

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

MICHEL ÉMERY

Primitive d'une mesure sur les compacts d'un espace métrique

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 9 (1975), p. 425-436

http://www.numdam.org/item?id=SPS_1975__9__425_0

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

PRIMITIVE D'UNE MESURE
SUR LES COMPACTS D'UN ESPACE METRIQUE

par M. EMERY

0. INTRODUCTION.

Soit (E, d) un espace métrique localement compact, dénombrable à l'infini. La formule

$$d'(K_1, K_2) = \inf(d(x, y), (x, y) \in K_1 \times K_2)$$

ne définit pas une distance sur l'ensemble \mathcal{K} des compacts de E ; en revanche, la formule

$$D(K_1, K_2) = \sup_{x \in K_1} (\sup_{y \in K_2} d(x, y)), \sup_{y \in K_2} (\sup_{x \in K_1} d(x, y))$$

munit \mathcal{K} d'une structure d'espace métrique localement compact $(D(K, \phi))$ n'a pas été défini : ϕ est isolé dans \mathcal{K} telle que, si $K \in \mathcal{K}, CK = \{L \in \mathcal{K}, L \subseteq K\}$ est un compact de \mathcal{K} .

A. REVUZ a donné dans [1] une caractérisation des mesures de Radon positives sur \mathcal{K} à l'aide de leurs "primitives", dans un contexte beaucoup plus général que celui-ci. Ici, il est possible de parvenir plus simplement au même résultat, en montrant en particulier que les ensemble CK engendrent la tribu borélienne de \mathcal{K} .

Si m est une mesure de Radon positive sur \mathcal{K} , définissons sa "primitive" F (par analogie avec les primitives de mesures sur \mathbb{R}) comme étant l'application de \mathcal{K} dans \mathbb{R}_+

$$F(K) = m(CK) .$$

Sous quelles conditions une application F de \mathcal{K} dans \mathbb{R}_+ est-elle la primitive d' (au moins) une mesure sur \mathcal{K} ? F détermine-t-elle alors m ?

1. LES CONDITIONS NECESSAIRES.

Comme dans le cas des mesures réelles, ces conditions sont de deux ordres : une condition de croissance, une condition de continuité à droite (les "intervalles" CK sont fermés à droite) .

La condition de croissance :

Si K_0, L_1, \dots, L_n sont des compacts de E ($n \geq 0$), la partie

$$S = S(K_0; L_1, \dots, L_n) = CK_0 \setminus \bigcup_{i=1}^n CK_i$$

de \mathcal{K} peut encore se mettre sous la forme (dite réduite) $S(K_0; K_1, \dots, K_p)$ où chaque K_i est inclus dans K_0 et où les K_j ($j > 0$) sont deux à deux sans relation d'inclusion (il suffit de remplacer L_i par $L_i' = L_i \cap K_0$, puis de supprimer les L_i' inclus dans un L_j' pour $j \neq i$) . Cette écriture de S est unique (à permutation des indices non nuls près) ¹ puisque $K_0 = \bigcup_{K \in S} K$ et que les K_i ($i > 0$) sont les seuls compacts K de E tels que

$$. K \subset K_0$$

$$. K \notin S$$

$$. \forall L \in \mathcal{K}, K \not\subset L \subset K_0 \Rightarrow K \in S .$$

1

Sauf pour $S = S(K_0; K_0) = S(L; L) = S(\emptyset; \emptyset) = \emptyset$.

Par convention sa forme réduite sera $S(\emptyset; \emptyset)$.

Remarquer que $S(K_0) = CK_0$; $S(\emptyset) = \{\emptyset\} \neq \emptyset$.

La classe des parties S de \mathcal{X} est notée \mathcal{S} . Comme les CK sont des compacts de \mathcal{X} , \mathcal{S} est incluse dans la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ de \mathcal{X} .

Donnons-nous maintenant une mesure positive sur $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$.

Si $S = S(K_0; K_1, \dots, K_n)$ est écrit sous forme réduite, la formule de Poincaré permet d'écrire, en utilisant $\bigcap_{i \in I} CK_i = C(\bigcap_{i \in I} K_i)$, que

$$(*) \quad m(S) = \sum_{j \subset [1, n]} (-1)^{|j|} F\left(\bigcap_{j \in j \cup \{0\}} K_j\right)$$

où F est la primitive de m .

Si l'on appelle "accroissement de F sur S " (noté $\Delta F(S)$) le deuxième membre de $(*)$, une condition nécessaire pour qu'une fonction F soit une primitive est que

$$\forall S \in \mathcal{S}, \Delta F(S) \geq 0.$$

Remarquons que l'expression de ΔF peut être aussi bien calculée à partir d'une forme non réduite de S . En introduisant par exemple L dans la détermination, avec $L \cap K_0 \subset K_1 \cap K_0$, on augmente $\Delta F(S)$ de la quantité

$$\sum_{j \subset [2, n]} (-1)^{|j|} [F(K_1 \cap L \cap \bigcap_{j \in j \cup \{0\}} K_j) - F(L \cap \bigcap_{j \in j \cup \{0\}} K_j)] = 0.$$

La condition de continuité à droite.

Si F est la primitive d'une mesure m sur \mathcal{X} , pour toute suite décroissante de compacts $(K_n, n \in \mathbb{N})$, les ensembles CK_n décroissent vers $C(\bigcap_n K_n)$, et $F(K_n)$ vers $F(\bigcap_n K_n)$.

Remarquons que cette continuité à droite s'exprime également avec la topologie de \mathcal{X} . En effet, si $(K_n, n \in \mathbb{N})$ est une suite décroissante de compacts d'intersection K , $\lim_n K_n = K$.

Démonstration. - Pour $x \in K$, $d'(x, K_n) = 0$, et

$$D(K, K_n) = \sup_{x \in K_n} d'(x, K)$$

Soit alors $\epsilon > 0$; la suite de compacts

$$K_n \cap \{x \in E, d'(x, K) \geq \epsilon\}$$

est vide à partir d'un certain rang, et, pour n assez grand,

$$\sup_{x \in K_n} d'(x, K) < \epsilon \quad . \quad \text{C.Q.F.D.}$$

2. CES CONDITIONS SONT SUFFISANTES.

Soit F une application de \mathcal{K} dans \mathbb{R}_+ vérifiant les deux conditions ci-dessus :

$$\forall S \in \mathcal{S}, \Delta F(S) \geq 0$$

$$K_n \searrow K \Rightarrow F(K_n) \searrow F(K) \text{ .}$$

Ce paragraphe établit qu'alors il existe une - et une seule - mesure sur \mathcal{K} de primitive F .

a) Cas où E est compact.

Alors la classe \mathcal{S} est une semi-algèbre de Boole (voir [2]) .

En effet ,

$$\cdot \mathcal{K} = \mathcal{C} \text{ E } \in \mathcal{S} ; \emptyset \in \mathcal{S} ;$$

. Stabilité par intersection finie :

$$S(K_0; K_1, \dots, K_n) \cap S(L_0, L_1, \dots, L_p) = S(K_0 \cap L_0; K_1, \dots, K_n, L_1, \dots, L_p)$$

. Si $S \in \mathfrak{S}$, $S^c = \mathcal{K} - S$ est union finie disjointe d'éléments de \mathfrak{S} :

Soit $S(K_0, K_1, \dots, K_n)$ la forme réduite de S .

Alors S^c est l'union disjointe de $(CK_0)^c$ et des

$$CK_i \setminus \bigcup_{\ell=1}^{i-1} CK_\ell \quad (i = 1, \dots, n).$$

Mais

$$(CK_0)^c = S(E; K_0)$$

$$CK_i \setminus \bigcup_{\ell=1}^{i-1} CK_\ell = S(K_i; K_1, \dots, K_{i-1})$$

Si l'on pose, pour $S \in \mathfrak{S}$, $m(S) = \Delta F(S)$, il suffit d'établir que m est σ -additive ou \mathfrak{S} pour affirmer l'existence et l'unicité du prolongement de m à $\sigma(\mathfrak{S})$ (voir [2]).

Additivité deux à deux de m .

Soient, écrits sous forme réduite :

$$S = S(K_0, K_1, \dots, K_m),$$

$$S' = S(K; L, M_1, \dots, M_n),$$

et

$$S'' = S(M_0; M_{n+1}, \dots, M_p)$$

tels que $S = S' \cup S''$ avec $S' \cap S'' = \emptyset$.

Alors K_0 est élément de S' par exemple, et $K_0 \subset K$ d'où $K_0 = K$. L'élément M_0 de S'' est inclus dans K sans appartenir à S' : il est inclus, par exemple, dans L . Mais

$$\left. \begin{array}{l} M_0 \subset L \subset K \\ M_0 \in S \\ K \in S \end{array} \right\} \Rightarrow L \in S \quad (\text{"convexité" de } S)$$

d'où $L \in S''$ et $M_0 = L$. On peut donc écrire

$$S = S(K; M_1, \dots, M_p) .$$

De plus, $\forall i \in [1, n], \forall j \in [n+1, \dots, p] \quad M_i \cap L \subset M_j$,

car sinon $M_i \cap L$ serait dans S'' , donc dans S , et, par convexité, M_i serait également dans S , donc dans S'' , donc inclus dans L , ce qui est impossible.

D'où

$$S' = S(K; L, M_1, \dots, M_p)$$

$$S'' = S(L; M_1, \dots, M_p)$$

Sous ces trois nouvelles formes, l'additivité

$$\Delta F(S) = \Delta F(S') + \Delta F(S'')$$

se vérifie immédiatement.

Additivité finie de m .

Soit $S = \bigcup_{i=1}^n S_i$, $S_i \cap S_j = \emptyset$ pour $i \neq j$.

Parmi les plus grands éléments K_O^i des S_i , il en existe au moins un, par exemple K_O^1 , qui n'en contient aucun autre; le même raisonnement que ci-dessus fournit $S - S_1 \in \mathcal{S}$, d'où, par récurrence, l'additivité finie.

Remarquons que l'on sait déjà, à ce stade, que m se prolonge en une mesure simplement additive sur l'algèbre de Boole engendrée par \mathcal{S} . La croissances de m sur cette algèbre sera utilisée pour démontrer la σ -additivité.

σ -Additivité de m .

LEMME. - Soient $S \in \mathcal{S}$; $\epsilon > 0$. Il existe alors $S' \in \mathcal{S}$, tel que $S \subset S'$ et $\Delta F(S') - \Delta F(S) < \epsilon$.

Démonstration. - La forme réduite de S étant $S(K_0; \dots, K_n)$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout compact K ,

$$K \supset K_0; D(K, K_0) \leq \delta \Rightarrow F(K) - F(K_0) < \epsilon.$$

Soit alors $L = \{x \in E, d'(x, K_0) \leq \delta\}$, et posons

$$S' = S(L; K_1, \dots, K_n).$$

On a bien $\Delta F(S') - \Delta F(S) < \epsilon$, et, pour tout $K \in S$, soient $x_i (i = 1, \dots, n)$ des éléments respectifs de $K \setminus K_i$.

Posons
$$\rho_1 = \frac{1}{2} \inf (d'(x_i, K_i), i = 1, \dots, n) > 0,$$

$$\rho = \inf (\rho_1, \delta).$$

Si $K' \in \mathcal{K}$ avec $D(K, K') < \rho$,

$$d'(x_i, K') \leq D(K, K') < \rho < d'(x_i, K_i),$$

d'où $K' \not\subset K_i$;

$$D(K_0, K' \cup K_0) < \rho \leq \delta,$$

d'où $K' \subset L$,

et $K' \in S'$, ce qui établit $S \subset S'$.

C.Q.F.D.

Soit alors $S = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$, $S_i \cap S_j = \emptyset$ pour $i \neq j$, la forme réduite de S étant $S(K_0, K_1, \dots, K_n)$, et soit $\epsilon > 0$.

Le lemme appliqué à $CK_i (1 \leq i \leq n)$ fournit des compacts $L_i \supset K_i$ tels que $m(S - S(K_0, L_1, \dots, L_n)) < n \epsilon$, et que S contienne l'adhérence de $S(K_0; L_1, \dots, L_n)$.

En appliquant maintenant le lemme à chacun des couples $(S_i, \frac{\epsilon}{2^i})$, on obtient des éléments $S_i^!$ dont les intérieurs recouvrent le compact $\text{adh}(S(K_0; L_1, \dots, L_n))$. Donc il existe $P \in \mathbb{N}$ tel que

$$S(K_0; L_1, \dots, L_n) \subset \bigcup_{i=1}^P S_i^!,$$

et

$$m\left(\bigcup_{i=1}^P S_i^!\right) \geq m(S(K_0; L_1, \dots, L_n)) \geq m(S) - n \epsilon.$$

On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} m\left(\bigcup_{i=1}^P S_i\right) &= \sum_{i=1}^P m(S_i) \geq \sum_{i=1}^P (S_i^!) - \frac{\epsilon}{2^i} \\ &\geq m\left(\bigcup_{i=1}^P S_i^!\right) - \epsilon \geq m(S) - (n+1) \epsilon, \end{aligned}$$

ce qui établit la σ -additivité de m sur \mathcal{S} .

Toute application F de \mathcal{K} dans \mathbb{R}_+ vérifiant les deux conditions de croissance et de continuité à droite est donc la primitive d'une mesure et une seule sur $\sigma(\mathcal{S})$.

Avant d'établir que \mathcal{S} engendre la tribu borélienne de \mathcal{K} , montrons que le résultat obtenu subsiste lorsque E n'est pas compact.

b) Cas général.

Soit $(K_n)_{n \geq 0}$ une suite croissante de compacts qui recouvre E . En appliquant le cas a) à chacun des espaces $\mathcal{K}_n = CK_n$, on peut, à partir de F , définir une suite compatible de mesures m_n sur \mathcal{K}_n (la restriction à K_n de m_{n+1} est m_n). Il reste alors à poser, pour $A \in \sigma(\mathcal{S})$,

$$m(A) = \lim_n \uparrow m_n(A \cap K_n),$$

pour obtenir une mesure simplement additive sur $\sigma(\mathcal{S})$ (la vérification est immédiate).

En fait, m est σ -additive, car si $A_p \uparrow A$, avec $A_p \in \sigma(\mathcal{S})$, $A \in \sigma(\mathcal{S})$,

$$\begin{aligned} \lim_p \uparrow m(A_p) &= \lim_p \uparrow \lim_n \uparrow m_n(A_p \cap K_n) \\ &= \lim_n \uparrow \lim_p \uparrow m_n(A_p \cap K_n) \\ &= \lim_n \uparrow m_n(A \cap K_n) \quad (\sigma\text{-additivité de } m_n) \\ &= m(A) \end{aligned}$$

c) La mesure m est une mesure borélienne.

Pour $r > 0$, $X \in E$, $K \in \mathcal{K}$, on notera

$$b(x,r) = \{y \in E, d(x,y) < r\}$$

$$B(K,r) = \{L \in \mathcal{K}, D(K,L) < r\}.$$

LEMME. - Tout point $K \in \mathcal{K}$ admet une base de voisinages (dans \mathcal{K}) formée d'ensembles $S \in \mathcal{S}$.

Démonstration. - Soient $K \in \mathcal{K}$, $\epsilon > 0$. Il existe un compact L contenant K tel que $D(K,L) < \epsilon$ et que K soit inclus dans L° (Recouvrir K par des boules ouvertes relativement compactes de rayon plus petit que ϵ).

Quand x décrit K , les boules $b(x, 2\epsilon)$ forment un recouvrement de L , d'où l'on extrait un sous-recouvrement fini : les boules de centre x_1, \dots, x_n .

Posons alors

$$\begin{aligned} S &= \{K' \in \mathcal{K}, K' \subset L, K' \cap b(x_i, 2\epsilon) \neq \emptyset \quad \forall i = 1, \dots, n\} \\ &= CL - \bigcup_{i=1}^n C(L \cap b^c(x_i, 2\epsilon)) \in \mathcal{S}. \end{aligned}$$

Les x_i étant choisis dans K , K est élément de S .

Soit $K' \in S$.

$$\forall x \in K, d'(x, K') < 4\epsilon,$$

$$\forall x \in K', d'(x, K) \leq \epsilon,$$

d'où $K' \in B(K, 4\epsilon)$, c'est-à-dire

$$S \subset B(K, 4\epsilon).$$

D'autre part, soit K' tel que $D(K, K') < D(K, L)$.

$$\forall x \in K' \quad d'(x, K) < D(K, L) \quad \text{d'où} \quad K' \subset L$$

$$\forall i \in [1, \dots, n] \quad d'(x_i, K') < \epsilon, \quad \text{d'où} \quad K \cap b(x_i, 2\epsilon) \neq \emptyset.$$

On en déduit $K' \in S$, et, en définitive,

$$K \in B(K, D(K, L)) \subset \overset{\circ}{S} \subset S \subset B(K, 4\epsilon),$$

ce qui démontre le lemme.

C.Q.F.D.

Considérons maintenant un compact \mathcal{I} de l'espace \mathcal{K} ; soit $n > 0$.

Pour tout $K \in \mathcal{I}$, le lemme permet de construire $S \in \mathcal{S}$ tel que

$$K \in \overset{\circ}{S} \subset S \subset B\left(K, \frac{1}{n}\right).$$

Lorsque K décrit \mathcal{I} , les $\overset{\circ}{S}$ ainsi construits recouvrent \mathcal{I} , et un nombre fini d'entre eux $(\overset{\circ}{S}_1, \dots, \overset{\circ}{S}_p)$ également. Si U_n est l'union des S_i ,

$$\mathcal{I} \subset \bigcup_n \sigma(\mathcal{S})$$

$$\sup_{K \in \mathcal{U}_n} D'(K, \mathcal{I}) < \frac{1}{n}$$

Le compact \mathcal{I} est donc l'intersection des \mathcal{U}_n , et il est élément de la tribu $\sigma(\mathcal{S})$, qui coïncide alors avec la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathcal{K})$ de \mathcal{K} .

Ceci achève de démontrer le

THEOREME (A. REVUZ) :

La formule $m(\mathcal{C}K) = F(K) \quad \forall K \in \mathcal{K}$ établit une bijection entre les mesures positives sur \mathcal{K} qui sont finies sur les compacts et les applications de \mathcal{K} dans \mathbb{R}_+ telles que

$$\cdot \quad \forall S \in \mathcal{S}, \Delta F(S) \geq 0$$

et continues à droite.

En outre, si m et F sont en correspondance, pour tout $S \in \mathcal{S}$, on a l'égalité $m(S) = \Delta F(S)$.

3. EXEMPLES ET APPLICATIONS.

a) Soit μ une mesure sur E .

Alors μ est également la primitive d'une mesure μ' sur \mathcal{K} , telle que

$$\mu'(\{K \in \mathcal{K}, \text{card } K \neq 1\}) = 0,$$

et qui s'identifie de façon évidente à μ sur l'ensemble des compacts ponctuels.

b) Si F est la primitive d'une mesure m , et si φ est une application de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R}_+ absolument croissante (i.e. continue à droite en 0, C^∞ sur $]0, +\infty[$, et $\varphi^{(n)} \geq 0$), alors $\varphi \circ F$ est encore une primitive (Démonstration laissée au lecteur).

c) Par exemple, en notant λ la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^n ,
 l'application

$$K \longrightarrow e^{\lambda(K)}$$

est la primitive d'une mesure m sur l'espace des compacts de \mathbb{R}^d , invariante
 sous le groupe des déplacements (faire opérer ce groupe sur les compacts !).

Cette mesure peut être rapprochée de la mesure de comptage sur $\mathcal{P}(E)$, où E
 est un ensemble fini, qui est telle que, pour $K \in \mathcal{P}(E)$,

$$m(\{K' \in \mathcal{P}(E), K' \subset K\}) = 2^{\lambda(K)}$$

où λ est la mesure de comptage sur E .

REFERENCES

- [1] A. REVUZ Fonctions croissantes et mesures sur les espaces
 topologiques ordonnés (Ann. Inst. Fourier,
 Grenoble, 6 - 1955-56)
- [2] J. NEVEU Bases mathématiques du calcul des probabilités
 (Masson, 1970) .