GABRIEL MOKOBODZKI

Relèvement borélien compatible avec une classe d'ensembles négligeables. Application à la désintégration des mesures

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 9 (1975), p. 437-442
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1975__9__437_0>

Relèvement borélien compatible avec une classe d'ensembles négligeables. Application à la désintégration des mesures

par Gabriel MOKOBODZKI

Notations, Définitions :

Soient $(X,\mathcal{B})$ un espace mesurable, $\mathcal{N} \subset \mathcal{B}$ une partie héréditaire [1] σ-stable de $\mathcal{B}$, $B(X)$ l'espace vectoriel des fonctions numériques $\mathcal{B}$-mesurables bornées.

On dira que $\mathcal{N}$ est une classe d'ensembles négligeables. On dira qu'une propriété est vraie $\mathcal{N}$-presque-partout sur X si elle a lieu sauf sur un sous-ensemble A de X qui appartient à $\mathcal{N}$. Dans ce qui suit on supposera que $X \notin \mathcal{N}$.

Définition : Soit $H \subset B(X)$ un sous-espace vectoriel réticulé contenant les fonctions constantes, on dira qu'une application linéaire ρ de H dans $B(X)$ est un relèvement compatible avec $\mathcal{N}$ si les conditions suivantes sont vérifiées

a) $\rho(f) = f$ $\mathcal{N}$-presque partout $\forall f \in H$

b) ($f \geq 0$ $\mathcal{N}$-presque partout) $\Rightarrow$ ($\rho(f) \geq 0$) $\forall f \in H$

c) $\rho(1) = 1$

d) $\rho(\sup(f,g)) = \sup(\rho(f), \rho(g))$ $\forall f, g \in H$

La condition d) implique évidemment la condition b).

En admettant l'hypothèse du continu, nous pouvons énoncer le

Théorème 1 : Soit $(X,\mathcal{B})$ un espace mesurable, $\mathcal{B}$ ayant la puissance du continu, et soit $\mathcal{N} \subset \mathcal{B}$ une classe d'ensembles négligeables. Il existe un relèvement ρ de $B(X)$ dans $B(X)$ compatible avec $\mathcal{N}$.

Remarquons au passage que si $\mathcal{B}$ est engendrée par une famille (A_α) ayant la puissance du continu, alors $\mathcal{B}$ a la puissance du continu.

La démonstration du théorème 1 s'appuiera sur plusieurs lemmes.

Lemme 2 : Soit H un sous-espace réticulé de $B(X)$, $1 \in H$, et ρ un relèvement de H compatible avec $\mathcal{N}$.

Le relèvement ρ se prolonge par continuité en un relèvement $\bar{\rho}$ de $\bar{H}$ dans $B(X)$ compatible avec $\mathcal{N}$.

[1] i.e. tout élément de $\mathcal{B}$ contenu dans un élément de $\mathcal{N}$ appartient à $\mathcal{N}$.

Démonstration : Soit $f \in \bar{H}$, $f \geq 0$ $\mathcal{N}^\rho$-presque partout. et soit $(f_n) \subset H$, $\| f - f_n \| \leq 2^{-n}$; on a $\bar{\rho}(f) = \lim\limits_{n \to \infty} \rho(f_n) = \lim\limits_{n \to \infty} \rho(f_n + 2^{-n})$,

pour tout n, $f_n + 2^{-n} \geq f \geq 0$ $\mathcal{N}^\rho$-presque partout, par suite $\rho(f_n + 2^{-n}) \geq 0$ et $\bar{\rho}(f) \geq 0$.

Soient maintenant $f, g \in \bar{H}$, $(f_n), (g_n) \subset H$, avec $\| f_n - f \| \leq 2^{-n}$, $\| g_n - g \| \leq 2^{-n}$. De ces inégalités on tire

$\| \sup f, g - \sup f_n, g_n \| \leq 2^{-n}$, par suite

$$\begin{aligned} \bar{\rho}(\sup, f, g) &= \lim_{n \to \infty} \rho(\sup f_n, g_n) \\ &= \lim_{n \to \infty} \sup(\rho(f_n), \rho(g_n)) \\ &= \sup(\bar{\rho}(f), \bar{\rho}(g)). \end{aligned}$$

Lemme 3 : Soient $H \subset B(X)$ un sous-espace réticulé fermé, de type séparable, $1 \in H$, ρ un relèvement de H compatible avec $\mathcal{N}^\rho$.
Pour tout $A \in \mathcal{B}$, il existe un relèvement $\tilde{\rho}$ compatible avec $\mathcal{N}^\rho$ de l'espace vectoriel, réticulé $\tilde{H}$ engendré par H et 1_A, avec $\tilde{\rho} = \rho$ sur H.

Démonstration : On remarque tout d'abord que $\tilde{H}$ est égal à l'ensemble des fonctions de la forme

$1_A . f + 1_{\complement A} . g$, ou $f, g \in H$; 1_A, $1_{\complement A}$ sont les fonctions indicatrices de A et $\complement A$ respectivement.

Posons alors $h_1 = \sup \{ \rho(f) \; ; \; 0 \leq f \leq 1_A \; \mathcal{N}^\rho\text{-presque partout}, \; f \in H \}$
$h_2 = \inf \{ \rho(f) \; ; \; f \geq 1_A \; \mathcal{N}^\rho\text{-presque partout}, \; f \in H \}$.

L'espace H étant séparable, h_1 et h_2 sont $\mathcal{B}$-mesurables, les fonctions h_1 et h_2 sont à valeurs 0 ou 1, et $h_1 \leq 1_A \leq h_2$ $\mathcal{N}^\rho$-presque partout, $h_1 \leq h_2$ partout.

Posons $A_1 = \{ h_1 = 1 \}$, $A_2 = \{ h_2 = 1 \}$ puis
$A' = (A \cup A_1) \cap A_2$, on a $A + A' \in \mathcal{N}^\rho$.

L'opérateur $\tilde{\rho}$ défini sur $\tilde{H}$ par

$\tilde{\rho}(1_A . f + 1_{\complement A} . g) = 1_{A'} . \rho(f) + 1_{\complement A'} \rho(g)$ répond aux conditions cherchées.

Démonstration du théorème 1.

Soit $[0,\Omega[$ l'ensemble des ordinaux de seconde classe et soit $\alpha \longrightarrow A_\alpha$ une surjection de $[0,\Omega[$ sur $\mathcal{B}$. Pour tout $\alpha < \Omega$, désignons par H_α l'espace vectoriel réiculé engendré par 1 et la famille (1_{A_β}), $\beta < \alpha$. D'après le lemme 3, on peut construire par récurrence transfinie une famille (ρ_α), $\alpha < \Omega$ ou ρ_α est un relèvement de H_α compatible avec $\mathcal{N}$, la famille (ρ_α) vérifiant la condition de récurrence. $\rho_\alpha|_{H_\beta} = \rho_\beta$ si $\beta < \alpha$.
Posons $H = \cup H_\alpha$, $\rho = \lim \rho_\alpha$, l'application linéaire ρ est un relèvement de H, et comme $\bar{H} = B(X)$, le prolongement par continuité $\bar{\rho}$ de H à $B(X)$ répond aux conditions cherchées.

Remarques:

1) Disons qu'une fonction numérique f est $\mathcal{N}$-presque borélienne s'il existe $g \in B(X)$; $A \in \mathcal{N}$ tels que $(f \neq g) \subset A$.
On peut alors définir des relèvements boréliens sur l'espace des fonctions $\mathcal{N}$-presque boréliennes.

2) Supposons que l'on ait un relèvement ρ compatible avec $\mathcal{N}$ défini sur un sous-espace séparable réticulé $H \subset B(X)$, tel que $1 \in H$. Il existe alors un relèvement $\bar{\rho}$ de $B(X)$ compatible avec $\mathcal{N}$ tel que $\bar{\rho}|_H = \rho$.

Extension :

On suppose maintenant que X est un espace compact, que $\mathcal{B}$ est la tribu borélienne de X. On se donne une classe $\mathcal{N}$ d'ensembles négligeables vérifiant les conditions suivantes.

a) $\mathcal{N}$ ne contient aucun ouvert non vide.

b) Pour tout $A \in \mathcal{B}$, il existe un plus petit fermé $\tilde{A}$ de X tel que $A \setminus \tilde{A} \in \mathcal{N}$.

Exemples : 1) Si μ est une mesure ≥ 0 sur X de support X tout entier, on prend pour $\mathcal{N}$ la classe des ensembles μ-négligeables.

2) Pour une famille $(\mu_\alpha) \subset \mathcal{M}^+(X)$ telle que $\overline{\cup S\mu_\alpha} = X$, on prend pour $\mathcal{N}$ la classe des ensembles μ_α-négligeables pour tout α.

3) La famille des ensembles maigres de X vérifie les conditions a et b.

La condition a) assure que l'application identique de $\mathcal{C}(X)$ dans $B(X)$ est un relèvement compatible avec $\mathcal{N}$.

Soit H un sous-espace réticulé de $B(X)$, $H \supset \mathcal{E}(X)$. On dira qu'un relèvement ρ de H , compatible avec $\mathcal{N}$, est un relèvement <u>fort</u> si $\rho(f) = f \quad \forall f \in \mathcal{E}(X)$.

Soit $\mathcal{B}_o$ une sous-tribu de $\mathcal{B}$, $B_o(X)$ l'espace des fonctions numériques $\mathcal{B}_o$-mesurables-bornées.

<u>Théorème 4</u> : Si la sous-tribu $\mathcal{B}_o$ est de puissance inférieure à la puissance du continu il existe un relèvement fort compatible avec $\mathcal{N}$ de l'espace vectoriel rétidulé H_o engendré par $\mathcal{E}(X)$ et $B_o(X)$.

<u>Démonstration</u> : Comme précédemment on remplace $B_o(X)$ par un sous-espace dense plus maniable $B'_o(X)$:

$$B'_o(X) = \left\{ f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, 1_{A_i} \;,\; A_i \in \mathcal{B}_o \right\} .$$

Cet espace est celui des fonctions étagées construit sur $\mathcal{B}_o$. L'espace vectoriel réticulé engendré par $B'_o(X)$ et $\mathcal{E}(X)$ est composé de fonctions g de la forme

$g = \sum_{i=1}^{n} 1_{A_i} f_i$ ou $(A_i)_{i \leq n}$ est une partition finie de X , $A_i \in \mathcal{B}_o$ et $f_i \in \mathcal{E}(X)$ pour tout $i \leq n$.

Soit $P = (A_n)$ une suite d'éléments de $\mathcal{B}_o$, soit H l'espace vectoriel réticulé engendré par $\mathcal{E}(X)$ et la suite (1_{A_n}) et soit ρ un relèvement fort de H .

Nous aurons besoin des lemmes suivants.

<u>Lemme 4. 1</u> : Pour tout $A \in \mathcal{B}$, la fonction numérique $t_A = \inf \left\{ \rho(g) \;;\; g \in H \;,\; g \geq 1_A \;\; \mathcal{N}\text{-presque partout} \right\}$ est mesurable, t_A prend les valeurs 0 ou 1 , et $(A \setminus \{ t_A = 1 \}) \in \mathcal{N}$.

<u>Démonstration du lemme 4. 1</u> : On peut supposer que la suite (A_n) ci-sessus est stable par réunion finie et passage au complémentaire de sorte que tout élément $g \in H$ s'écrit sous la forme :

$g = \sum_{k=1}^{p} 1_{A_k} \cdot f_k$ où $P_\alpha = (A_k)_{k \leq p}$ est une partition finie de X ,

$P_\alpha \subset P$, et $f_k \in \mathcal{E}(X)$.

Pour une fonction g comme ci-dessus, la relation $g \geq 1_A \mathcal{N}$-presque partout équivaut à $f_k \geq 1$ $\mathcal{N}$-presque partout sur $A \cap A_k$, $k=1, 2, \ldots, p$. et par conséquent $\{ f_k \geq 1 \} \supset \widehat{A \cap A_k}$.

Si l'on associe à la partition $P_\alpha = (A_k)$ la fonction

$t_\alpha = \sum_{k=1}^{p} \rho(1_{A_k}) \cdot 1_{\widetilde{A \cap A_k}}$ on voit que l'on aura $t_\alpha \geq 1_A$ $\mathcal{N}$-presque partout et comme ρ est un relèvement fort,

$\rho(g) = \sum_{k=1}^{p} \rho(1_{A_k}) \cdot f_k \geq t_\alpha$ partout et finalement $\rho(g) \geq t_\alpha \geq t_A$.

On en déduit que $t_A = \inf t_\alpha$ où α parcourt la famille des partitions finies de X qui sont contenues dans $P = (A_n)$, de sorte que t_A est mesurable, $(A \setminus \{ t_A = 1 \}) \in \mathcal{N}$; la fonction t_A ne prend que les valeurs 0 ou 1 parce que H est réticulé et $1 \in H$.

On remarquera que pour $g \in H$, la relation $g \geq 0$ $\mathcal{N}$-presque partout sur A implique que $\rho(g) \geq 0$ partout sur $A \cap \{ t_A = 1 \}$.

<u>Lemme 4.2</u> : Pour tout $A \in \mathcal{B}$, il existe un relèvement fort compatible avec $\mathcal{N}$ de l'espace vectoriel réticulé engendré par H et 1_A qui prolonge ρ .

<u>Démonstration du lemme 4.2</u> : Considérons les fonctions

$t_A = \inf \{ \rho(g) \mid g \in H \ ; \ g \geq 1_A \ \ \mathcal{N}\text{-presque partout} \}$. et

$\ell_A = \sup \{ \rho(g) \mid g \in H \ ; \ g \leq 1_A \ \ \mathcal{N}\text{-presque partout} \}$.

D'après le lemme précédent on a

$\ell_A \leq 1_A \leq t_A$ $\mathcal{N}$-presque partout et ℓ_A , t_A sont mesurables, à valeurs 0 ou 1 .

Posons alors $A' = (A \cup \{ \ell_A = 1 \}) \cap \{ t_A = 1 \}$.

L'espace vectoriel réticulé H_1 engendré par H et 1_A se compose de fonctions g de la forme

$g = 1_A \cdot f + 1_{\complement A} \cdot h$ où f , g $\in$ H

L'application ρ_1 définie sur H_1 par

$\rho_1(g) = 1_{A'} \cdot \rho(f) + 1_{\complement A'} \cdot \rho(h)$ est alors un relèvement fort de H_1 , compatible avec $\mathcal{N}$, qui prolonge ρ .

<u>Démonstration du théorème 4</u> : à l'aide des deux lemmes précédents on reprend sans difficulté la démonstration du théorème 1.

Application à la désintégration des mesures.

Soit X un espace compact, μ une mesure $\geqslant 0$ sur X de support X. On suppose que la topologie de X est engendrée par une famille (ω_α) d'ouverts dont la puissance est inférieure à celle du continu. Dans ces conditions, la tribu de Baire $\mathcal{B}_0$ de X, engendrée par les ouverts qui sont des K_σ, est aussi de puissance inférieure à celle du continu et l'on sait que tout élément de $L^\infty(X,\mu)$ possède un représentant $\mathcal{B}_0$ -mesurable.

Théorème 5 : Il existe un relèvement ρ de $L^\infty(X,\mu)$ dans $B(X)$ vérifiant les conditions

a) pour tout $f \in L^\infty(X,\mu)$, $\rho(f) \in B(X)$ et $\rho(f) \in f$

b) pour tout $g \in \mathcal{C}(X)$, $\rho(g) = g$

c) $\rho(\sup f, g) = \sup(\rho(f), \rho(g))$

Rappelons comment l'on passe des relèvements aux désintégrations :

Soit Y un espace compact, ν une mesure $\geqslant 0$ sur X, φ une application de Y sur X telle que $\mu = \varphi(\nu)$.

Pour tout $h \in \mathcal{C}(Y)$, la mesure $\varphi(h.\nu)$ peut se mettre sous la forme $\varphi(h.\nu) = p(h).\mu$ où $p(h) \in L^\infty(X,\mu)$.
Soit alors ρ un relèvement fort de $L^\infty(X,\mu)$, compatible avec la classe des ensembles μ-négligeables et posons, pour $h \in \mathcal{C}(Y)$ $K(h) = \rho(p(h))$; pour $x \in X$, l'application $h \mapsto K(h)(x)$ définit une mesure σ_x sur Y, $\sigma_x \in \mathcal{M}^1(Y)$, σ_x portée par $\varphi^{-1}(x)$, et l'on a

$$\nu = \int \sigma_x \, d\mu(x) .$$