

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

C. DOLÉANS-DADE
PAUL-ANDRÉ MEYER
Une caractérisation de BMO

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 11 (1977), p. 383-389

http://www.numdam.org/item?id=SPS_1977__11__383_0

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

UNE CARACTERISATION DE $\underline{\underline{BMO}}$

par C. Doléans-Dade et P.A. Meyer

Ce travail est étroitement lié à un autre article fait en commun, où nous étudions les "inégalités de normes avec poids" pour les martingales continues à droite, et qui paraîtra ultérieurement. Nous étendons ici aux martingales continues à droite un critère d'appartenance à $\underline{\underline{BMO}}$ établi par KAZAMAKI [2] pour les martingales continues. Au lieu de le présenter sous la forme d'une "condition de MUCKENHOUPT", nous l'énonçons ainsi : pour qu'une martingale locale M appartienne à $\underline{\underline{BMO}}$, il faut et il suffit que l'exponentielle stochastique $\mathcal{E}(\lambda M)$ soit, pour λ assez petit en valeur absolue, un processus strictement positif et multiplicativement borné.

NOTATIONS ET RAPPELS

Soit $(\Omega, \underline{\underline{F}}, P)$ un espace probabilisé complet, muni d'une famille croissante $(\underline{\underline{F}}_t)_{t \geq 0}$ de sous-tribus de $\underline{\underline{F}}$, satisfaisant aux conditions habituelles (la famille est continue à droite, et $\underline{\underline{F}}_0$ contient tous les ensembles P -négligeables).

Soit M une martingale locale nulle en 0 . L'équation intégrale stochastique $Z_t = 1 + \int_0^t Z_{s-} dM_s$ admet, pour tout λ réel, une solution unique $Z = \mathcal{E}(\lambda M)$ dont l'expression explicite est bien connue

$$(1) \quad Z_t = \exp\left(\lambda M_t - \frac{\lambda^2}{2} \langle M^c, M^c \rangle_t \right) \prod_{s \leq t} (1 + \lambda \Delta M_s) e^{-\lambda \Delta M_s}$$

Si nécessaire, nous écrirons Z_t^λ pour mettre en évidence le rôle de λ .

Désignons par m la norme $\|M\|_{\underline{\underline{BMO}}}$, de sorte que l'on a

$$(2) \quad E[[M, M]_{T-}^{\infty} | \underline{\underline{F}}_T] \leq m^2 \text{ pour tout temps d'arrêt } T$$

(noter l'abréviation pour $[M, M]_{\infty} - [M, M]_{T-}$, qui sera utilisée plus loin). Le processus $|\Delta M_s| = |M_s - M_{s-}|$ est borné par m . Rappelons aussi l'inégalité de JOHN-NIRENBERG ([1], p.79 ; voir aussi [3], p.348, mais la constante n'y est pas donnée explicitement¹)

1. La constante δ de [1] est relative à la norme $\underline{\underline{BMO}}_1$, plus petite que la norme usuelle. Elle vaut à plus forte raison pour celle-ci.

$$(3) \quad \text{Si } m = \|M\|_{\text{BMO}} < 1/8, \text{ on a } E[e^{M^*}] \leq \frac{1}{1-8m}$$

Comme d'habitude, M^* désigne $\sup_t |M_t|$.

Nous utiliserons aussi les inégalités suivantes relatives à la fonction exponentielle

$$(4) \quad \frac{1}{e}x^2 \leq e^x - 1 - x \leq (e-2)x^2 \quad \text{si } |x| \leq 1$$

Voir [4], p.67. En fait, l'inégalité de gauche vaut pour $x \geq -1$, celle de droite pour $x \leq 1$.

Enfin, rappelons la définition des processus multiplicativement bornés, extraite de l'article sur les inégalités de normes avec poids.

DEFINITION. Soit (X_t) un processus adapté strictement positif, à trajectoires càdlàg. Nous disons que (X_t) est multiplicativement borné s'il existe une constante K telle que

$$(5a) \quad \frac{1}{K} \leq \frac{X_s}{X_s} \leq K \quad \text{hors d'une partie évanescgente de }]0, \infty[\times \Omega$$

$$(5b) \quad \frac{1}{K} X_s \leq E[X_t | \mathcal{F}_s] \leq K X_s \quad \text{p.s. } (s \leq t)$$

$$(5c) \quad \frac{1}{KX_s} \leq E\left[\frac{1}{X_t} \middle| \mathcal{F}_s\right] \leq \frac{1}{KX_s} \quad \text{p.s. } (s \leq t)$$

Nous introduisons aussi dans la note VI la condition suivante, où θ est un nombre réel $\neq 0$

$$(6) \quad b_\theta : \frac{1}{K} X_s \leq E[X_t^\theta | \mathcal{F}_s]^{1/\theta} \leq K X_s \quad \text{p.s.}$$

de sorte que (5b) est la condition b_1 , et (5c) la condition b_{-1} . Et nous montrons divers petits résultats, par exemple que si pour t fixé b_θ est satisfaite p.s. pour chaque $s \leq t$, alors on a pour tout couple (S, T) de temps d'arrêt, tel que $S \leq T \leq t$

$$(7) \quad \frac{1}{K^2} X_S \leq E[X_T^\theta | \mathcal{F}_S]^{1/\theta} \leq K^2 X_S \quad \text{p.s.}$$

Les processus que nous considérerons plus loin auront une limite à l'infini, et nous nous bornerons alors à vérifier (5b), (5c) ou (6) pour les couples de la forme (s, ∞) , et à appliquer (7).

Nous montrons dans l'autre article (n°5) que si un processus $(X_t)_{0 \leq t \leq \infty}$ est multiplicativement borné, alors la martingale $(E[X_\infty | \mathcal{F}_t])$ l'est également.

EXEMPLES DE PROCESSUS MULTIPLICATIVEMENT BORNES

Avant de nous occuper de l'exponentielle stochastique, donnons des exemples plus classiques.

1. Soit M une martingale locale nulle en 0, telle que $m = \|M\|_{\underline{\underline{BMO}}} < \infty$. et soit $X_t = e^{\lambda M_t}$. Montrons que X est multiplicativement borné si $|\lambda|$ est assez petit (inversement, si cette propriété est satisfaite pour une valeur de λ , on peut montrer que M appartient à $\underline{\underline{BMO}}$: voir la note VI, n°8). Il en résultera aussi que la martingale $E[X_\infty | \underline{\underline{F}}_t]$ est un processus multiplicativement borné pour $|\lambda|$ assez petit.

i) Nous savons que $|M_s - M_{s-}| \leq m = \|M\|_{\underline{\underline{BMO}}}$. Donc X_s/X_{s-} est compris entre e^{-m} et e^m , et la condition (5a) est satisfaite.

ii) Les fonctions $e^{\lambda x}$, $e^{-\lambda x}$ sont convexes. Par conséquent si $s \leq t \leq +\infty$

$$e^{\pm \lambda M_s} \leq E[e^{\pm \lambda M_t} | \underline{\underline{F}}_s] \text{ p.s.}$$

Nous avons donc les deux moitiés gauches de (5b), (5c).

iii) L'inégalité (3) de John-Nirenberg nous dit que pour $|\lambda| < 1/8m$

$$E[\exp(|\lambda| \sup_{r \geq s} |M_r - M_s|) | \underline{\underline{F}}_s] \leq C = \frac{1}{1 - 8m|\lambda|}$$

Nous avons donc aussi

$$E[e^{\pm \lambda (M_t - M_s)} | \underline{\underline{F}}_s] \leq C$$

ce qui nous donne les deux moitiés droites de (5b), (5c).

2. De même, nous allons montrer que le processus $e^{\lambda [M, M]_t}$ est multiplicativement borné si $|\lambda|$ est assez petit. Les sauts de $[M, M]$ étant bornés par m^2 , la condition (5a) est satisfaite comme ci-dessus.

Les conditions (5b) et (5c) seront établies si nous prouvons pour $\lambda > 0$ assez petit

$$\begin{aligned} \exp(\lambda [M, M]_s) &\leq E[\exp(\lambda [M, M]_t) | \underline{\underline{F}}_s] \leq K \exp(\lambda [M, M]_s) \\ K \exp(-\lambda [M, M]_s) &\leq E[\exp(-\lambda [M, M]_t) | \underline{\underline{F}}_s] \leq \exp(-\lambda [M, M]_s) \end{aligned}$$

L'inégalité de gauche de la première ligne et celle de droite sur la seconde ligne résultent de la croissance de $[M, M]$. Il est facile de déduire le côté gauche de la seconde ligne du côté droit de la première, grâce à la convexité de la fonction $1/x$. Ainsi, tout découle du lemme suivant, un peu plus fort que la moitié droite de la première ligne :

LEMME 1. Si $0 < \lambda < 1/m^2$ on a pour tout temps d'arrêt T

$$(8) \quad E[\exp(\lambda [M, M]_{T-}^{\infty}) | \underline{\underline{F}}_T] \leq 1/(1 - \lambda m^2) \text{ p.s. .}$$

DEMONSTRATION. Quitte à remplacer M par $\lambda^{1/2}M$, on se ramène au cas où $\lambda=1$, $m<1$. Nous ne supposons pas ici que $M_0=0$. Considérons le processus croissant $A_t=[M, M]_t$ ($A_0=0$, $A_0=M_0^2$). L'appartenance de M à $\underline{\underline{BMO}}$ s'écrit

$$E[A_\infty - A_{T-} | \underline{\underline{F}}_T] \leq m^2 \text{ pour tout temps d'arrêt } T$$

et il est alors bien connu que l'on a ([3], n° 23-24 p. 346)

$$E[A_\infty^p | \underline{\underline{F}}_0] \leq m^{2p} p! \text{ donc } E[\exp(A_\infty) | \underline{\underline{F}}_0] \leq 1/1-m^2$$

C'est à dire (8) lorsque $T=0$. Pour passer de là au cas général, on applique ce qui précède à la martingale $M'_t = M_{T+t} - M_{T-}$, par rapport à la famille de tribus $\underline{\underline{F}}'_t = \underline{\underline{F}}_{T+t}$ et à la loi P' obtenue par restriction de P à $\{T < \infty\}$.

REMARQUE. Inversement, si pour un $\mu > 0$ on a

$$E[\exp(\mu([M, M]_\infty - [M, M]_{T-})) | \underline{\underline{F}}_T] \leq c \text{ pour tout } T$$

alors M appartient à $\underline{\underline{BMO}}$. En effet, d'après l'inégalité de Jensen

$$E[[M, M]_\infty - [M, M]_{T-} | \underline{\underline{F}}_T] \leq \frac{1}{\mu} \log E[\exp(\mu([M, M]_\infty - [M, M]_{T-})) | \underline{\underline{F}}_T] \\ \leq (\log c) / \mu .$$

PARTIE DIRECTE

THEOREME 1. Soit M une martingale nulle en 0, telle que $m = \|M\|_{\underline{\underline{BMO}}} < 1/8$. Alors $Z = \mathcal{E}(\lambda M)$ est un processus strictement positif et multiplicativement borné si $|\lambda| < 1/2$.

Tout d'abord, nous avons $|\Delta M| \leq m$, donc Z est strictement positive pour $|\lambda| < 8$, et le rapport $Z_s / Z_{s-} = (1 + \lambda \Delta M_s) e^{-\lambda \Delta M_s}$ est borné supérieurement et inférieurement pour $|\lambda| < 8$.

Nous vérifions ensuite (5b). Z est une martingale locale positive, et l'inégalité $e^x \geq 1+x$ pour tout x entraîne que tous les facteurs du produit infini dans (1) sont compris entre 0 et 1. Nous avons donc

$$0 \leq Z_t \leq \exp(|\lambda M_t|) \leq \exp(|\lambda| M^*)$$

D'après l'inégalité de JOHN-NIRENBERG (3), si $|\lambda| \leq 1$ la v.a. $e^{|\lambda| M^*}$ est intégrable, la martingale locale (Z_t) est donc dominée dans L^1 , c'est donc une vraie martingale, et (5b) est vraie avec $K=1$.

On en déduit aussitôt la moitié gauche de (5c), toujours pour $|\lambda| \leq 1$. La fonction $1/x$ étant convexe sur $]0, \infty[$, (5b) nous donne

$$E\left[\frac{1}{Z_t} \middle| \underline{\underline{F}}_s\right] \geq \frac{1}{E[Z_t | \underline{\underline{F}}_s]} = \frac{1}{Z_s} .$$

Reste la moitié droite de (5c). Nous avons pour $|\lambda| < 1/2$

$$0 \leq \frac{1}{Z_\infty} \leq \exp(|\lambda|M^*) \exp\left(\frac{\lambda^2}{2} \langle M^c, M^c \rangle_\infty\right) \prod_s \frac{e^{\lambda \Delta M_s}}{1 + \lambda \Delta M_s}$$

Posons $x = \lambda \Delta M_s$, de sorte que $|x| < 1/16$. Alors d'après (4) nous avons

$$\frac{e^x}{1+x} \leq 1 + \frac{x^2(e-2)}{1+x} \leq 1+x^2 \leq e^{x^2}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } 0 \leq \frac{1}{Z_\infty} &\leq \exp(|\lambda|M^*) \exp\left(\frac{\lambda^2}{2} \langle M^c, M^c \rangle_\infty\right) \exp(\lambda^2 \sum_s \Delta M_s^2) \\ &\leq \exp(|\lambda|M^*) \exp(\lambda^2 [M, M]_\infty) \end{aligned}$$

Comme $\lambda < 1/2$, la formule (3) appliquée à la martingale $(2\lambda M_t)$ montre que $\exp(|\lambda|M^*)$ appartient à L^2 , avec une norme au plus égale à $(1-16|\lambda|m)^{-1/2}$. De même, on a $2\lambda m^2 < 1$, donc (lemme 1) $\exp(\lambda^2 [M, M]_\infty)$ appartient à L^2 , avec une norme au plus égale à $(1-2\lambda^2 m^2)^{-1/2}$. Donc $1/Z_\infty$ appartient à L^1 , avec une majoration explicite de la norme qu'il est inutile d'écrire.

Ce même raisonnement permet en fait de majorer, non pas $E[1/Z_\infty]$ seulement, mais $E[1/Z_\infty | \underline{F}_0]$. Appliquant alors ce résultat à la martingale $M'_t = M_{t+s} - M_s$ par rapport à la famille $\underline{F}'_t = \underline{F}_{s+t}$, on établit la moitié droite de (5c) pour s quelconque, $t = +\infty$. Nous avons fait remarquer au début que cela entraîne le cas général.

VARIANTE. L'article [2] de KAZAMAKI ne parle pas de processus multiplicativement bornés, mais de la condition A_p de MUCKENHOUPT. Il n'est pas nécessaire ici de savoir en quoi cela consiste, car nous montrons dans la note VI qu'elle équivaut à la condition b_θ que nous avons écrite plus haut (6) avec $\theta = -1/p-1$. Nous allons donc montrer que

Quel que soit $\theta < 0$, $Z = \ell(\lambda M)$ satisfait à (b_θ) dès que $|\lambda|$ est petit

Nous continuons à supposer que $m < 1/8$, $\lambda < 1/2$, de sorte que tout le calcul précédent reste valable, et nous avons en posant $\theta = -c$, $c > 0$

$$0 \leq Z_\infty^\theta = (1/Z_\infty)^c \leq \exp(c|\lambda|M^*) \exp(c\lambda^2 [M, M]_\infty)$$

et il reste donc à écrire que $2c|\lambda|m < 1/8$, $2c\lambda^2 m^2 < 1$ pour pouvoir appliquer (3) et (8) comme on l'a fait plus haut, et obtenir une majoration de la forme $E[Z_\infty^\theta] \leq f(\lambda, m, c)$. Par restriction à un élément de \underline{F}_0 , cela devient $E[Z_\infty^\theta | \underline{F}_0] \leq f(\lambda, m, c)$, puis par translation comme plus haut, à $E[Z_\infty^\theta / Z_s^\theta | \underline{F}_s] \leq f(\lambda, m, c)$, et on en déduit finalement la moitié droite de (6). La moitié gauche est une simple inégalité de convexité, puisque Z est une vraie martingale.

Nous ne nous occuperons pas du résultat analogue pour les valeurs positives de Θ , bien qu'il soit vrai (utiliser l'inégalité $(1+x)e^{-x} \leq e^{x^2}$ pour $|x| < 1/2$). En effet, le principal intérêt du résultat précédent lui vient de son rapport avec la condition de MUCKENHOUPT lorsque Θ est négatif.

Il faut noter d'ailleurs que les résultats analogues sont vrais (et plus faciles) pour l'exponentielle ordinaire. Ce sont alors des conséquences immédiates de l'inégalité de JOHN-NIRENBERG.

PARTIE RECIPROQUE

THEOREME 2. Supposons que pour une valeur non nulle de λ , $Z = \ell(\lambda M)$ soit un processus strictement positif et multiplicativement borné. Alors M appartient à $\underline{\text{BMO}}$.

DEMONSTRATION. Nous pouvons nous ramener au cas où $\lambda = 1$. Le fait que $Z = \ell(M)$ soit strictement positive entraîne que $\Delta M_s > -1$ pour tout s . La condition (5a) pour Z entraîne que les sauts de M sont bornés supérieurement par une constante H (dépendant seulement de la constante K de (5a)) que l'on peut supposer ≥ 1 . Ecrivons la partie droite de (5c) : si $s \leq t$

$$K \geq E \left[\frac{Z_s}{Z_t} \mid \underline{\mathbb{F}}_s \right] = E \left[\exp(M_s - M_t + \frac{1}{2} \langle M^c, M^c \rangle_s^t) \prod_{s < u \leq t} \frac{e^{\Delta M_u}}{1 + \Delta M_u} \mid \underline{\mathbb{F}}_s \right]$$

L'inégalité $e^x - 1 - x \geq x^2/e$ vaut pour tout $x \geq -1$; on a donc pour $x = \Delta M_s$ appartenant à l'intervalle $]-1, H]$

$$\frac{e^x}{1+x} \geq 1 + \frac{x^2}{e(1+x)} \geq 1 + x^2/c \geq e^{ax^2} \quad (c = e(1+H), a > 0)$$

car si $y = x^2/c$, $b = H^2/c$, on a $0 \leq y \leq b$ donc (concavité du log) $\log(1+y) \geq \frac{y}{b} \log(1+b)$, et finalement $a = \log(1+b)/bc$. Quitte à diminuer a , on peut supposer $a \leq 1/2$. Alors

$$\begin{aligned} K &\geq E \left[Z_s / Z_t \mid \underline{\mathbb{F}}_s \right] \geq E \left[\exp(M_s - M_t + a \langle M^c, M^c \rangle_s^t + a \sum_{s < u \leq t} \Delta M_u^2) \mid \underline{\mathbb{F}}_s \right] \\ &= E \left[\exp(M_s - M_t + a [M, M]_s^t) \mid \underline{\mathbb{F}}_s \right] \end{aligned}$$

Supposons pour un instant que M soit une vraie martingale. Appliquons l'inégalité de Jensen :

$$K \geq \exp(E[M_s - M_t + a [M, M]_s^t \mid \underline{\mathbb{F}}_s]) = \exp(E[a [M, M]_s^t \mid \underline{\mathbb{F}}_s])$$

et donc $E[[M, M]_s^t \mid \underline{\mathbb{F}}_s]$ est borné; M ayant des sauts bornés, cela entraîne que M appartient à $\underline{\text{BMO}}$. Maintenant, si M n'est pas une vraie martingale, nous appliquons ce résultat à la martingale arrêtée M^T , où $T =$

$\inf \{ t : |M_t| \geq n \}$; comme M a des sauts bornés, M^T est une vraie martingale bornée. D'autre part nous avons signalé (cf. (7)) que la propriété (5c) passe aux processus arrêtés , au prix du remplacement de K par K^2 . Ainsi les martingales M^T appartiennent à la même boule de $\underline{\underline{BMO}}$, et il ne reste plus qu'à faire tendre vers l'infini n et T .

VARIANTE. Soit M une martingale locale nulle en 0, et soit $Z = \varepsilon(M)$. Supposons que Z soit strictement positive et satisfasse à (5a) (de sorte que les sauts de M appartiennent à un intervalle $]-1, H]$ comme ci-dessus) et supposons que Z satisfasse à une condition b_θ , avec $\theta < 0$. Alors M appartient à $\underline{\underline{BMO}}$. C'est la forme que prend la partie réciproque du théorème de KAZAMAKI, pour des martingales locales continues à droite.

Reprenons la démonstration précédente, en posant $\theta = -c$. Nous avons

$$\begin{aligned} K^c &\geq E \left[\frac{Z_s^c}{Z_t^c} \middle| \underline{\underline{F}}_s \right] = E \left[\exp \left(c(M_s - M_t + \frac{1}{2} \langle M^c, M^c \rangle_s^t) \right) \prod_{s < u \leq t} \left(\frac{e^{\Delta M_u^c}}{1 + \Delta M_u^c} \right)^c \middle| \underline{\underline{F}}_s \right] \\ &\geq E \left[\exp \left(c(M_s - M_t) + \frac{1}{2} \langle M^c, M^c \rangle_s^t \right) \exp \left(\sum_{s < u \leq t} ac \Delta M_u^2 \right) \middle| \underline{\underline{F}}_s \right] \\ &\geq E \left[\exp \left(c(M_s - M_t + a[M, M]_s^t) \right) \middle| \underline{\underline{F}}_s \right] \end{aligned}$$

et on conclut comme plus haut.

REFERENCES

- [1] A. GARSIA. Martingale inequalities. Seminar notes on recent progress. Benjamin, Reading 1973.
- [2] N. KAZAMAKI. A characterization of BMO martingales. Séminaire de probabilités X, université de Strasbourg. Lecture Notes in M. 511, Springer-Verlag 1976.
- [3] P.A. MEYER . Un cours sur les intégrales stochastiques. Séminaire de probabilités X, université de Strasbourg. Lecture Notes in M. 511, Springer-Verlag 1976.
- [4] P.A. MEYER. Martingales and stochastic integrals I. Lecture Notes in M. 284, Springer-Verlag 1972 .