PAUL-ANDRÉ MEYER
KIA-AN YEN

Génération d'une famille de tribus par un processus croissant

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 9 (1975), p. 466-470
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1975__9__466_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1974/75

GENERATION D'UNE FAMILLE DE TRIBUS PAR UN PROCESSUS CROISSANT

par P.A. MEYER et YEN Kia-An

Soit $(\Omega,\underline{\underline{F}})$ un espace mesurable, muni d'une filtration (une famille croissante de tribus) $(\underline{\underline{F}}_t)_{t\geq 0}$. Nous conviendrons que $\underline{\underline{F}}_{0-}$ est la tribu dégénérée $\{\emptyset,\Omega\}$. Rappelons que la tribu optionnelle $\underline{\underline{O}}$ sur $\mathbb{R}_+\times\Omega$ est engendrée par les processus adaptés à $(\underline{\underline{F}}_t)$, à trajectoires càdlàg.[1] , la tribu prévisible $\underline{\underline{P}}$ engendrée par les processus adaptés à $(\underline{\underline{F}}_{t-})$, à trajectoires continues à gauche sur $]0,\infty[$.

Notre but dans cette note est de démontrer le théorème suivant et (sous une condition supplémentaire) le théorème analogue pour la tribu optionnelle.

THEOREME 1. 1) *La tribu prévisible $\underline{\underline{P}}$ est séparable si et seulement si, pour chaque t, $\underline{\underline{F}}_{t-}$ est séparable.*

2) *Supposons $\underline{\underline{P}}$ séparable. Alors il existe un processus croissant (A_t) continu à droite (ou continu à gauche) engendrant la tribu $\underline{\underline{P}}$ sur $\mathbb{R}_+\times\Omega$. (A_t) est strictement croissant, et on a $\underline{\underline{F}}_{T-}=\underline{\underline{T}}(A_T)$ pour tout temps d'arrêt T . Il existe aussi un processus strictement croissant* continu (B_t) *tel que l'on ait pour tout* t $\underline{\underline{F}}_{t-}=\underline{\underline{T}}(B_s,\ s\leq t)$.

DEMONSTRATION. 1) La tribu prévisible est engendrée par les ensembles de la forme $[r,\infty[\times H$ (ou $]r,\infty[\times H$) où r est rationnel et H appartient à $\underline{\underline{F}}_{r-}$; il en résulte aisément que si chaque $\underline{\underline{F}}_{r-}$ est séparable, $\underline{\underline{P}}$ est séparable. Inversement, une v.a. Z est $\underline{\underline{F}}_{t-}$-mesurable si et seulement s'il existe un processus prévisible (Z_s) tel que $Z=Z_t$, de sorte que si $\underline{\underline{P}}$ est séparable, $\underline{\underline{F}}_{t-}$ l'est pour tout t.

---

1 " continues à droite et pourvues de limites à gauche".

Passons à 2). Choisissons un système générateur de $\underline{\underline{P}}$ de la forme $J_n =]r_n,\infty[\times H_n$ (les r_n ne sont pas nécessairement distincts), et posons

$$A_t(\omega) = \sum_n 3^{-n} I_{J_n}(t,\omega)$$

C'est un processus croissant continu à gauche et adapté, tel que $A_0=0$, et il est bien connu, d'après l'unicité du développement en base 3, que tous les ensembles J_n appartiennent à la tribu engendrée par A - donc A engendre la tribu prévisible. Noter que ce processus est purement discontinu, mais qu'il est continu hors de l'ensemble dénombrable constitué par les points r_n. Il est d'autre part strictement croissant : en effet, soient $\omega\in\Omega$, et s,t deux instants tels que $s<t$; (s,ω) et (t,ω) appartiennent à deux atomes différents de $\underline{\underline{P}}$, donc on a $A_s(\omega)\neq A_t(\omega)$, ou encore $A_s(\omega)<A_t(\omega)$ puisque A est croissant.

Posons $A_\infty = \lim_{t\to\infty} A_t$; on a aussi $A_\infty = \sum_n 3^{-n} I_{H_n}$, et la tribu engendrée sur $\bar{\mathbb{R}}_+\times\Omega$ par le processus $(A_t)_{t\leq+\infty}$ est aussi engendrée par les ensembles $]r_n,\infty]\times H_n$: c'est la tribu prévisible sur $\bar{\mathbb{R}}_+\times\Omega$.

Soit alors T un temps d'arrêt ; montrons que $\underline{\underline{F}}_{T-}$ est engendrée par la seule v.a. A_T. Soit Z une v.a. $\underline{\underline{F}}_{T-}$-mesurable. Il est bien connu qu'il existe un processus prévisible $(Z_t)_{t\leq\infty}$ tel que $Z=Z_T$. D'après un théorème classique de Doob, le fait que la tribu prévisible sur $\bar{\mathbb{R}}_+\times\Omega$ soit engendrée par $(A_t)_{t\leq\infty}$ entraîne l'existence d'une fonction borélienne φ sur $\mathbb{R}$ telle que $Z_s(\omega)=\varphi(A_s(\omega))$ pour tout (s,ω). On a alors $Z=Z_T=\varphi(A_T)$.

Pour obtenir un processus croissant continu (B_t) satisfaisant à l'énoncé, il suffit de poser $B_t=\int_0^t A_s ds$, de sorte que $A_.$ est la dérivée à gauche de $B_.$ (cette fois, on a $\underline{\underline{F}}_{T-} = \underline{\underline{T}}(B_{s\wedge T},\ s\geq 0)$, mais B_T n'engendre plus la tribu à elle toute seule).

Enfin, en utilisant des générateurs de la forme $[r_n,\infty[\times H_n$, on aboutirait à un processus croissant (A_t), prévisible et continu à droite, engendrant la tribu prévisible.

Nous passons maintenant au résultat analogue pour la tribu optionnelle. Plus précisément, nous énonçons d'abord le résultat analogue à la partie 2) du théorème 1, en réservant pour un troisième énoncé un critère de séparabilité de la tribu optionnelle, valable sur les espaces de Blackwell.

THEOREME 2. Supposons que la tribu optionnelle $\underline{\underline{O}}$ soit séparable. Alors il existe un processus croissant continu à droite (A_t) engendrant la tribu $\underline{\underline{O}}$. Ce processus est strictement croissant, et pour tout temps d'arrêt T on a $\underline{\underline{F}}_T=\underline{\underline{T}}(A_T)$. On peut supposer de plus que le processus croissant (A_{t-}) - avec la convention $A_{0-}=0$ - engendre $\underline{\underline{P}}$, et que l'on a donc aussi $\underline{\underline{F}}_{T-}=\underline{\underline{T}}(A_{T-})$ pour tout temps d'arrêt T.

DEMONSTRATION. La tribu optionnelle est engendrée par les intervalles stochastiques $[\![T,\infty[\![$, où T est un temps d'arrêt (voir dans ce volume l'exposé de Dellacherie-Meyer "un nouveau théorème de section et de projection"). Soit (G_k) un système générateur dénombrable de la tribu $\underline{\underline{O}}$. Pour tout k, soit (T_{km}) une suite de temps d'arrêt de $(\underline{\underline{F}}_t)$ telle que G_k appartienne à la tribu engendrée par les T_{km} ; alors les intervalles stochastiques $[\![T_{km},\infty[\![$ engendrent $\underline{\underline{O}}$. Rangeons les T_{km} en une suite unique (T_n), et posons comme dans la démonstration du théorème 1

$$J_n=[\![T_n,\infty[\![\quad , \qquad A_t(\omega) = \sum_n 3^{-n} I_{J_n}(t,\omega)$$

processus croissant continu à droite. On vérifie alors les propriétés de (A_t) comme dans la démonstration précédente.

Si la tribu optionnelle est séparable, chaque tribu $\underline{\underline{F}}_t$ l'est aussi, donc encore chaque tribu $\underline{\underline{F}}_{t-}$, et finalement la tribu $\underline{\underline{P}}$. On peut alors supposer que la suite (T_n) contient suffisamment de temps d'arrêt pour que les intervalles $]\!]T_n,\infty[\![$ engendrent $\underline{\underline{P}}$. Alors le processus (A_{t-}) engendre $\underline{\underline{P}}$.

THEOREME 3. <u>Supposons que</u> $(\Omega,\underline{\underline{F}})$ <u>soit un espace de Blackwell, et que</u> $(\underline{\underline{F}}_t)$ <u>soit la filtration naturelle d'un processus</u> (X_t), <u>à valeurs dans un espace métrisable séparable</u> E, <u>et à trajectoires càdlàg. Alors la tribu optionnelle</u> $\underline{\underline{O}}$ <u>est séparable, et tout processus mesurable et adapté à</u> $(\underline{\underline{F}}_t)$ <u>est optionnel. De plus, la tribu</u> $\underline{\underline{O}}$ <u>est engendrée par la tribu</u> $\underline{\underline{P}}$ <u>et le processus</u> (X_t).

DEMONSTRATION. Nous supposons que $\underline{\underline{F}}_t=\underline{\underline{T}}(X_s,\ s\leq t)$. Considérons sur $\mathbb{R}_+\times\Omega$ les tribus suivantes

1) $\underline{\underline{M}} = \underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+)\times\underline{\underline{F}}$, qui est une tribu de Blackwell.

2) $\underline{\underline{D}}$, engendrée par la tribu prévisible $\underline{\underline{P}}$ et par le processus càdlàg. (X_t) ; comme on peut plonger E dans le cube $[0,1]^{\mathbb{N}}$, les tribus $\underline{\underline{F}}_{t-}$ sont séparables, $\underline{\underline{P}}$ est séparable (th.1), donc $\underline{\underline{D}}$ l'est aussi.

3) $\underline{\underline{O}}$, la tribu optionnelle.

4) $\underline{\underline{A}}$, engendrée par les processus mesurables et adaptés à $(\underline{\underline{F}}_t)$ (ce qui est une condition moins forte que la progressivité).

On a évidemment $\underline{\underline{D}} \subset \underline{\underline{O}} \subset \underline{\underline{A}} \subset \underline{\underline{M}}$. Le théorème sera établi si nous prouvons que $\underline{\underline{D}}=\underline{\underline{O}}=\underline{\underline{A}}$, puisque $\underline{\underline{D}}$ est séparable. Mais il nous suffit d'établir pour cela, d'après le théorème de Blackwell, que toute fonction $\underline{\underline{A}}$-mesurable est constante sur les atomes de $\underline{\underline{D}}$.

Soient (s,w) et $(\bar{s},\bar{w})$ deux éléments de $\mathbb{R}_+\times\Omega$ qui appartiennent au même atome de $\underline{\underline{D}}$. Tout d'abord, $\underline{\underline{D}}$ contient $\underline{\underline{P}}$, et l'application $(t,\omega) \longmapsto t$ est prévisible, donc $s=\bar{s}$ et nous pouvons noter (s,w), $(s,\bar{w})$ les deux points. Ensuite, les ensembles $[s,\infty[\times H$, $H\in\underline{\underline{F}}_{s-}$ appartiennent à $\underline{\underline{P}}$, et il en résulte que w et $\bar{w}$ appartiennent au même atome de $\underline{\underline{F}}_{s-}$. Enfin, (X_t) est $\underline{\underline{D}}$-mesurable, donc $X_s(w)=X_s(\bar{w})$, et comme $\underline{\underline{F}}_s$ est engendrée par $\underline{\underline{F}}_{s-}$ et X_s , w et $\bar{w}$ appartiennent au même atome de

$\underline{\underline{F}}_s$. Mais alors on a $Z_s(w)=Z_s(\bar{w})$ pour tout processus adapté (Z_t), donc pour tout processus $\underline{\underline{A}}$-mesurable.

REMARQUES. 1) Si $(\Omega,\underline{\underline{F}})$ est un espace de Blackwell, il est <u>équivalent</u> de dire que la famille de tribus $(\underline{\underline{F}}_t)$ est la filtration naturelle d' un processus càdlàg., ou que la tribu optionnelle correspondante est séparable : cela résulte aussitôt des théorèmes 2 et 3, puisque tout processus croissant continu à droite est càdlàg.

2) Un argument proche de la démonstration précédente, mais plus simple, montre que si $(\Omega,\underline{\underline{F}})$ est un espace de Blackwell, et si $(\underline{\underline{F}}_t)$ est une filtration dont la tribu prévisible $\underline{\underline{P}}$ est séparable, alors tout processus mesurable adapté à la famille $(\underline{\underline{F}}_{t-})$ est prévisible.

3) Soit Ω l'ensemble de toutes les applications càdlàg. de $\mathbb{R}_+$ dans l'espace métrisable séparable E, muni de ses applications coordonnées X_t, et de la filtration $(\underline{\underline{F}}_t)$ correspondante. Dellacherie a montré alors, par un raisonnement très simple qui n'utilise pas le théorème de Blackwell, mais seulement les propriétés des opérateurs d'arrêt, que la tribu $\underline{\underline{O}}$ est séparable, et que tout processus mesurable adapté est optionnel. Sa démonstration figurera dans la nouvelle édition du livre " probabilités et potentiel".