i \setminus \bigcup_{\ell=1}^{i=1} CK_\ell = S(K_i;K_1,\dots,K_{i-1})$$

Si l'on pose, pour $S \in \mathcal{S}$, $m(S) = \Delta F(S)$, il suffit d'établir que m est σ - additive ou $\mathcal{S}$ pour affirmer l'existence et l'unicité du prolongement de m à $\sigma(\mathcal{S})$ (voir [2]) .

Additivité deux à deux de m .

Soient, écrits sous forme réduite :

$$S = S(K_o,K_1,\dots,K_m) \ ,$$

$$S' = S(K;L,M_i,\dots,M_n),$$

et

$$S'' = S(M_o;M_{n+1},\dots,M_p)$$

tels que $S = S' \cup S''$ avec $S' \cap S'' = \emptyset$.

Alors K_o est élément de S' par exemple, et $K_o \subset K$ d'où $K_o = K$. L'élément M_o de S'' est inclus dans K sans appartenir à S' : il est inclus, par exemple, dans L . Mais

$$\left.\begin{array}{l} M_o \subset L \subset K \\ M_o \in S \\ K \in S \end{array}\right\} \Rightarrow L \in S \quad (\text{"convexité" de } S)$$

d'où $L \in S''$ et $M_o = L$. On peut donc écrire

$$S = S(K;M_1,\dots,M_p) .$$

De plus, $\forall_i \in [1,n], \exists j \in [n+1,\dots,p] \quad M_i \cap L \subset M_j$,

car sinon $M_i \cap L$ serait dans S'' , donc dans S , et, par convexité, M_i serait également dans S , donc dans S'' , donc inclus dans L , ce qui est impossible.

D'où

$$S' = S(K;L,M_1,\dots,M_p)$$

$$S'' = S(L;M_1,\dots,M_p)$$

Sous ces trois nouvelles formes, l'additivité

$$\Delta F(S) = \Delta F(S') + \Delta F(S'')$$

se vérifie immédiatement.

<u>Additivité finie de</u> m .

Soit $S = \bigcup_{i=1}^{n} S_i$, $S_i \cap S_j = \emptyset$ pour $i \neq j$.

Parmi les plus grands éléments K_o^i des S_i , il en existe au moins un, par exemple K_o^1 , qui n'en contient aucun autre; le même raisonnement que ci-dessus fournit $S - S_1 \in \mathcal{S}$, d'où , par récurrence, l'additivité finie.

Remarquons que l'on sait déjà, à ce stade, que m se prolonge en une mesure simplement additive sur l'algèbre de Boole engendrée par $\mathcal{S}$. La croissance de m sur cette algèbre sera utilisée pour démontrer la σ- additivité .

σ - Additivité de m .

LEMME. - Soient $S \in \mathcal{S}$; $\varepsilon > 0$. Il existe alors $S' \in \mathcal{S}$, tel que $S \subset \overset{\circ}{S}$ et $\Delta F(S') - \Delta F(S) < \varepsilon$.

Démonstration. - La forme réduite de S étant $S(K_o;\dots,K_n)$, il existe $\partial > 0$ tel que pour tout compact K ,

$$K \supset K_o \; ; \; D(K,K_o) \le \partial \Rightarrow F(K) - F(K_o) < \varepsilon \; .$$

Soit alors $L = \{ x \in E \, , \, d'(x,K_o) \le \partial \}$, et posons

$$S' = S(L;K_1,\dots,K_n) \; .$$

On a bien $\Delta F(S') - \Delta F(S) < \varepsilon$, et, pour tout $K \in S$, soient $x_i (i = 1,\dots,n)$ des éléments respectifs de $K \setminus K_i$.

Posons
$$\rho_1 = \frac{1}{2} \inf \, (d'(x_i,K_i), \; i = 1,\dots,n) > 0 \; ,$$

$$\rho = \inf \, (\rho_1,\partial) \; .$$

Si $K' \in \mathcal{K}$ avec $D(K,K') < \rho$,

- $d'(x_i,K') \le D(K,K') \le \rho < d'(x_i,K_i)$, d'où $K' \not\subset K_i$;

- $D(K_o,K' \cup K_o) < \rho \le \partial$, d'où $K' \subset L$,

et $K' \in S'$, ce qui établit $S \subset \overset{\circ}{S'}$. C.Q.F.D.

Soit alors $S = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$, $S_i \cap S_j = \emptyset$ pour $i \neq j$, la forme réduite de S étant $S(K_o,K_1,\dots,K_n)$, et soit $\varepsilon > 0$.

Le lemme appliqué à $CK_i (1 \leq i \leq n)$ fournit des compacts $L_i \supset K_i$ tels que $m(S - S(K_o, L_1, \ldots, L_n)) < n\,\epsilon$, et que S contienne l'adhérence de $S(K_o; L_1, \ldots, L_n)$.

En appliquant maintenant le lemme à chacun des couples $(S_i, \frac{\epsilon}{2^i})$, on obtient des éléments S_i' dont les intérieurs recouvrent le compact $\mathrm{adh}(S(K_o; L_1, \ldots L_n))$. Donc il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que

$$S(K_o; L_1, \ldots L_n) \subset \bigcup_{i=1}^{p} S_i' ,$$

et

$$m(\bigcup_{i=1}^{p} S_i') \geq m(S(K_o; L_1, \ldots L_n)) \geq m(S) - n\,\epsilon \ .$$

On peut alors écrire :

$$m(\bigcup_{i=1}^{p} S_i) = \sum_{i=1} m(S_i) \geq \sum_{i=1}^{p} (S_i') - \frac{\epsilon}{2^i})$$

$$\geq m(\bigcup_{i=1}^{p} S_i') - \epsilon \geq m(S) - (n+1)\,\epsilon ,$$

ce qui établit la σ-additivité de m sur $\mathcal{S}$.

Toute application F de $\mathcal{K}$ dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant les deux conditions de croissance et de continuité à droite est donc la primitive d'une mesure et une seule sur $\sigma(\mathcal{S})$.

Avant d'établir que $\mathcal{S}$ engendre la tribu borélienne de $\mathcal{K}$, montrons que le résultat obtenu subsiste lorsque E n'est pas compact.

b) <u>Cas général</u>.

Soit $(K_n)_{n \geq 0}$ une suite croissante de compacts qui recouvre E . En appliquant le cas a) à chacun des espaces $\mathcal{K}_n = CK_n$, on peut, à partir de F , définir une suite compatible de mesures m_n sur $\mathcal{K}_n$ (la restriction à K_n de m_{n+1} est m_n) . Il reste alors à poser, pour $A \in \sigma(\mathcal{S})$,

$$m(A) = \lim_n \uparrow m_n(A \cap K_n) ,$$

pour obtenir une mesure simplement additive sur $\sigma(\mathcal{S})$ (la vérification est immédiate).

En fait, m est σ-additive, car si $A_p \uparrow A$, avec $A_p \in \sigma(\mathcal{S})$, $A \in \sigma(\mathcal{S})$,

$$\begin{aligned}\lim_p \uparrow m(A_p) &= \lim_p \uparrow \lim_n \uparrow m_n(A_p \cap K_n) \\ &= \lim_n \uparrow \lim_p \uparrow m_n(A_p \cap K_n) \\ &= \lim_n \uparrow m_n(A \cap K_n) \quad (\sigma\text{-additivité de } m_n) \\ &= m(A)\end{aligned}$$

c) <u>La mesure</u> m <u>est une mesure borélienne.</u>

Pour $r>0$, $x \in E$, $K \in \mathcal{K}$, on notera

$$b(x,r) = \{y \in E ,\ d(x,y) < r\}$$

$$B(K,r) = \{L \in \mathcal{K} ,\ D(K,L) < r\} .$$

LEMME. - <u>Tout point</u> $K \in \mathcal{K}$ <u>admet une base de voisinages</u> (dans $\mathcal{K}$) <u>formée d'ensembles</u> $S \in \mathcal{S}$.

<u>Démonstration</u>. - Soient $K \in \mathcal{K}$, $\varepsilon > 0$. Il existe un compact L contenant K tel que $D(K,L) < \varepsilon$ et que K soit inclus dans L° (Recouvrir K par des boules ouvertes relativement compactes de rayon plus petit que ε).

Quand x décrit K, les boules $b(x,2\varepsilon)$ forment un recouvrement de L, d'où l'on extrait un sous-recouvrement fini : les boules de centre $x_1,\dots,x_n$.

Posons alors

$$S = \{K' \in \mathcal{K} \ , \ K' \subset L \ , \ K' \cap b(x_i, 2\varepsilon) \neq \emptyset \quad \forall_i = 1,\dots,n\}$$

$$= CL - \bigcup_{i=1}^{n} C(L \cap b^c(x_i, 2\varepsilon)) \in \mathcal{S} \ .$$

Les x_i étant choisis dans K, K est élément de S.

Soit $K' \in S$.

$$\forall x \in K \ , \ d'(x,K') < 4\varepsilon \ ,$$

$$\forall x \in K', \ d'(x,K) \leq \varepsilon \ ,$$

d'où $K' \in B(K, 4\varepsilon)$, c'est-à dire

$$S \subset B(K, 4\varepsilon) \ .$$

D'autre part, soit K' tel que $D(K,K') < D(K,L)$.

$$\forall x \in K' \ d'(x,K) < D(K,L) \quad \text{d'où} \quad K' \subset L$$

$$\forall i \in [1,\dots,n] \ d'(x_i,K') < \varepsilon \ , \ \text{d'où} \ K \cap b(x_i, 2\varepsilon) \neq \emptyset \ .$$

On en déduit $K' \in S$, et, en définitive,

$$K \in B(K, D(K,L)) \subset \overset{\circ}{S} \subset S \subset B(K, 4\varepsilon) \ ,$$

ce qui démontre le lemme. C.Q.F.D.

Considérons maintenant un compact $\mathcal{L}$ de l'espace $\mathcal{K}$; soit $n > 0$. Pour tout $K \in \mathcal{L}$, le lemme permet de construire $S \in \mathcal{S}$ tel que

$$K \in \overset{\circ}{S} \subset S \subset B\left(K, \frac{1}{n}\right) \ .$$

Lorsque K décrit $\mathcal{L}$, les $\overset{\circ}{S}$ ainsi construits recouvrent $\mathcal{L}$, et un nombre fini d'entre eux $(\overset{\circ}{S}_1,\dots,\overset{\circ}{S}_{p_n})$ également. Si U_n est l'union des S_i,

$$\mathcal{L} \subset U_n \in \sigma(\mathcal{S})$$

$$\sup_{K \in U_n} D'(K,\mathcal{L}) < \frac{1}{n}$$

Le compact $\mathcal{L}$ est donc l'intersection des U_n , et il est élément de la tribu $\sigma(\mathcal{S})$, qui coïncide alors avec la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathcal{K})$ de $\mathcal{K}$.

Ceci achève de démontrer le

THEOREME (A. REVUZ) :

La formule $m(CK) = F(K) \quad \forall\, K \in \mathcal{K}$ établit une bijection entre les mesures positives sur $\mathcal{K}$ qui sont finies sur les compacts et les applications de $\mathcal{K}$ dans $\mathbb{R}_+$ telles que

$$.\ \forall\, S \in \mathcal{S},\ \Delta F(S) \geq 0$$

et continues à droite.

En outre, si m et F sont en correspondance, pour tout $S \in \mathcal{S}$, on a l'égalité $m(S) = \Delta F(S)$.

3. EXEMPLES ET APPLICATIONS.

a) Soit μ une mesure sur E .

Alors μ est également la primitive d'une mesure μ' sur $\mathcal{K}$, telle que

$$\mu'(\{K \in \mathcal{K} \text{ , card } K \neq 1\}) = 0 \text{ ,}$$

et qui s'identifie de façon évidente à μ sur l'ensemble des compacts ponctuels.

b) Si F est la primitive d'une mesure m , et si φ est une application de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ absolument croissante (i.e. continue à droite en 0 , C^∞ sur $]0,+\infty[$, et $\varphi^{(n)} \geq 0$) , alors $\varphi \circ F$ est encore une primitive (Démonstration laissée au lecteur) .

c) Par exemple, en notant λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$, l'application

$$K \longrightarrow e^{\lambda(K)}$$

est la primitive d'une mesure m sur l'espace des compacts de $\mathbb{R}^d$, invariante sous le groupe des déplacements (faire opérer ce groupe sur les compacts !) . Cette mesure peut être rapprochée de la mesure de comptage sur $\mathcal{P}(E)$, où E est un ensemble fini, qui est telle que, pour $K \in \mathcal{P}(E)$,

$$m(\{K' \in \mathcal{P}(E)\ ,\ K' \subset K\}) = 2^{\lambda(K)}$$

où λ est la mesure de comptage sur E .

REFERENCES

[1] A. REVUZ — Fonctions croissantes et mesures sur les espaces topologiques ordonnés (Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 6 - 1955-56)

[2] J. NEVEU — Bases mathématiques du calcul des probabilités (Masson, 1970) .