C. STRICKER

Sur la p-variation des surmartingales

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 13 (1979), p. 233-237
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1979__13__233_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1977/78

SUR LA p-VARIATION DES SURMARTINGALES

par C. Stricker.

L'objet de cet article est d'étendre à toutes les semimartingales la méthode de Bruneau [1] pour l'étude de la p-variation des martingales continues. Ainsi nous retrouvons certains résultats de Lépingle [2], sans utiliser le plongement des martingales dans le mouvement brownien (Monroe [3]). Le seul résultat dont nous avons besoin est connu depuis longtemps, il s'agit de l'inégalité de Doob sur le nombre de montées d'une surmartingale. Auparavant, nous donnons une autre démonstration de la proposition 2 de Bruneau [1], qui établit un lien entre le nombre de montées d'une fonction déterministe et sa p-variation.

1. NOMBRE DE MONTEES ET p-VARIATION

Rappelons d'abord quelques notations et définitions. Soient f une fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, et a,b deux nombres tels que a<b. Le <u>nombre des montées de</u> f <u>sur</u>]a,b[est la borne supérieure des entiers n tels qu'il existe une suite $(t_i)_{1\leqq i\leqq 2n}$ d'éléments de $\mathbb{R}_+$ avec

$$t_1<t_2\dots<t_{2n-1}<t_{2n}\ ,\quad f(t_i)\leqq a \text{ pour i impair, } f(t_i)\geqq b \text{ pour i pair}$$

Ce nombre est noté $M_a^b(f)$. Nous poserons pour tout h>0

$$M(f,h) = \Sigma_{k\in\mathbf{Z}}\ M_{kh}^{(k+1)h}(f)$$

Soit p un nombre $\geqq 1$. La fonction est dite <u>à p-variation bornée</u> si le nombre

$$v_p(f) = \sup \sum_{i=1}^{n-1} |f(t_{i+1})-f(t_i)|^p$$

est fini, la borne supérieure étant prise sur l'ensemble de toutes les suites croissantes $(t_i)_{1\leqq i\leqq n}$ d'éléments de $\mathbb{R}_+$.

Enfin, nous poserons $\Theta=\Theta(f)= \sup_s f(s)-\inf_s f(s)$, l'oscillation de f.

Bruneau a établi dans [1] la proposition suivante lorsque f est continue. Nous l'étendrons ici au cas général.

PROPOSITION 1. <u>On a pour tout</u> h>0

(1) $$h^p M(f,h) \leqq v_p(f)$$

<u>et inversement</u>, <u>il existe pour tout</u> r>p <u>une constante</u> $c=c_{r,p}$ <u>telle que</u>

(2) $$v_r(f) \leqq c(\ \Theta^r + \Theta^{r-p}\sup_{h=\lambda 2^{-i}} h^p M(f,h))$$

<u>où</u> λ <u>est un nombre</u> $\geqq\Theta$, <u>et</u> i <u>est entier positif</u>.

DEMONSTRATION. Nous allons d'abord supposer f continue. Comment calculer alors $M_a^b(f)$? Définissons $v_0=0$, puis posons par récurrence

$$v_1 = \inf\{s\geqq 0 : f(s)\leqq a\} , \quad v_2= \inf\{s\geqq v_1 : f(s)\geqq b\}$$

$$v_{2i+1} = \inf\{s\geqq v_{2i} : f(s)\leqq a\} , \quad v_{2i+2} = \inf\{s\geqq v_{2i+1} : f(s)\geqq b\}$$

Alors $M_a^b(f)$ est le plus grand entier i tel que $v_{2i}<\infty$. Appelons <u>intervalles de montée</u>, pour $i\leqq M_a^b(f)$, les intervalles (s_i,t_i), où

$$t_i=v_{2i} \quad , \quad s_i = \sup\{s\leqq t_i : f(s)\leqq a\}$$

Le nombre des intervalles de montée est égal à $M_a^b(f)$; on a $f(s_i)=a$, $f(t_i)=b$, et $a<f(s)<b$ pour $s_i<s<t_i$. On a donc

$$M_a^b(f) = \frac{1}{(b-a)^p}\Sigma_i |f(t_i)-f(s_i)|^p$$

la sommation étant prise sur tous les intervalles de montée (s_i,t_i) relatifs à a,b. Sommons maintenant sur les couples (a,b) de la forme (kh, (k+1)h) : les intervalles de montée correspondants sont tous disjoints, et par conséquent

$$M(f,h) \leqq \frac{1}{h^p} v_p(f)$$

c'est à dire (1) lorsque f est continue. Passons au cas général. Lorsque $v_p(f)=+\infty$, il n'y a rien à démontrer. Supposons donc $v_p(f)<\infty$; il est bien connu qu'alors la fonction f a des limites à droite et à gauche. Enumérons en une suite (d_n) l'ensemble des points de discontinuité de f , et posons

$$\rho(t) = t + \sum_n 2^{-n} I_{\{d_n\leqq t\}}$$

$$\sigma(t) = \inf\{ s : \rho(s)\geqq t \}$$

σ est croissante, continue, telle que $\sigma(0)=0$, $\sigma(+\infty)=+\infty$. Nous définissons une nouvelle fonction g en posant

- si s n'est pas dans un intervalle $[\alpha,\beta]$ où σ est constante, $g(s)= f(\sigma(s))$;

- si s appartient à $[\alpha,\beta]$, alors nous prenons

$$g(\alpha) = f(\sigma(s)-) , \quad g((\alpha+\beta)/2)=f(\sigma(s)) , \quad g(\beta)=f(\sigma(s)+)$$

et aux autres points nous procédons par interpolation linéaire. Il n'est pas très difficile de voir que g est continue, que

$$M_a^b(f) = M_a^b(g) \quad , \quad v_p(f)=v_p(g)$$

donc la formule (1) pour g entraîne la même formule pour f.

Passons à la formule (2). Soit $\lambda\geqq\Theta$, et soit $(t_i)_{i=1,\dots,n}$ une suite croissante d'éléments de $\mathbb{R}_+$. On a $|f(t_{i+1})-f(t_i)| \leqq \Theta$, donc il existe un plus grand entier $m(i)\geqq 0$ (ou $+\infty$) tel que $|f(t_{i+1})-f(t_i)|\leqq \lambda.2^{-m(i)}$. A chaque entier m nous associons l'ensemble I_m des $i\in\{1,\dots,n\}$ tels que $m(i)=m$; ces ensembles sont disjoints, et nous avons

$$(3) \qquad \Sigma_{i=1}^{n-1} |f(t_{i+1})-f(t_i)|^r\leqq \Sigma_{m=0}^{\infty} \operatorname{Card}(I_m)\lambda^r 2^{-mr}$$

D'autre part, si $m(i)=m$ on a $|f(t_{i+1})-f(t_i)| > \lambda 2^{-m-1}$. Partageons I_m en deux ensembles I'_m et I''_m suivant le signe de $f(t_{i+1})-f(t_i)$.

- S'il est positif, il existe un entier k tel que $f(t_i) < k\lambda 2^{-m-2} < (k+1)\lambda 2^{-m-2} < f(t_{i+1})$, et par conséquent

$$\mathrm{Card}(I'_m) \leqq \Sigma_k M_{k\lambda 2^{-m-2}}^{(k+1)\lambda 2^{-m-2}}(f) \leqq M(f,\lambda 2^{-m-2})$$

- S'il est négatif, on trouve des descentes au lieu de montées. Mais le nombre D_a^b de descentes sur (a,b) est majoré par M_a^b+1, et le nombre des k sur lesquels on doit sommer, i.e. tels que $[k\lambda 2^{-m-2},(k+1)\lambda 2^{-m-2}]$ soit contenu dans l'intervalle de variation de f, est au plus 2^{m+2}. Ainsi $\mathrm{Card}(I''_m) \leqq 2^{m+2}+ M(f,\lambda 2^{-m-2})$.

Soit $H = \sup h^p M(f,h)$, où h parcourt la suite $\lambda 2^{-i}$. Nous avons $M(f,\lambda 2^{-m-2}) \leqq H\lambda^{-p}2^{p(m+2)}$, donc

$$\mathrm{Card}(I_m) \leqq 2^{m+2} + 2H\lambda^{-p}2^{p(m+2)}$$

Revenant alors à (3), nous obtenons

$$v_r(f) \leqq 4\lambda^r \Sigma_m 2^{m(1-r)} + 8H\lambda^{r-p}\Sigma_m 2^{m(p-r)}$$

d'où l'on tire aussitôt l'inégalité (2).

REMARQUE. Il est assez facile de donner des exemples de fonctions f telles que (pour $p>1$)

$$\sup_{h>0} h^p M(f,h) < +\infty \qquad \text{et} \qquad v_p(f) = +\infty$$

Ainsi, considérons la fonction f sur $[1,\infty[$ dont le graphe est une ligne brisée joignant les points $(i,0)$ (i entier impair) et $(i, \sqrt{2/i})$ (i entier pair). On vérifie aussitôt que $v_2(f)=+\infty$. D'autre part, $M_{kh}^{(k+1)h}(f) = M_0^{(k+1)h}(f)$ est le nombre des entiers pairs 2j tels que $j\geq 1$, $\sqrt{j} \leqq 1/(k+1)h$, il vaut donc au plus $h^{-2}/(k+1)^2$, et on a

$$M(f,h) \leqq h^{-2}\Sigma_1^\infty n^{-2} \quad .$$

2. LA r-VARIATION DES SEMIMARTINGALES, r>2 .

Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus réel, défini sur un espace probabilisé filtré $(\Omega,\underline{\underline{F}},(\underline{\underline{F}}_t),P)$ satisfaisant aux conditions habituelles. Nous désignerons par $v_p(\omega,X)$, $M(\omega,X,h)$ les quantités définies dans la première partie de cette note, relatives à la fonction réelle $f(t)=X_t(\omega)$.

La p-variation d'une fonction sur un intervalle fini, au lieu de $\mathbb{R}_+$ tout entier, se définit de manière évidente. Notre but ici est de démontrer la proposition suivante, due à Lépingle, à partir de la proposition 1.

PROPOSITION 2. Soit X une semimartingale, et soit $r>2$. Alors pour presque tout $\omega\in\Omega$, la trajectoire $X_\cdot(\omega)$ est à r-variation finie sur tout intervalle borné.

DEMONSTRATION. 1) L'énoncé étant local, nous pouvons supposer, sans perdre de généralité, que le processus X est constant pour $t \geqq t_0$, et considérer alors sa r-variation $v(\omega,X)$ sur $\mathbb{R}_+$ tout entier.

2) Nous avons aussi le droit de remplacer la loi P par une loi équivalente : en effet, X reste alors une semimartingale, et les ensembles de mesure nulle sont les mêmes. Comme X est arrêté à t_0 , nous pouvons choisir (Stricker [5]) une telle loi, pour laquelle X est une quasimartingale, c'est à dire la différence de deux surmartingales positives. Il n'y a aucun inconvénient à conserver la notation P pour la nouvelle loi.

3) Comme on a $v_r(f+g)^{1/r} \leqq v_r(f)^{1/r} + v_r(g)^{1/r}$, nous pouvons ramener l'étude des quasimartingales à celle des surmartingales positives, que nous traitons maintenant.

4) Soit donc X une surmartingale positive. D'après la forme donnée par Dubins aux inégalités de Doob (Neveu [4], p.27), on a pour tout couple (a,b) tel que a<b

$$E[M_a^b(.,X)] \leqq \frac{E[X_0]}{b-a}$$

et par conséquent

$$E[\ M_{kh}^{(k+1)h}(\omega,X)] \leqq \frac{1}{h}E[X_0]$$

Supposons d'abord que X soit bornée par une constante λ . Le nombre des entiers k tels que $M_{kh}^{(h+1)h}(\omega,X)\neq 0$ est au plus λ/h. Nous avons donc

$$E[M(\omega,X,h)] \leqq \frac{\lambda}{h^2}E[X_0]$$

Cela ne suffit pas pour affirmer que $\sup_{h=\lambda 2^{-i}} h^2M(\omega,X,h)$ est p.s. finie, ce qui entraînerait, d'après la proposition 1, que $v_r(\omega,X)$ est p.s. finie pour tout r>0. Mais soit p tel que r>p>2. On a la majoration très grossière

$$E[\ \sup_{h=\lambda 2^{-i}} h^pM(\omega,X,h)] \leqq \Sigma_{h=\lambda 2^{-i}}\ E[h^pM(\omega,X,h)]$$

$$\leqq (\ \sup_h E[h^2M(\omega,X,h)])\ \Sigma_{h=\lambda 2^{-i}}\ h^{p-2}$$

Cette série étant convergente, l'espérance au premier membre est finie, donc la variable aléatoire $\sup_{h=\lambda 2^{-i}} h^pM(\omega,X,h)$ est p.s. finie, et la proposition 1 permet de conclure lorsque X est bornée.

Supposant toujours X bornée par λ, on a en fait une inégalité un peu plus précise : comme $E[X_0] \leqq \lambda$,

$$E[v_r(\omega,X)] \leqq c_r[\lambda^r + \lambda^{r-p}.\lambda E[X_0].\lambda^{p-2}.\Sigma_i 2^{-i(p-2)}]$$

$$\leqq c'_r\lambda^r$$

Pour passer au cas général, nous introduisons le temps d'arrêt

$$T_\lambda = \inf\{t\ :\ X_t>\lambda\ \}$$

et la surmartingale positive $Y_t=X_tI_{\{t<T_\lambda\}}$, bornée par λ. L'événement $\{T_\lambda<\infty\}$ est égal à $\{X^*>\lambda\}$, où X^* désigne $\sup_t X_t$ comme d'habitude.

On a alors

$$E[v_r(.,X)I_{\{X^*\leqq\lambda\}}] \leqq E[v_r(.,Y)] \leqq c'_r\lambda^r$$

Faisant tendre λ vers $+\infty$, on voit que $v_r(\omega,X)$ est finie pour presque tout $\omega\epsilon\Omega$.

REMARQUE. Au lieu de considérer des différences de surmartingales positives, on aurait pu utiliser la définition même des semimartingales, comme somme d'une martingale locale et d'un processus à variation finie. L'étude de celui-ci étant triviale, on se trouve ramené au cas des martingales locales, donc (par arrêt) des martingales uniformément intégrables, et finalement, à l'inégalité de Doob comme on l'a fait ci-dessus. Mais il est assez naturel de faire intervenir la notion de quasimartingale dans ces problèmes, et la démonstration ci-dessus n'est pas plus compliquée.

3. SUR L'INTEGRABILITE DE LA p-VARIATION

Lépingle établit dans [2] le résultat suivant : soit X une martingale ; alors on a, pour p>2 et toute fonction Φ à croissance modérée

$$E[\ \Phi(v_p(.,X)^{1/p})] \leqq cE[\Phi(X^*)]$$

La démonstration de Lépingle ([2], p.305) utilise les inégalités de Burkholder et la décomposition de Davis, et les méthodes élémentaires utilisées ci-dessus ne permettent pas (semble-t-il) d'atteindre un résultat aussi fin. Nous voudrions simplement faire remarquer que le résultat de Lépingle, combiné avec la proposition 1, donne aussitôt

$$E[\ \Phi(\ h.M(.,X,h)^{1/p})] \leqq cE[\Phi(X^*)] \qquad \text{pour tout } h>0\ .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1]. M. Bruneau. Sur la p-variation des trajectoires d'une surmartingale. Dans ce volume.

[2]. D. Lépingle. La variation d'ordre p des semi-martingales. ZW 36, 1976, p. 295-316.

[3]. I. Monroe. On embedding right continuous martingales in brownian motion. Ann. M. Stat. 43, 1972, p. 1293-1311.

[4]. J. Neveu. Martingales à temps discret. Masson, Paris, 1972.

[5]. C. Stricker. Quasimartingales, martingales locales, semimartingales et filtration naturelle. ZW 39, 1977, p.55-64.

C. Stricker
Département de Mathématiques
Université Mohammed V
Rabat, MAROC