CHRISTOPHE STRICKER

Une remarque sur les changements de temps et les martingales locales

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 12 (1978), p. 20-21

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1978__12__20_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1976/77

UNE REMARQUE SUR LES CHANGEMENTS DE TEMPS ET LES MARTINGALES LOCALES

par C. Stricker

Il est bien connu [1] que les changements de temps ne préservent pas la notion de martingale locale. On peut se demander s'il n'existe pas une classe de martingales locales, plus large que celle des martingales, et qui serait préservée par changement de temps. Nous prouvons ici que cette classe est extrêmement restreinte, et se réduit même aux martingales lorsque la tribu $\underline{\underline{F}}_0$ est triviale.

$(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ est un espace probabilisé muni d'une filtration $(\underline{\underline{F}}_t)$ qui satisfait aux conditions habituelles. Nous appelons <u>changement de temps</u> tout processus $(\tau_t)_{t\geq 0}$ continu à droite et croissant tel que, pour tout t, τ_t soit un temps d'arrêt <u>p.s. borné</u> de la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$. Si M $= (M_t)_{t\geq 0}$ est un processus continu à droite adapté à la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$, nous désignons par $\overline{M}=(\overline{M}_t)_{t\geq 0}$ le processus $(M_{\tau_t})_{t\geq 0}$ adapté à la famille $(\overline{\underline{\underline{F}}}_t) = (\underline{\underline{F}}_{\tau_t})_{t\geq 0}$.

Nous dirons que M est une <u>martingale conditionnelle</u> si l'on a pour tout t $\mathbb{E}[|M_t||\underline{\underline{F}}_0] < +\infty$ p.s. (donc aussi $\mathbb{E}[|M_t||\underline{\underline{F}}_s] < +\infty$ p.s. pour $0\leq s\leq t$) et $\mathbb{E}[M_t|\underline{\underline{F}}_s] = M_s$ p.s. pour tout $s<t$, ces espérances conditionnelles généralisées ayant un sens d'après la condition précédente. Si la tribu $\underline{\underline{F}}_0$ est triviale, une martingale conditionnelle est simplement une martingale. Dans le cas général, M est une martingale locale d'un type très particulier, puisqu'elle peut être réduite par des temps d'arrêt $\underline{\underline{F}}_0$-mesurables. Posons en effet $\mathbb{E}[|M_N||\underline{\underline{F}}_0] = A_N$, puis pour c>0

$$T = 0 \text{ si } A_N>c \quad , \quad T=N \text{ si } A_N\leq c \quad ; \text{ v.a. } \underline{\underline{F}}_0\text{-mesurable} .$$

Alors le processus $M_{t\wedge T}I_{\{T>0\}}$ est une martingale uniformément intégrable. Inversement, il est très facile de voir qu'une martingale locale qui peut être réduite par des temps d'arrêt $\underline{\underline{F}}_0$-mesurables est une martingale conditionnelle.

PROPOSITION. <u>Soit</u> M <u>une martingale locale</u>. <u>Alors les propriétés suivantes sont équivalentes</u>

1) <u>Pour tout changement de temps</u> (τ_t), $\overline{M}$ <u>est une martingale locale par rapport à la filtration</u> $(\overline{\underline{\underline{F}}}_t)$.

2) M <u>est une martingale conditionnelle</u>.

DEMONSTRATION. Soit M une martingale conditionnelle, et soit (τ_t) un changement de temps ; rappelons que τ_t est borné par une constante N , et appliquons le théorème d'arrêt de Doob à la martingale $(M_{t\wedge T}I_{\{T>0\}})$, où T est le temps d'arrêt (1). Nous voyons aussitôt que sur $\{T>0\}$

$$\mathbb{E}[|M_{\tau_t}||\underline{\underline{F}}_0] < \infty \text{ p.s.} \quad , \mathbb{E}[M_{\tau_t}|\underline{\underline{F}}_{\tau_s}] = M_{\tau_s} \quad \text{p.s.}$$

Faisant tendre c vers $+\infty$, nous voyons que $\overline{M}$ est une martingale locale, et même une martingale conditionnelle.

Pour la réciproque, nous allons utiliser uniquement des changements de temps de la forme suivante, où $0\leqq u<v$

(2) $\qquad \tau_t = u$ pour $t<1$, $\tau_t=v$ pour $t\geqq 1$.

LEMME. <u>Soit</u> $(\underline{\underline{G}}_t)$ <u>une famille de tribus telle que</u> $\underline{\underline{G}}_t=\underline{\underline{G}}_0$ <u>pour</u> $t<1$, $\underline{\underline{G}}_t=\underline{\underline{G}}_1$ <u>pour</u> $t\geqq 1$. <u>Alors un processus continu à droite adapté</u> X <u>est une martingale locale pour</u> $(\underline{\underline{G}}_t)$ <u>si et seulement si</u>

$$X_t = X_0 I_{\{t<1\}} + X_1 I_{\{t\geqq 1\}} \ \underline{\text{p.s.}} \ ; \ \mathbb{E}[|X_1||\underline{\underline{G}}_0] < \infty \ \underline{\text{p.s.}} \ ; \ \mathbb{E}[X_1|\underline{\underline{G}}_0]=X_0 \ \underline{\text{p.s.}}.$$

<u>Démonstration du lemme</u>. Toutes les martingales étant constantes sur $[0,t[$ et sur $[1,\infty[$, il en est de même des martingales locales. Soit (T_n) une suite qui croît vers $+\infty$ et réduit X . Comme $X^{T_n}I_{\{T_n>0\}}$ est une martingale uniformément intégrable, nous avons

$$\mathbb{E}[|X_{T_n\wedge 1}|I_{\{T_n>0\}}] < \infty \quad , \text{ donc } \quad \mathbb{E}[|X_1|I_{\{T_n\geqq 1\}}|\underline{\underline{G}}_0] < \infty$$

et comme $\{T_n<1\}\in\underline{\underline{G}}_{1-}=\underline{\underline{G}}_0$, nous voyons que $\mathbb{E}[|X_1||\underline{\underline{G}}_0] < \infty$ p.s.. De même la relation $\mathbb{E}[X_{T_n\wedge 1}I_{\{T_n>0\}}|\underline{\underline{G}}_0] = X_0 I_{\{T_n>0\}}$ nous donne $\mathbb{E}[X_1 I_{\{T_n\geqq 1\}}|\underline{\underline{G}}_0] = X_0 I_{\{T_n\geqq 1\}}$, et finalement $\mathbb{E}[X_1|\underline{\underline{G}}_0]=X_0$. La réciproque est facile.

Le lemme étant établi, la proposition est évidente. Prenant un changement de temps (2) avec u=0, nous trouvons d'abord que $\mathbb{E}[|M_v||\underline{\underline{F}}_0] < \infty$ p.s. pour tout v . Puis prenant $0\leqq u<v$ nous trouvons que $\mathbb{E}[M_v|\underline{\underline{F}}_u]=M_u$ p.s. et la proposition est établie.

REFERENCES

[1]. N. KAZAMAKI. Examples on local martingales. Sem. Proba. Strasbourg VI, Lect. Notes in Math. 258, p.98-99. Springer-Verlag 1972.