

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

GABRIEL MOKOBODZKI

Démonstration élémentaire d'un théorème de Novikov

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 10 (1976), p. 539-543

http://www.numdam.org/item?id=SPS_1976__10__539_0

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

DEMONSTRATION ELEMENTAIRE D'UN THEOREME DE NOVIKOV.

par G. MOKOBODZKI

Dans son article d'exposition [2] sur les théorèmes de séparation d'ensembles projectifs, C. DELLACHERIE se déclare convaincu que l'on peut démontrer sans recourir au ^{second} théorème de séparation le théorème ci-après :

THEOREME 1 : Soit (E_n) une suite finie ou infinie de parties analytiques d'un espace métrisable compact F . Si l'on a $\bigcap E_n = \emptyset$, alors il existe une suite (B_n) de boréliens de F telle que B_n contienne E_n pour tout n et que l'on ait $\bigcap B_n = \emptyset$.

Je propose ici une démonstration de ce résultat qui s'inspire de celle du premier théorème de séparation et qui justifie la ténacité exprimée dans [2] .

Disons qu'une suite (A_n) de parties de F est emboitable s'il existe une suite (B_n) de boréliens de F telle que $A_n \subset B_n$ pour tout n et $\bigcap A_n = \bigcap B_n$. On dira aussi que la suite (B_n) emboite la suite (A_n) . On a alors le lemme fondamental suivant :

LEMME 2 : Soient (D_n) , (C_n) deux suites de parties de F et soit $D = \bigcup_p D_p$. Si pour tout p , la suite $(D_p, (C_n))$ ¹ est emboitable, alors la suite $(D, (C_n))$ est emboitable.

1. On note ainsi la suite D_p, C_0, C_1, \dots

Démonstration : Soient (B_0^p) , $(B_m^p)_{m \geq 1}$ des suites de boréliens de F telle que $B_0^p \supset D_p$, $B_m^p \supset C_n$ et telles que pour tout p

$$D_p \cap \left(\bigcap_n C_n \right) = \bigcap_{m \geq 0} B_m^p$$

Posons alors $B_m = \bigcap_{p \geq 1} B_m^p$, pour $m \geq 1$, $B_0 = \bigcap_{p \geq 1} B_0^p$ et

$$B = \bigcap_{m \geq 1} B_m,$$

Pour tout p , on a encore $D_p \cap \left(\bigcap_n C_n \right) = B_0^p \cap B$

et par suite $D \cap \left(\bigcap_n C_n \right) = B_0 \cap B$.

On en conclut que la suite $(B_m)_{m \geq 0}$ emboîte la suite $(D, (C_n))$.

Rappelons quelques notations nécessaires à l'emploi des schémas de Souslin.

S = ensemble de suites ordonnées finies d'éléments de \mathbb{N} .

Σ = ensemble des suites ordonnées infinies d'éléments de \mathbb{N} .

Pour $s \in S$, $n \in \mathbb{N}$ (s, n) désigne la suite obtenue en adjoignant n à la droite de la suite finie s .

Pour $s \in S$, $|s|$ désigne la longueur, ou le nombre d'éléments de s .

Pour $s \in S$ et $\sigma \in \Sigma$ (resp. $s' \in S$) la notation $s \rightarrow \sigma$ signifie que s est une section commençante de Σ .

Pour $\sigma \in \Sigma$, $(\sigma|p)$ désignera la suite finie obtenue en prenant les p premiers éléments de σ .

Un schéma de Souslin sur un ensemble F est une application Δ de S dans l'ensemble $\mathcal{P}(F)$.

On dit que Δ est régulier si $\Delta(s, n) \subset \Delta(s)$, $\forall s \in S$, $n \in \mathbb{N}$.

Le noyau du schéma Δ est l'ensemble

$$\Delta(\Sigma) = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} \left(\bigcap_{s \rightarrow \sigma} \Delta(s) \right)$$

Tout ensemble analytique de F est alors le noyau d'un schéma régulier Δ à valeurs dans les parties compactes de F .

Soit Δ un schéma de Souslin et soit $t \in S$. Le sous-ensemble $S_t = \{s \in S \mid t \rightarrow s\}$ est isomorphe à S et permet de définir un nouveau schéma de Souslin à l'aide de Δ .

Posons alors $\Sigma_s = \{\sigma \in \Sigma \mid s \rightarrow \sigma\}$ pour $s \in S$.

$$\Delta(\Sigma_s) = \bigcup_{\sigma \in \Sigma_s} \left(\cap_{t \rightarrow \sigma} \Delta(t) \right)$$

On a la règle simple de calcul :

$$\text{pour tout } s \in \mathbb{N}, \quad \Delta(\Sigma_s) = \bigcup_n \Delta(\Sigma_{(s,n)})$$

Soit alors (E_n) une suite infinie de parties analytiques de F , (Δ^n) une suite de schémas de Souslin réguliers à valeurs dans les parties compactes de F telle que

$$\Delta^n(\Sigma) = E_n \quad \text{pour tout } n.$$

Le lemme suivant est une conséquence directe du lemme 2.

LEMME 3 : *Si la suite $(\Delta^n(\Sigma))$ n'est pas emboîtable,*

1°) *il existe $k \in \mathbb{N}$ telle que la suite $\Delta^1(\Sigma_k), (\Delta^n(\Sigma))_{n \geq 2}$, ne soit pas emboîtable*

2°) *il existe une suite $(\sigma_n) \subset \Sigma$ telle que pour tout p la suite $\Delta^1(\Sigma_{(\sigma_1 | p)}), \dots, \Delta^p(\Sigma_{(\sigma_p | p)}), (\Delta^r(\Sigma))_{r \geq p+1}$ ne soit pas emboîtable*

Démonstration :

1°) il suffit de rappeler que pour tout $s \in S$ $\Delta^p(\Sigma_s) = \bigcup_n \Delta^p(\Sigma_{(s,n)})$ et d'appliquer le lemme 2.

Pour

2°) on construit les suites (σ_n) pas à pas, c'est à dire par exemple

pour σ_1 , en construisant par récurrence une suite $(s_n) \subset S$ telle que $s_n \rightarrow s_{n+1}$ pour tout n de sorte que s_p s'interprête comme $(\sigma_1|_p)$.

Démonstration du théorème 1 :

Supposons que la suite $(E_n) = (\Delta^n(\Sigma))$ ne soit pas emboîtable et soit $(\sigma_n) \subset \Sigma$ une suite infinie vérifiant les conditions du lemme 3.

Rappelons qu'on a toujours $\Delta^p(\Sigma_s) \subset \Delta^p(s)$ puisque l'on a supposé les Δ^p réguliers.

Si la suite

$$\Delta^1(\Sigma_{(\sigma_1|_p)}), \dots, \Delta^p(\Sigma_{(\sigma_p|_p)}), (\Delta^r(\Sigma))_{r > p+1}$$

n'est pas emboîtable, il en résulte en particulier que $K_p = \bigcap_{k < p} \Delta^k(\sigma_k|_p)$ est un compact non vide pour tout p . On vérifie aisément que la suite (K_p) est décroissante et que $K = \bigcap_p K_p$ est contenu dans $\bigcap_n E_n$. Autrement dit si la suite (E_n) n'est pas emboîtable $\bigcap_n E_n \neq \emptyset$.

Par négation, on obtient le théorème 1.

Mr. Gabriel MOKOBODZKI

- EQUIPE D'ANALYSE -
E.R.A. au C.N.R.S. n°294

UNIVERSITE PARIS VI - Tour 46

4 Place Jussieu

75230 - PARIS - CÉDEX 05

PREPRINT N°54 - Septembre 1975

B I B L I O G R A P H I E

[1] CHOQUET G.

Ensembles K -analytiques et K -Sousliniens.
Ann. Inst. Fourier 1959.

[2] DELLACHERIE C.

Ensembles analytiques : théorèmes de séparation et applications .

Séminaire de Probabilités IX. STRASBOURG

Lecture Notes in Mathematics - N°465 - SPRINGER