Paul-André Zanzotto

Sur l'existence d'un noyau induisant un opérateur sous markovien donné

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 11 (1977), p. 298-302
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1977__11__298_0>

SUR L'EXISTENCE D'UN NOYAU INDUISANT UN OPERATEUR SOUS-MARKOVIEN DONNE

(P.A. Zanzotto)

Etant donné un couple d'espaces probabilisés $(E,\underline{\underline{E}},\lambda)$, $(F,\underline{\underline{F}},\mu)$, on énonce des conditions suffisantes pour que tout opérateur sous-markovien appliquant $L^\infty(\mu)$ dans $L^\infty(\lambda)$ soit induit, au sens de [2], par un noyau sous-markovien (ou sous-probabilité de transition).

L'intérêt (et peut-être la nouveauté) de ces conditions réside dans le fait qu'elles n'imposent aucune espèce de séparabilité à la tribu $\underline{\underline{F}}$. En revanche, elles imposent à la mesure λ d'être complète (ou, plus généralement, telle que l'espace $L^\infty(\lambda)$ admette un relèvement linéaire).

Les notations et la terminologie sont essentiellement celles de [3]. Si $(E,\underline{\underline{E}})$ est un espace mesurable, on désigne par $B(\underline{\underline{E}})$ l'espace des fonctions (réelles) mesurables et bornées sur $(E,\underline{\underline{E}})$. Un noyau sous-markovien N relatif au couple d'espaces mesurables $(E,\underline{\underline{E}})$, $(F,\underline{\underline{F}})$ est le plus souvent identifié à une application de $B(\underline{\underline{F}})$ dans $B(\underline{\underline{E}})$. De même un opérateur sous-markovien M relatif au couple d'espaces probabilisés $(E,\underline{\underline{E}},\lambda)$, $(F,\underline{\underline{F}},\mu)$ est considéré comme une application de $L^\infty(\mu)$ dans $L^\infty(\lambda)$. On dit que l'opérateur M est <u>induit</u> par le noyau N si, pour tout élément f de $B(\underline{\underline{F}})$, la classe d'équivalence déterminée par Nf dans $L^\infty(\lambda)$ coïncide avec l'image par M de la classe d'équivalence déterminée par f dans $L^\infty(\mu)$. Cette condition se traduit par la commutativité du diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} L^\infty(\lambda) & B(\underline{\underline{E}}) \arrow[l, "p"'] \\ L^\infty(\mu) \arrow[u, "M"] & B(\underline{\underline{F}}) \arrow[l, "q"] \arrow[u, "N"'] \end{tikzcd}$$

où p,q désignent les projections canoniques de $B(\underline{\underline{E}})$, $B(\underline{\underline{F}})$ sur leurs quotients respectifs $L^\infty(\lambda)$, $L^\infty(\mu)$.

Soit en particulier F un espace topologique séparé, et $\underline{\underline{F}}$ sa tribu borélienne: un noyau N relatif au couple $(E,\underline{\underline{E}})$, $(F,\underline{\underline{F}})$ est alors dit <u>tendu</u> si, pour tout élément x de E, la mesure $N(x,\cdot)$ est tendue (c.-à-d. intérieurement régulière par rapport au pavage des ensembles compacts de F).

Une application linéaire croissante r de $L^{\infty}(\lambda)$ dans $B(\underline{\underline{E}})$, telle que l'on ait $r(1)=1$ et que $p \circ r$ coïncide avec l'application identique de $L^{\infty}(\lambda)$, est appelée un relèvement linéaire de $L^{\infty}(\lambda)$ dans $B(\underline{\underline{E}})$. Pour qu'il existe de telles applications, il suffit que la mesure λ soit complète (cf. [1]).

THEOREME 1. <u>Soit M un opérateur sous-markovien relatif au couple d'espaces probabilisés $(E,\underline{\underline{E}},\lambda)$, $(F,\underline{\underline{F}},\mu)$. Pour qu'il existe un noyau N induisant l'opérateur M, il suffit que les deux conditions suivantes soient remplies:</u>

(a) <u>Il existe un relèvement linéaire r de $L^{\infty}(\lambda)$ dans $B(\underline{\underline{E}})$.</u>

(b) <u>Il existe sur F une topologie séparée, localement compacte, telle que $\underline{\underline{F}}$ coïncide avec la tribu borélienne et que la mesure μ soit tendue.</u>

<u>De façon plus précise, si ces deux conditions sont remplies, et si l'on pose</u>

(1) $$L = r \circ M \circ q$$

<u>(où q désigne la projection canonique de $B(\underline{\underline{F}})$ sur $L^{\infty}(\mu)$), il existe un noyau tendu N (unique) tel que l'on ait</u>

(2) $$Nf = Lf \quad \text{pour tout élément } f \text{ de } C_c(F),$$

(3) $$Nf \sim Lf \ (\mathrm{mod}\, \lambda) \quad \text{pour tout élément } f \text{ de } B(\underline{\underline{F}}).$$

DEMONSTRATION. Pour tout élément x de E, considérons sur F la mesure de Radon (positive et de masse totale inférieure ou égale à 1) $f \longmapsto (Lf)(x)$, et désignons par ν_x la mesure de Borel tendue qui lui est associée. On a donc, par définition,

$$(Lf)(x) = \int f d\nu_x$$

pour tout élément f de $C_c(F)$.

Posons ensuite

$$(Nf)(x) = \int f d\nu_x$$

pour tout élément f de $B(\underline{\underline{F}})$. Le noyau tendu N ainsi obtenu vérifie la condition (2) par définition. Montrons qu'il vérifie aussi la condition (3). Remarquons à cet effet que, si (f_n) est une suite monotone, uniformément bornée, d'éléments de $B(\underline{\underline{F}})$, on a

$$N(\lim_n f_n) = \lim_n Nf_n, \qquad L(\lim_n f_n) \sim \lim_n Lf_n \pmod{\lambda}.$$

Ceci montre que l'espace vectoriel $\underline{\underline{M}}$ constitué par les éléments f de $B(\underline{\underline{F}})$ possédant la propriété $Nf \sim Lf \pmod{\lambda}$ est stable par convergence monotone bornée. D'autre part $\underline{\underline{M}}$ contient $C_c(F)$, car N coïncide avec L sur $C_c(F)$. Il suffit donc de prouver que $\underline{\underline{M}}$ contient toute fonction positive bornée semi-continue inférieurement sur F. Or, si f est une telle fonction, et si l'on pose

$$H = \{ g : g \in C_c(F), \quad 0 \leq g \leq f \},$$

on a

$$\int f d\mu = \sup_{g \in H} \int g d\mu ,$$

de sorte qu'il existe une suite croissante (g_n) d'éléments de H, telle que l'on ait

$$\int f d\mu = \sup_n \int g_n d\mu ,$$

ou, ce qui revient au même,

(4) $$f \sim \sup_n g_n \pmod{\mu}.$$

Pour tout élément g de H on a alors

$$g \leq \sup_n g_n \quad \mu\text{-p.p.},$$

et par conséquent

$$Lg \leq L(\sup_n g_n) \quad \text{partout.}$$

Il en résulte

$$\sup_{g \in H} Lg \leq L(\sup_n g_n) \sim \sup_n Lg_n \leq \sup_{g \in H} Lg ,$$

de sorte que les deux fonctions $\sup_{g \in H} Lg$ et $L(\sup_n g_n)$ sont équivalentes $\pmod{\lambda}$.
On a alors (compte tenu du fait que N est tendu)

$$Nf = \sup_{g \in H} Ng = \sup_{g \in H} Lg \sim L(\sup_n g_n) = Lf,$$

où la dernière égalité découle de (4) et de la définition de L.

La fonction f appartient donc à $\underline{\underline{M}}$, ce qui achève la démonstration.

THEOREME 2. <u>Soit</u> M <u>un opérateur sous-markovien relatif au couples d'espaces probabilisés</u> $(E,\underline{\underline{E}},\lambda)$, $(F,\underline{\underline{F}},\mu)$. <u>Pour qu'il existe un noyau</u> N <u>induisant l'opérateur</u> M, *il suffit que les deux conditions suivantes soient remplies:*

(a) *Il existe un relèvement linéaire* r *de* $L^{\infty}(\lambda)$ *dans* $B(\underline{\underline{E}})$.

(b) *Il existe sur* F *une topologie séparée, localement compacte, telle que* $\underline{\underline{F}}$ *coïncide avec la tribu de Baire et que* F *soit une réunion dénombrable d'ensembles compacts.*

De façon plus précise, si ces deux conditions sont remplies, il existe un noyau N *(unique) vérifiant les relations* (2) *et* (3) *(où* L *est définie par* (1)).

DEMONSTRATION. Exactement comme dans la première partie de la démonstration précédente, après avoir défini le noyau N (en remplaçant la locution ''mesure de Borel tendue'' par ''mesure de Baire''), on remarque que l'espace vectoriel

$$\underline{\underline{M}} = \{\ f:\ \ f \in B(\underline{\underline{F}}),\ \ Nf \sim Lf \ (\mathrm{mod}\, \lambda)\ \}$$

contient $C_c(F)$ et est stable par convergence monotone bornée. Il en résulte que $\underline{\underline{M}}$ contient toute fonction continue bornée positive (car une telle fonction est, dans nos hypothèses, l'enveloppe supérieure d'une suite croissante de fonctions continues à support compact), de sorte que $\underline{\underline{M}}$ coïncide avec $B(\underline{\underline{F}})$.

THEOREME 3. *Soit* M *un opérateur sous-markovien relatif au couple d'espaces probabilisés* $(E,\underline{\underline{E}},\lambda)$, $(F,\underline{\underline{F}},\mu)$. *Pour qu'il existe un noyau tendu* N *induisant l'opérateur* M, *il suffit que les deux conditions suivantes soient remplies:*

(a) *Il existe un relèvement linéaire* r *de* $L^{\infty}(\lambda)$ *dans* $B(\underline{\underline{E}})$.

(b) *Il existe sur* F *une topologie séparée, telle que* $\underline{\underline{F}}$ *coïncide avec la tribu borélienne et que la mesure* μ *soit tendue.*

DEMONSTRATION. Le théorème a déjà été démontré dans le cas particulier où l'espace F est compact (voir théorème 1). Dans le cas général, considérons une suite croissante (F_n) d'ensembles compacts de F, telle que la mesure μ soit portée par $\bigcup_n F_n$. Pour tout n, désignons par μ_n la restriction de μ à la tribu borélienne $\underline{\underline{F}}_n$ de F_n. A tout élément f de $L^{\infty}(\mu_n)$ associons l'élément de $L^{\infty}(\mu)$ déterminé par la fonction qui coïncide avec f sur F_n et qui est nulle sur $F \setminus F_n$. On obtient ainsi une immersion de $L^{\infty}(\mu_n)$ dans $L^{\infty}(\mu)$. Si on compose cette immersion avec l'opérateur M, on obtient un opérateur sous-markovien M_n appliquant $L^{\infty}(\mu_n)$ dans $L^{\infty}(\lambda)$.

Posons maintenant

(5) $$L_n = r \circ M_n \circ q_n ,$$

où q_n désigne la projection canonique de $B(\underline{\underline{F}}_n)$ sur $L^\infty(\mu_n)$. Il existe alors, d'après le théorème 1, un noyau sous-markovien tendu N_n, appliquant $B(\underline{\underline{F}}_n)$ dans $B(\underline{\underline{E}})$, tel que l'on ait

(6) $$N_n f = L_n f \quad \text{pour tout élément } f \text{ de } C(F_n),$$

(7) $$N_n f \sim L_n f \pmod{\lambda} \quad \text{pour tout élément } f \text{ de } B(\underline{\underline{F}}_n).$$

Désignons par R_n le noyau qui à tout élément f de $B(\underline{\underline{F}})$ associe sa restriction à F_n. Pour tout élément positif f de $B(\underline{\underline{F}})$ on a alors

$$M_n q_n R_n f \leqslant M_{n+1} q_{n+1} R_{n+1} f$$

et par conséquent, en appliquant r aux deux membres (et en tenant compte de (5)),

$$L_n R_n f \leqslant L_{n+1} R_{n+1} f.$$

Si la restriction de f à F_{n+1} est continue, cette dernière inégalité s'écrit aussi, grâce à (6),

(8) $$N_n R_n f \leqslant N_{n+1} R_{n+1} f.$$

Or, si on considère le noyau composé $N_n R_n$, on voit que, pour tout élément x de E, $N_n R_n(x, \cdot)$ est une mesure de Borel tendue sur l'espace F, portée par l'ensemble compact F_n. Par conséquent la relation (8) (valable pour toute fonction f positive dont la restriction à F_{n+1} est continue) entraîne l'inégalité entre noyaux

$$N_n R_n \leqslant N_{n+1} R_{n+1}.$$

Désignons alors par N le noyau $\sup_n N_n R_n$ (qui est encore tendu). Pour tout élément positif f de $B(\underline{\underline{F}})$ et pour tout n, on a, d'après (7),

$$N_n R_n f \sim L_n R_n f = r M_n q_n R_n f \pmod{\lambda}.$$

Il en résulte, par passage à la limite, $Nf \sim rMqf \pmod{\lambda}$, où q désigne la projection canonique de $B(\underline{\underline{F}})$ sur $L^\infty(\mu)$. Cela montre que l'opérateur sous-markovien M est induit par le noyau N.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. and C. IONESCU TULCEA, Topics in the theory of Lifting. Springer (1970).

[2] J. NEVEU, Bases mathématiques du calcul des probabilités. Masson et C^{ie} (1970).

[3] P.A. ZANZOTTO, Nuclei ed operatori markoviani. Rend. Sem. Mat. Padova, 51 (1974).