MARC YOR

Sur quelques approximations d'intégrales stochastiques

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 11 (1977), p. 518-528
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1977__11__518_0>

Université de Strasbourg 1975/76
Séminaire de Probabilités

SUR QUELQUES APPROXIMATIONS D'INTEGRALES STOCHASTIQUES.

par

Marc YOR

INTRODUCTION :

On développe ci-dessous quelques procédés d'approximation de certaines intégrales stochastiques, qui englobent en particulier l'approximation de Stratonovitch, et l'approximation à l'aide d'intégrales de Riemann ([4],[5]). On obtient en conséquence une généralisation de la formule de Ito. Ces résultats étendent ceux de la première partie de [5].

1. CADRE GENERAL ET PRELIMINAIRES.

Soit $(\Omega,\mathcal{F},P)$ espace de probabilité complet, muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t, t\geq 0)$ de sous-tribus de $\mathcal{F}$, vérifiant les conditions habituelles.
$\underline{\underline{S}}_c$ est l'ensemble des semi-martingales locales continues. D'après [2] (chapitre VI) tout processus $X\in \underline{\underline{S}}_c$ se décompose de façon unique en X_0+M+A où M (resp A) est une martingale locale continue (resp : un processus à variation bornée, continu), ces deux processus étant de plus nuls en 0 (on dit que $X = X_0+M+A$ est la décomposition canonique de X). On note $|A|$ le processus $\int_0^{\cdot} |dA_s|$.

Soit $t\in \mathbb{R}_+$. On appelle suite standard de subdivisions de $[0,t]$ toute suite $\tau_n = (0 = t_0^n<t_1^n<\dots<t_{p_n}^n = t)$ de subdivisions de plus en plus fines dont

le pas $\phi(\tau_n) = \sup|t^n_{i+1} - t^n_i|$ décroit vers 0 lorsque $(n \to \infty)$.

Le lemme suivant sera très utile par la suite :

LEMME. - Soient $t \in \mathbb{R}_+$, et $0 < \lambda \leq 1$.

$(\tau_n, n \in \mathbb{N})$ une suite de subdivisions standard de $[0,t]$ que l'on pointe par $t^\lambda_i = t_i + \lambda(t_{i+1} - t_i)$

$$X = X_o + M + A \ , \ Y = Y_o + N + B$$

les décompositions canoniques de deux semi-martingales continues telles que $M, |A|, N, |B|$ soient des processus bornés. On note $<X,Y> = <M,N> = U$ et $(f(u,\omega), u \geq 0)$ un processus $\mathcal{F}_u$ adapté, continu, et borné.

Alors,

1) la suite $\sup\limits_{\lambda \in [0,1]} E\Big[\Big(\sum\limits_{\tau_n} f(t_i)(X_{t^\lambda_i} - X_{t_i})(Y_{t^\lambda_i} - Y_{t_i}) - \sum\limits_{\tau_n} f(t_i)(U_{t^\lambda_i} - U_{t_i})\Big)^2\Big]$

converge vers 0 lorsque $n \to \infty$.

2) si $\lambda = 1$, ou si U - en tant que mesure aléatoire sur $\mathbb{R}_+$ - est presque sûrement absolument continu par rapport à la mesure de Lebesgue, on a :

$$\sum_{\tau_n} f(t_i)(X_{t^\lambda_i} - X_{t_i})(Y_{t^\lambda_i} - Y_{t_i}) \xrightarrow[L^2(\Omega,\mathcal{F},P)]{(n\to\infty)} \lambda \int_o^t f(s)dU_s$$

uniformément en $\lambda \in [0,1]$.

Démonstration : On montre facilement qu'il suffit de démontrer le lemme lorsque $X = Y = M$.

Rappelons que si $s < t$, $E^{\mathcal{F}_s}((M_t - M_s)^2) = E^{\mathcal{F}_s}(U_t - U_s)$.

D'autre part ,

$$E\Big[\Big\{\sum_{\tau_n} f(t_i)\big((M_{t_i^\lambda}-M_{t_i})^2 - E^{\mathcal{F}_{t_i}}(M_{t_i^\lambda}-M_{t_i})^2\big)\Big\}^2\Big]$$

$$= E\Big[\sum_{\tau_n} f(t_i)^2\big((M_{t_i^\lambda}-M_{t_i})^2 - E^{\mathcal{F}_{t_i}}(M_{t_i^\lambda}-M_{t_i})^2\big)^2\Big]$$

$$\leq 2\|f\|_\infty^2 \; E\Big[\sum_{\tau_n} (M_{t_i^\lambda}-M_{t_i})^4\Big]$$

$$\leq 2\|f\|_\infty^2 \; E\Big[\sum_{\tau_n} (M_{t_{i+1}}-M_{t_i})^4\Big] \quad (\text{car } M_{t_i^\lambda}-M_{t_i} = E(M_{t_{i+1}}-M_{t_i} \mid \mathcal{F}_{t_i^\lambda}))$$

et cette dernière expression converge vers 0 , à l'aide du théorème de convergence dominé, car $\sum_{\tau_n} (M_{t_{i+1}}-M_{t_i})^4 \leq \sup_{\tau_n} (M_{t_{i+1}}-M_{t_i})^2 \times \Big[\sum_{\tau_n} (M_{t_{i+1}}-M_{t_i})^2\Big]$.

Il est ensuite facile de montrer que

$$\sup_{\lambda\in[0,1]} E\Big[\sum_{\tau_n} f(t_i)\big((U_{t_i^\lambda}-U_{t_i}) - E^{\mathcal{F}_{t_i}}(U_{t_i^\lambda}-U_{t_i})\big)^2\Big]$$

converge vers 0 lorsque $n\to\infty$, et la première partie du lemme est démontrée.

Si $\lambda = 1$, 2) est immédiat, le processus f étant continu.

Sinon, on déduit 2) de l'hypothèse d'absolue continuité, et des remarques suivantes : . si a est une fonction continue sur $[0,t]$,

$$\Big|\sum_{\tau_n} \int_{t_i}^{t_i^\lambda} a(s)ds - \sum_{\tau_n} a(t_i)\lambda(t_{i+1}-t_i)\Big| \leq \sum_{\tau_n} \int_{t_i}^{t_i^\lambda} |a(s)-a(t_i)|ds \xrightarrow[(n\to\infty)]{} 0$$

et donc $\sum_{\tau_n} \int_{t_i}^{t_i^\lambda} a(s)ds \xrightarrow[(n\to\infty)]{} \lambda \int_0^t a(s)ds$ uniformément en λ .

. les fonctions continues étant denses dans $L^1([0,t],ds)$, le même résultat est vrai pour $a\in L^1([0,t],ds)$ □

Soit μ mesure de probabilité sur $([0,1],\mathcal{B}[0,1])$, $f\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$, et τ subdivision de $[0,t]$.

Si X et Y sont deux semi-martingales continues, on considère les sommes suivantes :

$$^{+}S^{\mu}_{\tau} = \sum_{\tau} \int_{o}^{1} f(X_{t_i} + s(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}))d\mu(s)\ (Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i})$$

$$(^{+}S_{\mu})_{\tau} = \sum_{\tau} \int_{o}^{1} f(X_{t_i + s(t_{i+1}-t_i)})d\mu(s)(Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i})$$

(on pourrait, pour désigner ces expressions, appeler la première (resp : seconde) somme μ. "approximation" spatiale (resp : temporelle) de $\int_{o}^{t} f(X_s)dY_s$ le long de τ). On étudie, au paragraphe 2, la convergence de $^{+}S^{\mu}_{\tau_n}$, où $(^{+}S_{\mu})_{\tau_n}$ lorsque (τ_n) est une suite de subdivisions standard de $[0,t]$, et $n \to \infty$.

2. RESULTATS DE CONVERGENCE.

Notons $\mu_1 = \int_{o}^{1} \lambda d\mu(\lambda)$.

THEOREME 1. - Soient X , $Y \in \underline{\underline{S}}_c$, $f \in C^1(R)$, et (τ_n) suite de subdivisions standard de $[0,t]$. Alors,

1) $^{+}S^{\mu}_{\tau_n} \xrightarrow[(P)]{(n\to\infty)} \mu.\int_{o}^{t} f(X_s)dY_s = \int_{o}^{t} f(X_s)dY_s + \mu_1 \int_{o}^{t} f'(X_s)d<X,Y>_s$

2) si la mesure $d_s<X,Y>_s(\omega)$ est presque sûrement absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue,

$$(^{+}S_{\mu})_{\tau_n} \xrightarrow[(P)]{(n\to\infty)} \mu.\int_{o}^{t} f(X_s)dY_s \ .$$

Démonstration : Soient $X = X_o + M + A$, $Y = Y_o + N + B$ les décompositions canoniques de X et Y (A et B sont les processus prévisibles à variation bornée).

Dans les deux cas, on peut supposer que Y est une martingale locale, car $\sum_{\tau_n} \int_0^1 f(X_{t_i} + s(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}))d\mu(s)(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$ converge presque sûrement vers $\int_0^t f(X_s)dB_s$ (et de même pour les μ. approximations temporelles).

- De plus, il suffit de montrer que les convergences ont lieu dans L^2, lorsque $M, |A|, Y$ sont bornées, et f est une fonction de classe C^1, bornée, ainsi que sa dérivée. En effet, soit $T_p = \text{Inf}(t \mid |M_t| \wedge |A|_t \wedge |Y_t| \geq p)$, et $f_p \in C^1(\mathbb{R})$, $f_p \equiv f$ sur $[-p,+p]$, $f_p \equiv 0$ hors de $[-p-1, p+1]$.

Alors, en remplaçant la notation $({}^+S_\mu)_\tau$ par $({}^+S_\mu)_\tau(f)$, on a, pour $\alpha > 0$,

$$P[|({}^+S_\mu)_{\tau_n}(f) - \mu.\int_0^t f(X_s)dY_s| > \alpha]$$

$$\leq P[T_p \leq t] + \frac{1}{\alpha}(E\{({}^+S_\mu)_{\tau_n}(f_p) - \mu.\int_0^t f_p(X_s)dY_s\}^2)^{\frac{1}{2}},$$

et les temps d'arrêt (T_p) croissent P ps vers $+\infty$.

- Soient donc $M, |A|, Y$ bornés et $f \in C_b^1(\mathbb{R})$. On a :

$${}^+S^\mu_{\tau_n} = \sum_{\tau_n} f(X_{t_i})(Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i})$$

$$+ \sum_{\tau_n} \int_0^1 d\mu(\lambda)\{f(X_{t_i} + \lambda(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})) - f(X_{t_i})\}(Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i}).$$

Le premier terme converge dans L^2 vers $\int_0^t f(X_s)dY_s$.

Ecrivons le second comme

$$\sum_{\tau_n} \int_0^1 \lambda d\mu(\lambda) \int_0^1 ds\, f'[X_{t_i} + \lambda s(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})](X_{t_{i+1}} - X_{t_i})(Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i})$$

$$= \mu_1 \sum_{\tau_n} f'(X_{t_i})(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})(Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i}) + J_{\tau_n}.$$

D'après le lemme, le premier terme converge dans L^2 vers $\mu_1 \int_0^t f'(X_s)d\langle X,Y\rangle_s$.

D'autre part, on a, en posant

$$F'_{\tau_n}(\omega) = \sup_{t_i \in \tau_n} \sup_{u \in [0,1]} |f'(X_{t_i} + u(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})) - f'(X_{t_i})|$$

et $U = X + Y$, $V = X - Y$:

$$|J_{\tau_n}| \leq F'_{\tau_n} \sum_{\tau_n} |(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})(Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i})|$$

$$\leq \frac{1}{4} F'_{\tau_n} \sum_{\tau_n} [(U_{t_{i+1}} - U_{t_i})^2 + (V_{t_{i+1}} - V_{t_i})^2] .$$

D'après la convergence vers 0 , lorsque $n \to \infty$, de F'_{τ_n} , et le lemme, on a donc :

$$J_{\tau_n} \xrightarrow[L^2]{n \to \infty} 0$$

- Sous les mêmes conditions, décomposons également $({}^{+}S_{\mu})_{\tau_n}$:

$$({}^{+}S_{\mu})_{\tau_n} = \sum_{\tau_n} f(X_{t_i})(Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i})$$

$$+ \sum_{\tau_n} \int_0^1 d\mu(\lambda) f'(X_{t_i})(X_{t_i^{\lambda}} - X_{t_i})(Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i})$$

$$+ \sum_{\tau_n} \int_0^1 d\mu(\lambda) \int_0^1 ds [f'(X_{t_i} + s(X_{t_i^{\lambda}} - X_{t_i})) - f'(X_{t_i})](X_{t_i^{\lambda}} - X_{t_i})(Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i}) .$$

Le premier terme converge dans L^2 vers $\int_0^t f(X_s)dY_s$.

Le second se décompose en : $I'_{\tau_n} + J'_{\tau_n}$, où :

$$I'_{\tau_n} = \sum_{\tau_n} \int_0^1 d\mu(\lambda) f'(X_{t_i})(X_{t_i^{\lambda}} - X_{t_i})(Y_{t_i^{\lambda}} - Y_{t_i})$$

$$J'_{\tau_n} = \sum_{\tau_n} \int_0^1 d\mu(\lambda) f'(X_{t_i})(X_{t_i^{\lambda}} - X_{t_i})(Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i^{\lambda}}) .$$

D'après l'hypothèse d'absolue continuité, et la seconde partie du lemme, on a :

$$E[(I'_{\tau_n} - \mu_1 \int_0^t f'(X_s)d<X,Y>_s)^2]$$

$$\leq \int_0^1 d\mu(\lambda)E(\sum_{\tau_n} f'(X_{t_i})(X_{t_i^\lambda}-X_{t_i})(Y_{t_i^\lambda}-Y_{t_i}) - \lambda \int_0^t f'(X_s)d<X,Y>_s)^2$$

expression convergeant vers 0 , lorsque $n\to\infty$. D'autre part,

$$E[(J'_{\tau_n})^2] \leq \int_0^1 d\mu(\lambda) \sum_{\tau_n} E[f'(X_{t_i})^2(X_{t_i^\lambda}-X_{t_i})^2(<Y,Y>_{t_{i+1}} - <Y,Y>_{t_i})]$$

expression qui converge vers 0 , d'après la continuité de X .
Enfin, la convergence vers 0 dans L^2 du troisème terme qui intervient dans le développement de $({}^+S_\mu)_{\tau_n}$ se montre de même que pour J_{τ_n} précédemment □

Remarquons ici que si $\mu = \varepsilon_o$, $\mu.\int_0^t f(X_s)dY_s$ est l'intégrale d'Ito, si $\mu = \varepsilon_{\frac{1}{2}}$, $\mu.\int_0^t f(X_s)dY_s$ est l'intégrale de Stratonovitch, obtenue par limite de $({}^+S_{\varepsilon_{\frac{1}{2}}})_{\tau_n}$, si $d_s<X,Y>_s(\omega)$ est absolument continue. Montrons, par un contre exemple, que cette condition est nécessaire pour obtenir la limite $\varepsilon_{\frac{1}{2}}.\int_0^t (f(X_s)dY_s$, définie précédemment : en [3] (pages 48-49)$^{(1)}$, Riesz et Nagy construisent une fonction $F:[0,1]\to[0,1]$ continue, croissante, presque partout dérivable, et telle que la dérivée $F'(x)$ - lorsqu'elle existe - soit nulle.

Voici cette construction : Soit $0<u<1$ et $\tau_n = \{t_k^n = \frac{k}{2^n} ; 0\leq k\leq 2^n\}$ la suite des subdivisions dyadiques de $[0,1]$.

Définissons $F_o(x) = x$, et pour $n\in\mathbb{N}^*$, le graphe de F_n comme la ligne brisée dont les sommets sont $(\frac{k}{2^n}, F_n(\frac{k}{2^n}))$. La suite $F_n(\frac{k}{2^n})$ est déterminée par les

(1) Cette référence m'a été fournie par J. de Sam Lazaro.

relations de récurrence :

$$F_{n+1}\left(\frac{2k}{2^{n+1}}\right) = F_n\left(\frac{k}{2^n}\right)$$

$$(0 \le k \le 2^n)$$

$$F_{n+1}\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right) = \frac{1-u}{2} F_n\left(\frac{k}{2^n}\right) + \frac{1+u}{2} F_n\left(\frac{k+1}{2^n}\right)$$

La suite F_n est croissante en n , et $F = \lim F_n$ vérifie les propriétés énoncées.

Revenons à l'intégrale de Stratonovitch : si B est un $(\mathcal{F}_t)$ mouvement brownien réel, posons $X_t = B_{F(t)}$; c'est une $\mathcal{F}_{F(t)}$ martingale continue, de processus croissant $F(t)$. On a l'égalité suivante :

$$\sum_{\tau_n} X_{\frac{t_{i+1}+t_i}{2}} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i}) = \sum_{\tau_n} X_{t_i}(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}) + \sum_{\tau_n} (X_{\frac{t_{i+1}+t_i}{2}} - X_{t_i})^2$$

$$+ \sum_{\tau_n} (X_{\frac{t_{i+1}+t_i}{2}} - X_{t_i})(X_{t_{i+1}} - X_{\frac{t_{i+1}+t_i}{2}}) .$$

Dans le membre de droite, le premier terme converge dans L^2 vers $\int_0^1 X_s dX_s$, le second a , d'après la première partie du lemme, même limite que

$$\sum_{\tau_n} \left(F\left(\frac{t_{i+1}+t_i}{2}\right) - F(t_i)\right) = \frac{1+u}{2} \sum_{\tau_n} F(t_{i+1}) - F(t_i)$$

$$= \frac{1+u}{2} F(1) = \frac{1+u}{2}$$

d'après les relations de récurrence vérifiées par (F_n) sur les dyadiques.

Enfin, le troisième terme converge vers 0 dans L^2 ; ainsi la limite dans L^2 de $\sum_{\tau_n} X_{\frac{t_{i+1}+t_i}{2}} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})$ est $\int_0^1 X_s\, dX_s + \frac{1+u}{2} \langle X,X\rangle_1$, expression différente de $\varepsilon_{\frac{1}{2}}.\int_0^1 X_s\, dX_s$, puisque $u \neq 0$.

Signalons également que les approximations $({}^+S^\mu)_{\tau_n}$ sont utilisées en

[4] et [5] lorsque μ est la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$.

Faisons une seconde remarque : il est naturel d'écrire $^{+}S_{\tau}^{\mu} = \int_{0}^{t} H_s^{\mu,\tau}\, dY_s$ (et une notation analogue pour $({}^{+}S_{\mu})_{\tau})$, où :

$$H_s^{\mu,\tau} = \sum_{\tau} \int_{0}^{1} f(X_{t_i} + u(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}))d\mu(u) 1_{]t_i, t_{i+1}]}(s) .$$

Le processus $H^{\mu,\tau}$ n'est pas adapté à $(\mathcal{F}_t)$ (les approximations $^{+}S^{\mu}$ sont en avance, ou avancées), ce qui crée les quelques difficultés rencontrées auparavant. Par contre, si l'on définit les approximations retardées

$$^{-}S_{\tau}^{\mu} = \sum_{\tau} \int_{0}^{1} d\mu(s) f(X_{t_i} + s(X_{t_{i-1}} - X_{t_i}))(Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i}) ,$$

on obtient aisément la convergence en probabilité de $^{-}S_{\tau_n}^{\mu}$ (ou $({}^{-}S_{\mu})_{\tau_n}$) vers $\int_{0}^{t} f(X_s)dY_s$.

3. UNE EXTENSION DE LA FORMULE D'ITO.

La partie 1) du théorème 1 s'étend aisément au cas où les semi-martingales continues X et Y sont à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, ce qui permet d'obtenir la généralisation suivante de la formule d'Ito (pour les semi-martingales continues) :

THEOREME 2. - Soit $\pi = \sum_{i=1}^{d} f_i(x_1, \ldots, x_d)dx_i$ une forme différentielle fermée de classe C^1 sur U ouvert de $\mathbb{R}^d$, et X semi-martingale continue à valeurs dans U (c'est-à-dire $P[\exists\, t, X_t \notin U] = 0$) .

On a alors l'égalité :

$$(*) \qquad \int_{X_{(0,t)}(\omega)} \pi = \int_{0}^{t} \sum_{i=1}^{d} f_i(X_s)dX_s^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \int_{0}^{t} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(X_s)d\langle X^i, X^j\rangle_s ,$$

où $X_{(0,t)}(\omega)$ désigne le chemin continu $(X_s(\omega), 0 \le s \le t)$.

Remarque : rappelons que si $\gamma : [0,1] \to U$ est un chemin seulement supposé continu, $\int_\gamma \pi$ est défini par $\hat{\pi}(\gamma(1)) - \hat{\pi}(\gamma(0))$, où $\hat{\pi}$ désigne une primitive continue de π le long d'une chaîne formée de boules recouvrant le graphe de γ.
En particulier, si π est une forme exacte dans U , $\hat{\pi}$ désigne une primitive de π dans U .

Démonstration : La formule (*) découle du théorème 1, et de :

$$\int_{X_{(o,t)}(\omega)} \pi = \lim_{n \to \infty} p.s \sum_{\tau_n} \int_o^1 \sum_{j=1}^d f_j(X_{t_i} + s(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}))ds(X^j_{t_{i+1}} - X^j_{t_i})$$

où (τ_n) est une suite de subdivisions standard de $[0,t]$ □

En particulier, si $Z = X + iY$ est une martingale locale conforme continue, à valeurs dans U ouvert de $\mathbb{C}$ ([1]) (c'est-à-dire : $<X,X> = <Y,Y>$ et $<X,Y> = 0$) et si $f : U \to \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe, on a :

$$\int_{Z_{(o,t)}(\omega)} f(z)dz = \int_o^t f(Z_s)dZ_s(ps) .$$

Cette égalité a été obtenue directement à l'aide de la formule d'Ito usuelle pour $f(z) = \frac{1}{z}$ et $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ si $P(Z_o = 0) = 0$ par R. Getoor et M. Sharpe en [1].

REFERENCES

[1] R. GETOOR et M. SHARPE — Conformal martingales. Inventiones Mathematicae (16) (271-308) - 1972.

[2] P.A. MEYER — Un cours sur les intégrales stochastiques. Séminaire de Probabilités X.

[3] F. RIESZ et B. NAGY — Leçons d'analyse fonctionnelle. Gauthier-Villars.

[4] E. WONG et M. ZAKAI Riemann-Stieltjes approximations of stochastic integrals. Z. Wahr. 12(87-97) (1969).

[5] M. YOR Formule de Cauchy relative à certains lacets browniens.
(à paraître au Bulletin de la S.M.F)

UNIVERSITE DE PARIS VI
Laboratoire de Probabilités
2, Place Jussieu - Tour 56
75230 PARIS CEDEX 05