RAMATOULAYE SIDIBÉ

Martingales locales à accroissements indépendants

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 13 (1979), p. 132-137
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1979__13__132_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1977/78

MARTINGALES LOCALES A ACCROISSEMENTS INDEPENDANTS

par R. SIDIBE

Soit $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ un espace probabilisé complet, muni d'une filtration $(\underline{\underline{F}}_t)$ qui satisfait aux conditions habituelles, et soit $X=(X_t)$ un processus continu à droite et adapté, à accroissements indépendants par rapport à cette filtration : pour tout couple (s,t) tel que $s<t$, X_t-X_s est une v.a. indépendante de $\underline{\underline{F}}_s$. Nous supposerons aussi que $X_0=0$, ce qui est une normalisation triviale.

Il est naturel de se demander à quelle condition X est une <u>martingale locale</u> par rapport à $(\underline{\underline{F}}_t)$. Par exemple, un processus à accroissements indépendants et symétriques (tel que le processus de Cauchy) est il une martingale locale ?

Une réponse est suggérée par l'étude du problème analogue en temps discret : si $X=(X_n)$ est une martingale locale par rapport à la famille discrète $(\underline{\underline{F}}_n)$, on sait que

$$E[X_{n+1}|\underline{\underline{F}}_n] \text{ existe } \quad (\text{ i.e., } E[|X_{n+1}||\underline{\underline{F}}_n] < \infty \text{ p.s. })$$

$$E[X_{n+1}|\underline{\underline{F}}_n] = X_n \text{ p.s.}$$

Mais alors, il existe un ensemble $A\in\underline{\underline{F}}_n$, de probabilité non nulle, tel que $\int_A|X_{n+1}-X_n|P < \infty$; comme $|X_{n+1}-X_n|$ est indépendante de $\underline{\underline{F}}_n$, cela entraîne que $E[|X_{n+1}-X_n|]<\infty$; comme $X_0=0$, X_n est intégrable pour tout n, et le processus est une vraie martingale. Autrement dit, en temps discret, il n'y a pas de martingales locales à accroissements indépendants qui ne soient pas de vraies martingales.

Nous nous proposons d'étendre ce résultat au temps continu, sous l'hypothèse simplificatrice (sans doute assez facile à lever) que X est un processus à accroissements indépendants et <u>homogènes</u> (paih). Nous en donnons alors deux démonstrations : la première ne s'applique qu'au cas où $(\underline{\underline{F}}_t)$ est la <u>filtration naturelle</u> de (X_t) (rendue continue à droite et convenablement complétée). La seconde (due à M. Jacod) est plus générale.

PREMIERE DEMONSTRATION : REDUCTION DU PROBLEME

Le processus X étant càdlàg. , il n'admet dans un intervalle fini $[0,t]$ qu'un nombre fini de sauts dont l'amplitude dépasse 1. Posons

$$Y_t = \Sigma_{s\leq t} \Delta X_s 1_{\{|\Delta X_s|\geq 1\}} \quad ; \quad Z_t = X_t-Y_t$$

Les résultats suivants sont classiques dans la théorie des processus à accroissements indépendants :

1) Y et Z sont tous deux des paih par rapport à la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$
2) Y et Z sont indépendants

3) Le paih Z a des sauts bornés par 1 en valeur absolue (sa mesure de Lévy est portée par l'intervalle $[-1,1]$), et cela entraîne que $E[|Z_t|] < \infty$ pour tout t .

Puisque Z est un paih, il existe une constante a telle que $E[Z_t]=at$. Nous pouvons alors décomposer X en les deux paih indépendants

$$X_t = X_t^1 + X_t^2 \qquad X_t^1 = Y_t + at \qquad X_t^2 = Z_t - at$$

Comme X est une martingale locale, X^2 une vraie martingale, X^1 est une martingale locale, et il suffit de démontrer que X^1 <u>est une vraie martingale</u>.

Nous désignons par $\underline{\underline{F}}_t^o$ (resp. $\underline{\underline{F}}_t^1$, $\underline{\underline{F}}_t^2$) la tribu engendrée par les v.a. X_s , $s \leq t$ (resp. X_s^1, $s \leq t$, X_s^2 , $s \leq t$). Il est facile de vérifier que $\underline{\underline{F}}_t^o = \underline{\underline{F}}_t^1 \vee \underline{\underline{F}}_t^2$.

SECONDE REDUCTION

Le processus (X_t^1) est une martingale locale par rapport à $(\underline{\underline{F}}_t)$, adaptée à la famille $(\underline{\underline{F}}_t^1)$. Néanmoins, l'étape la plus délicate de la démonstration est le lemme suivant :

LEMME 1. (X_t^1) <u>est une martingale locale par rapport à sa famille naturelle</u> $(\underline{\underline{F}}_{t+}^1)$.

DEMONSTRATION. Désignons par W l'ensemble de toutes les applications càdlàg. de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, nulles en 0 , et par $\overline{W}$ l'ensemble $W \times W$. Si $\overline{w}=(w^1,w^2)$ appartient à $\overline{W}$, posons

$$\xi_t^1(\overline{w}) = w^1(t) \quad , \quad \xi_t^2(\overline{w}) = w^2(t)$$

Introduisons pour i=1,2 les tribus $\underline{\underline{K}}_t^i$ engendrées par les v.a. ξ_s^i , $s \leq t$, et les tribus $\underline{\underline{K}}_t^o = \underline{\underline{K}}_t^1 \vee \underline{\underline{K}}_t^2$.

Soit $f=(f^1,f^2)$ l'application de Ω dans $\overline{W}$ qui associe à $\omega \in \Omega$ le couple des trajectoires

$$f^1(\omega) = X_.^1(\omega) \quad , \quad f^2(\omega) = X_.^2(\omega)$$

L'application f est mesurable. Plus précisément, on a $f^{-1}(\underline{\underline{K}}_t^o) = \underline{\underline{F}}_t^o$, $f^{-1}(\underline{\underline{K}}_t^i) = \underline{\underline{F}}_t^i$. Nous notons $\overline{P}$ la loi image f(P) : l'indépendance des paih X^1 et X^2 signifie que $\overline{P}$ est une loi produit $P^1 \otimes P^2$.

Nous aurons besoin du résultat auxiliaire suivant : soit T un temps d'arrêt de la famille $(\underline{\underline{F}}_{t+}^o)$ sur Ω ; il existe alors un temps d'arrêt S de la famille $(\underline{\underline{K}}_{t+}^o)$ sur W tel que $T = S \circ f$. Nous laisserons au lecteur la démonstration, qui n'est pas difficile (on part des t.d'a. étagés, puis on fait un passage à la limite).

Puisque (X_t^1) est une martingale locale de $(\underline{\underline{F}}_t)$, il existe des temps d'arrêt T_n de $(\underline{\underline{F}}_t)$ tels que $T_n \uparrow \infty$ p.s., et que l'on ait pour tout n

$$E[\ \sup_t |X^1_{t\wedge T_n}|\ ] < \infty$$

Associons à T_n un temps d'arrêt S_n sur $\overline{W}$ tel que $T_n = S_n \circ f$. Nous avons que $S_n \uparrow \infty$ p.s. et que

$$E[\ \sup_t |\xi^1_{t\wedge S_n}|\ ] < \infty$$

Plus explicitement

$$\int_{W^1\times W^2} \sup_t |\xi^1_{t\wedge S_n}(w^1,w^2)(w^1)| P^1(dw^1)P^2(dw^2) < \infty$$

D'après le théorème de Fubini, nous avons pour P^2-presque tout w^2

$$S_n(.,w^2)\uparrow\infty \quad P^1\text{-p.s.} \qquad \int_{W^1} \sup_t |\xi^1_{t\wedge S_n}(.,w^2)| P^1(dw^1) < \infty$$

Posons sur Ω $R_n(\omega) = S_n(d^1(\omega),w^2)$; on vérifie aussitôt que $R_n \uparrow\infty$ p.s., que R_n est un temps d'arrêt de la famille $(\underline{\underline{F}}^1_{t+})$ et que

$$E[\ \sup_t |X^1_{t\wedge R_n}|\ ] < \infty$$

Le processus $(X^1_{t\wedge R_n})$ est une martingale par rapport à $(\underline{\underline{F}}_t)$, adaptée à $(\underline{\underline{F}}^1_{t+})$, donc une martingale par rapport à $(\underline{\underline{F}}^1_{t+})$; donc (X^1_t) est une martingale locale par rapport à $(\underline{\underline{F}}^1_{t+})$, à accroissements indépendants. Il nous reste à montrer que c'est une vraie martingale.

Nous omettons maintenant l'exposant 1 de (X^1_t) et $(\underline{\underline{F}}^1_t)$: nous sommes ramenés au même problème qu'au début, mais avec la propriété supplémentaire que le paih (X_t) ne possède qu'un nombre fini de sauts dans tout intervalle fini.

ETUDE DU PROCESSUS $X=X^1$

Nous désignons par $T_1,T_2,\dots,T_n$.. les instants de saut successifs de X , et par $\Delta X_1,\dots\Delta X_n$ les sauts correspondants. Nous posons

$$Y_t = \Sigma_i\ \Delta X_i 1_{\{T_i\leq t\}}$$

de sorte que $X_t = Y_t + at$ est une martingale locale. Nous admettons provisoirement le lemme suivant :

LEMME 2. <u>Les v.a.</u> T_1, T_2-T_1, $\dots T_n-T_{n-1}\dots$; $\Delta X_1,\dots,\Delta X_n\dots$ <u>sont toutes indépendantes</u> ; <u>celles du premier groupe ont une même loi exponentielle</u> ; <u>celles du second groupe ont toutes la même loi</u>.

L'étape fondamentale de la démonstration est la suivante :

LEMME 3. ΔX_1 <u>est une v.a. intégrable</u>.

DEMONSTRATION. Nous commençons par vérifier que ΔX_1 et $\underline{\underline{F}}_{T_1-}$ sont indépendantes. La famille $(\underline{\underline{F}}_t)$ étant la filtration naturelle de (X_t) ou de (Y_t), $\underline{\underline{F}}_{T_1-}$ est engendrée par les ensembles de la forme

$$A = \{\ Y_{s_1}\leq a_1,\dots,Y_{s_k}\leq a_k,\ t<T_1\}\ \text{avec}\ s_1,\dots,s_k\leq t$$

Comme Y est constant sur $[0,T_1[$, ou bien $A=\emptyset$ (donc indépendant de ΔX_1), ou bien $A=\{t<T_1\}$, et l'indépendance résulte du lemme 2.

Soit alors S un temps d'arrêt de $(\underline{\underline{F}}_t)$ réduisant la martingale locale $X_t=Y_t+at$; $S\wedge T_1$ la réduit aussi, et la v.a. à l'infini $Y_{S\wedge T_1}+a.S\wedge T_1$ est intégrable. Comme T_1 est intégrable, $Y_{S\wedge T_1}$ l'est aussi. Donc

$$\int_\Omega |\Delta X_1| 1_{\{T_1\leqq S\}} dP < \infty$$

Or $\{T_1\leqq S\}$ appartient à $\underline{\underline{F}}_{T_1-}$, et sa probabilité est non nulle si S est assez grand. Il est indépendant de $|\Delta X_1|$, donc

$$E[|\Delta X_1|]P\{T_1\leqq S\} < \infty$$

et le lemme est établi.

Le lemme suivant achève alors la démonstration :

LEMME 4. <u>Le processus</u> (X_t) <u>appartient à la classe</u> (D) <u>sur tout intervalle borné</u> (<u>et c'est donc une vraie martingale</u>).

DEMONSTRATION. Comme $X_t=Y_t+at$, il suffit de démontrer le même résultat pour Y_t, ou encore de démontrer que le processus croissant

$$A_t = \Sigma_i |\Delta X_i| 1_{\{T_i\leqq t\}}$$

est tel que $E[A_t]$ pour tout t. Or on a d'après l'indépendance mentionnée dans le lemme 2

$$E[A_t] = \Sigma_i E[|\Delta X_i|]P\{T_i\leqq t\} = E[|\Delta X_1|]E[N_t]$$

où N_t est le nombre des $T_i\leqq t$. Or il est bien connu que N_t obéit à une loi de Poisson, donc $E[N_t]<\infty$, et le théorème est établi.

SUR LA DEMONSTRATION DU LEMME 2

Soit (X_t) un paih dont les sauts sont bornés inférieurement en module par 1. Comme dans l'énoncé du lemme 2, nous désignons par $T_1,\ldots$ les instants des sauts et par $\Delta X_1,\ldots$ les amplitudes des sauts. Le lemme 2 est "classique", mais nous n'en avons pas trouvé de référence commode. Aussi allons nous le rattacher à d'autres résultats "classiques" sur les paih, qui figurent dans les exposés courants.

Nous prouvons d'abord l'indépendance de T_1 et ΔX_1 . Pour cela il suffit de montrer que $P\{a\leqq\Delta X_1\leqq b,\ t<T_1\}= P\{a\leqq\Delta X_1\leqq b\}P\{t<T_1\}$ pour tout $t\in\mathbb{R}_+$ et tout couple (a,b). Nous décomposons X en Y+Z où

$$Y_t = \Sigma_{s\leqq t} \Delta X_s I_{\{a\leqq\Delta X_s\leqq b\}} \quad , \quad Z_t=X_t-Y_t$$

Les processus Y et Z sont des paih par rapport à la filtration naturelle de X, et n'ont pas de sauts communs : <u>ils sont donc indépendants</u>. Désignons par U et V les instants de premier saut de Y et Z respectivement : ce sont des v.a. exponentielles indépendantes, de paramètres λ,μ. On a

$$T_1=U\wedge V \quad ; \quad \{a\leqq\Delta X_1\leqq b\} = \{U<V\}$$

Ainsi la formule à établir est

(*) $P\{U<V,\ t<U\wedge V\} = P\{U<V\}P\{t<U\wedge V\}$ ($= P\{U<V\}P\{t<U\}P\{t<V\}$)

Or on a, U et V étant indépendantes

$$P\{U<V\} = \int_{\{(u,v)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+,\ u<v\}} \lambda\mu e^{-\lambda u}e^{-\mu v}dudv = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

donc le côté droit de (*) vaut $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}$. D'autre part

$$P\{U<V,\ t<U\wedge V\} = P\{t<U<V\}$$
$$= \int_{\{t<u<v\}} \lambda\mu e^{-\lambda u}e^{-\mu v}dudv = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t}$$

et on a bien l'égalité (*).

Pour établir ensuite le lemme 2 dans toute sa force, on raisonne par récurrence : admettant que $T_1,..T_n-T_{n-1}$; $\Delta X_1,\dots,\Delta X_n$ sont des v.a. toutes indépendantes, de même loi dans chacun des deux groupes, on utilise la propriété de Markov forte à l'instant T_n : le processus $(X'_t)=(X_{T_n+t}-X_{T_n})$ est un paih de même loi que (X_t), indépendant de la tribu $(\underline{\underline{F}}_{T_n})$. Donc les v.a. correspondantes $T'_1= T_{n+1}-T_n$, $\Delta X'_1=\Delta X_{n+1}$ sont indépendantes entre elles, et indépendantes de $\underline{\underline{F}}_{T_n}$, et ont même loi que T_1 et ΔX_1 respectivement. Comme $T_1,\dots T_n-T_{n-1},\Delta X_1,\dots,\Delta X_n$ sont $\underline{\underline{F}}_{T_n}$-mesurables, la récurrence gagne une unité, et le lemme en découle.

SECONDE DEMONSTRATION

M. J. Jacod, ayant été mis au courant des résultats qui précèdent, a suggéré la méthode suivante, qui repose sur la notion de mesure de Lévy d'une martingale locale

Considérons la mesure aléatoire suivante sur $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^*$ (positive)

(1) $\mu(\omega,\ ds,dz\ ) = \Sigma_{\{t>0\ :\ \Delta X_t\neq 0\}}\ \varepsilon_{t,\Delta X_t(\omega)}(ds,dz)$

Alors le processus croissant $A_t=\int_{[0,t]\times\mathbb{R}^*} (z^2\wedge|z|)\mu(ds,dz)$ est égal à $\Sigma_{s\leq t}\ \Delta X_s^2 I_{\{|\Delta X_s|\leq 1\}} +|\Delta X_s|I_{\{|\Delta X_s|\geq 1\}}$, et on sait, X étant une martingale locale, qu'il est localement intégrable. Il admet donc un compensateur prévisible $\tilde{A}_t$, et la mesure aléatoire μ admet une compensatrice prévisible ν . La représentation des martingales locales comme somme d'une partie continue et d'une somme compensée de sauts peut alors s'écrire symboliquement

(2) $$X_t = X_t^c + \int_{[0,t]\times\mathbb{R}^*} z.(\mu-\nu)(ds,dz)$$

Ces résultats figurent dans les articles [1] et [2] (sous une forme beaucoup plus générale), et sont cités explicitement dans [3].

Voici le principe de la démonstration de M. Jacod : tout d'abord, si la martingale locale X est un p.a.i., il est facile de voir que X^c en est un aussi . Or tous les p.a.i. à trajectoires continues sont gaussiens, et X^c est une vraie martingale. Nous pouvons donc supposer X purement discontinu. Comme X est un p.a.i., le compensateur prévisible ν est une mesure non aléatoire , de sorte que la condition

$$\tilde{A}_t = \int_{[0,t]\times\mathbb{R}^*} (z^2\wedge|z|)\nu(ds,dz) < \infty \text{ p.s.}$$

entraîne $E[\tilde{A}_t]<\infty$, donc $E[A_t]<\infty$. On peut alors voir que X_t est intégrable, et que X est une vraie martingale.

Le principe étant ainsi exposé, voici comment on peut faire la démonstration en détails, de la manière la plus élémentaire possible. Ici encore, pour simplifier, nous supposons que X est un paih.

Comme dans la première réduction du début de l'exposé, on peut se ramener au cas où $X=X^1$, autrement dit, les sauts de X sont tous $\geqq 1$ en valeur absolue, et X est la somme compensée de ses sauts. Cette réduction nous débarrasse de la partie continue, et de la difficulté relative aux petits sauts. La mesure $\mu(\omega, ds,dz)$ ne charge pas $\mathbb{R}_+\times]-1,1[$. La mesure non aléatoire $\nu(ds,dz)$ est égale à $ds\times\bar{\nu}(dz)$, où $\bar{\nu}$ est la mesure de Lévy usuelle, et elle ne charge pas $\mathbb{R}_+\times]-1,1[$. Dans ces conditions, l'intégrabilité de $\tilde{A}_t$ expliquée plus haut s'écrit, puisque $|z|\leq z^2$ ν-p.s.

$$\int_{[0,t]\times\mathbb{R}^*} |z|\nu(ds,dz) < \infty \qquad \text{ou } \int|z|\bar{\nu}(dz) < \infty$$

et en revenant à μ , $E[\Sigma_{s\leq t}|\Delta X_s|] < \infty$ pour tout t. La représentation (2) de X s'écrit alors de manière élémentaire

$$X_t = \Sigma_{s\leqq t}\, \Delta X_s - at \qquad \text{où } a = \int_{\mathbb{R}} z\bar{\nu}(dz)$$

et le théorème est établi. La réduction du début nous a évité les difficultés de la mesure de Lévy près de 0.

REFERENCES

[1]. J. Jacod : Multivariate point processes : predictable projection, Radon-Nikodym derivatives, representation of martingales. ZfW 31, 1975, p. 235-253.

[2] J. Jacod et J. Mémin : Caractéristiques locales et conditions de continuité absolue pour les semi-martingales. ZfW 35, 1976, p. 1-37.

[3] M. Yor : Sur les intégrales stochastiques optionnelles et une suite remarquable de formules exponentielles. Sém. Prob. X, LN 511, Springer 1976.

Institut de Rech. Math. Avancée

Strasbourg