SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

CHING SUNG CHOU

Caractérisation d'une classe de semimartingales

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 13 (1979), p. 250-252
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1979__13__250_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1977/78

CARACTERISATION D'UNE CLASSE DE SEMIMARTINGALES

par CHOU Ching-Sung

Considérons un espace probabilisé $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ filtré par une famille $(\underline{\underline{F}}_t)$ qui satisfait aux conditions habituelles. Rappelons qu'une semimartingale X appartient à la classe H^1 si elle admet une décomposition $X=\overline{M}+\overline{A}$, où la martingale $\overline{M}$ appartient à la classe H^1 usuelle ($E[[\overline{M},\overline{M}]_\infty^{1/2}]<\infty$) et $\overline{A}$ est un processus à variation intégrable. Alors X est spéciale, et la décomposition canonique $X=M+A$ de X possède les propriétés ci-dessus. La classe H^1 est un espace de Banach pour la norme

$$\|X\|_{H^1} = E[\ [M,M]_\infty^{1/2}+ \int_0^\infty |dA_s|\ ]$$

La classe H^1 de semimartingales (et plus généralement la classe H^p) est due à M. Emery. M. P.A. Meyer a proposé l'étude de la classe (Σ) des semimartingales X qui possèdent la propriété suivante :

(Σ) <u>Il existe un processus prévisible</u> J, <u>partout</u> $\neq 0$ <u>sur</u> $\mathbb{R}_+\times\Omega$, <u>tel que l'on ait</u> $J\cdot X \in H^1$.

Nous remercions MM. P.A. Meyer et C. Stricker, qui nous ont aidé à obtenir les résultats sur la classe (Σ).

Voici un critère commode pour l'appartenance à la classe (Σ).

LEMME. <u>Pour qu'une semimartingale</u> X <u>appartienne à la classe</u> (Σ), <u>il faut et il suffit qu'il existe des processus prévisibles</u> J^n <u>tels que</u> $0\leq J^n\leq 1$, $J^n\uparrow 1$ <u>partout, et</u> $J^n\cdot X \in H^1$ <u>pour tout</u> n.

DEMONSTRATION. Supposons que X appartienne à la classe (Σ) et soit J un processus prévisible tel que $J\cdot X \in H^1$, $J\neq 0$ partout. Comme on a $|J|\cdot X= (\mathrm{sgn}\, J)\cdot(J\cdot X) \in H^1$, on peut remplacer J par $|J|$, et supposer $J \geq 0$. Alors on peut prendre $J^n=(nJ)\wedge 1$.

Inversement, s'il existe des J^n comme dans l'énoncé, nous prenons $J = \Sigma_n a_n J^n$, où les a_n sont des nombres >0 tels que $\Sigma_n a_n \| J^n\cdot X \|_{H^1} < \infty$, $\Sigma_n a_n < \infty$.

<u>Conséquences</u> : La classe (Σ) est un espace vectoriel.

Toute martingale locale, tout processus à variation localement intégrable appartient à (Σ) (dans ce cas les processus J^n sont de la forme $I_{]\!]0,T_n]\!]}$ avec des temps d'arrêt $T_n\uparrow\infty$).

Toute semimartingale spéciale appartient à la classe (Σ), car elle est la somme de deux processus des types précédents.

Voici la caractérisation de la classe (Σ) :

THEOREME. Pour que X appartienne à la classe (Σ), il faut et il suffit que l'on ait pour tout temps d'arrêt T borné (prévisible ou non)

(1) $$E[|\Delta X_T| \,|\, \underline{\underline{F}}_{T-}] < \infty \text{ p.s.}.$$

DEMONSTRATION. On convient comme d'habitude que pour $t<0$, $\underline{\underline{F}}_t=\underline{\underline{F}}_0$, $X_t=0$. Alors il n'est pas nécessaire de s'occuper de 0.

Supposons d'abord que X appartienne à (Σ) et soit J prévisible >0 tel que $Y=J\cdot X \in H^1$. On a $J_T|\Delta X_T| = |\Delta Y_T| \leqq 2Y^* \in L^1$. D'autre part la variable aléatoire J_T est $\underline{\underline{F}}_{T-}$-mesurable et partout >0 . Alors

$$E[|\Delta X_T| \,|\, \underline{\underline{F}}_{T-}] = \frac{1}{J_T} E[J_T|\Delta X_T| \,|\, \underline{\underline{F}}_{T-}] < \infty \text{ p.s.}.$$

Inversement, supposons que la condition (1) soit satisfaite. Décomposons X sous la forme $X=M+A$, où A est un processus à variation finie nul en 0 et M est une martingale locale. Comme M est spéciale, M appartient à la classe (Σ) et vérifie la condition (1). Il en résulte que

(2) $$E[|\Delta A_T| \,|\, \underline{\underline{F}}_{T-}] \leqq E[|\Delta X_T|+|\Delta M_T| \,|\, \underline{\underline{F}}_{T-}] < \infty \text{ p.s.} .$$

Choisissons des temps d'arrêt $T_n \uparrow \infty$ bornés et tels que

$$E[\int_{[0,T_n[} |dA_s| \,] < \infty$$

(par exemple $T_n = n \wedge \inf\{ t : \int_0^t |dA_s| \geqq n \}$). Fixons n et écrivons T au lieu de T_n . D'après (2) il existe une variable aléatoire $\underline{\underline{F}}_{T-}$-mesurable H, partout >0 , telle que $E[H|\Delta A_T|] < \infty$, et on peut supposer $H \leqq 1$. D'après le théorème IV.67 , p.200 de "probabilités et potentiel" de Dellacherie et Meyer, il existe un processus prévisible $Z=(Z_t)$ tel que $H=Z_T$, et on peut supposer que $0 \leqq Z \leqq 1$. Si l'on remplace Z par $Z+I_{\{Z=0\}}$ on ne change pas Z_T puisque $H>0$ partout, donc on peut supposer $Z>0$ partout. On a alors

$$E[\int_{[0,T]} Z_s|dA_s|\,] \leqq E[\int_{[0,T[} |dA_s|\,]+E[Z_T|\Delta A_T|\,] < \infty$$

Remettons l'indice n et notons c_n cette espérance. Choisissons des constantes $a_n>0$ telles que $\Sigma_n\, c_n a_n < \infty$, $\Sigma_n\, a_n < \infty$

$$J = \Sigma_n\, a_n Z^n I_{[\![0,T_n]\!]}$$

J est un processus prévisible partout >0, et $J\cdot A$ est un processus à variation intégrable, donc appartient à la classe H^1. Donc A appartient à la classe (Σ) et $X=M+A$ aussi.

Parmi les semimartingales de la classe (Σ), il y en a qui ressemblent aux martingales locales. Ce sont les processus de la classe

(Σ_m) : $(X \in (\Sigma_m)) \Longleftrightarrow$ (il existe J prévisible >0 tel que $J.X$ soit une martingale de H^1).

Toute martingale locale appartient à la classe (Σ_m), mais nous pensons que la classe (Σ_m) est plus large que celle des martingales locales. Toutefois, il est difficile de donner des exemples concrets, en raison des deux propositions suivantes :

PROPOSITION 1. Toute semimartingale spéciale X de la classe (Σ_m) est une martingale locale.

DEMONSTRATION. Puisque X est spéciale, X admet une décomposition canonique $X=M+A$, où A est à variation finie prévisible nul en 0. Soit J prévisible partout >0 tel que $J \cdot X$ soit une martingale de H^1 , ou même seulement une martingale locale ; alors $(J\wedge 1)\cdot X = (J\wedge 1/J)\cdot(J\cdot X)$ est une martingale locale, et on peut donc supposer que J est borné. Alors $J\cdot A$ est un processus à variation finie prévisible, nul en 0, et en même temps $J\cdot A=J\cdot X-J\cdot M$ est une martingale locale. Donc $J\cdot A=0$. Remplaçant J par le produit JH, où H est un processus prévisible borné par 1 en valeur absolue tel que $H_s dA_s=|dA_s|$, on voit que la mesure $J_s|dA_s|$ est nulle. Comme J>0 partout, on a A=0, et enfin X=M est une martingale locale.

D'autre part, on ne peut pas tirer d'exemples du cas discret, car

PROPOSITION 2. En temps discret, toute semimartingale de la classe (Σ_m) est une martingale locale.

DEMONSTRATION. Soit (J_n) un processus prévisible tel que $J\cdot X$ soit une martingale de la classe H^1. Alors $J_n(X_n-X_{n-1}) \in L^1$ et $E[J_n(X_n-X_{n-1})|\underline{\underline{F}}_{n-1}] =0$. Comme J_n est $\underline{\underline{F}}_{n-1}$-mesurable et partout >0, on en déduit que

$$E[|X_n||\underline{\underline{F}}_{n-1}] < \infty \text{ p.s.} \qquad E[X_n|\underline{\underline{F}}_{n-1}] = X_{n-1} \text{ p.s.}$$

Il est connu que cela caractérise les martingales locales en temps discret (voir P.A. Meyer, Martingales and stochastic integrals, Lecture Notes in M. 284, p. 47).

M. Meyer avait posé la question de savoir si une semimartingale de la classe (Σ_m) par rapport à $(\underline{\underline{F}}_t)$ restait de la classe (Σ_m) par rapport à sa filtration naturelle. Si cette propriété était vraie, d'après la proposition 2 elle serait vraie pour les martingales locales dans le cas discret. Mais à la page 57 du Z. fur W-theorie, Vol.39 (1977), C.Stricker a donné un contre exemple dans le cas discret. La réponse à la question de M. Meyer est donc négative.