Séminaire de probabilités (Strasbourg)

Jean Spiliotis

Sur les intégrales stochastiques de L. C. Young

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 13 (1979), p. 253-259
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1979__13__253_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1977/78

SUR LES INTEGRALES STOCHASTIQUES DE L.C. YOUNG

par Jean Spiliotis

Il y a quelques années, L.C. YOUNG a publié deux articles ([1] et [2]) sur la définition d'intégrales déterministes du type $\int_0^u f(t)dg(t)$ ou d'intégrales stochastiques du type $\int_0^u Y(t)dX(t)$. La lecture des ces deux articles est difficile, surtout celle du second, qui n'est pas écrit dans le langage usuel des probabilistes, et cela explique pourquoi le travail de YOUNG n'a jamais été analysé dans ce séminaire. Nous nous proposons d'en rendre compte partiellement ici.

Au sujet du premier article, nous nous bornerons à quelques lignes : il est bien connu que l'on sait définir $\int_{]0,u]} f(t)dg(t)$ lorsque g est une fonction à variation bornée, f une fonction borélienne bornée. Lorsque g est continue, f à variation bornée, on peut alors définir

$$\int_{]0,u]} f(t)dg(t) = f(u)g(u)-f(0)g(0) - \int_{]0,u]} g(t)df(t)$$

Nous dirons dans ces deux cas que nous avons affaire à des intégrales de Stieltjes ordinaires. Ce que montre YOUNG, c'est que l'on peut définir $\int_{]0,u]} f(t)dg(t)$ lorsque f et g satisfont toutes deux à des conditions du type de Hölder, par rapport à des fonctions croissantes convenablement liées. De plus, les intégrales généralisées ainsi définies peuvent être approchées par des intégrales de Stieltjes ordinaires, de la manière suivante. Posons $f^n(t) = n\int_{t-1/n}^t f(s)ds$ (en convenant que f est nulle pour $t<0$) ; alors $\int_{]0,u]} f(t)dg(t) = \lim_{n\to\infty} \int_{]0,u]} f^n(t)dg(t)$, où le côté droit est pour chaque n une "intégrale de Stieltjes ordinaire", puisque f^n est à variation bornée.

Dans le second article, on établit de même l'existence de certaines intégrales stochastiques $\int_{]0,u]} Y_s dX_s$, par rapport à des processus qui ne sont pas nécessairement des semimartingales, et on établit une approximation $\int_{]0,u]} Y_s dX_s = \lim_{n\to\infty} \int_{]0,u]} Y^n_s dX_s$, où Y^n est un processus défini comme f^n ci-dessus, et où le côté droit est donc une intégrale de Stieltjes ordinaire.

Notre travail a consisté à récrire entièrement le second article dans le langage usuel des filtrations, sous une forme d'ailleurs beaucoup plus condensée. En fin de compte, le résultat est un peu décevant, car la théorie manque d'exemples concrets autres que l'intégrale stochastique classique d'Ito - c'est pourquoi nous nous sommes abstenus de rédiger la dernière propriété d'approximation mentionnée plus haut, bien que nous l'ayons vérifiée dans le nouveau langage. On pourra constater sur cette rédaction que l'introduction du langage probabiliste moderne est loin de "trivialiser" les résultats de Young, et il se peut fort bien que la construction des intégrales stochastiques sous les conditions de Young, ou sous des conditions voisines, s'avère utile un jour.

1. NOTATIONS

$(\Omega,\underline{\underline{F}},P,(\underline{\underline{F}}_t)_{t\in T})$ est un espace probabilisé filtré, où T est un intervalle compact - l'intervalle $[0,1]$ pour fixer les idées. On suppose que les conditions habituelles sont satisfaites.

On se propose de définir des intégrales stochastiques $\int_0^1 Y_s dX_s$, sous les hypothèses suivantes :

A) $Y=(Y_t)_{t\in T}$ est un processus <u>progressif</u> par rapport à $(\underline{\underline{F}}_t)_{t\in T}$, tel que

$$E[\int_0^1 Y_s^2 ds] < \infty$$

On ne perd aucune généralité essentielle en supposant que $Y_0=0$ (ce qui supprime la distinction entre les intégrales sur $]0,1]$ et $[0,1]$) et l'on convient que $Y_t=0$ pour $t<0$.

B) $X=(X_t)_{t\in T}$ est un processus <u>adapté</u> à $(\underline{\underline{F}}_t)_{t\in T}$, <u>continu à droite</u>[1] ; on a $X_t\in L^2$ pour tout $t\in T$, et pour $0\leqq s<t\leqq 1$

$$|E[X_t-X_s|\underline{\underline{F}}_s]| \leqq a(t-s) \text{ p.s. } ; \quad E[(X_t-X_s)^2|\underline{\underline{F}}_s] \leqq b^2(t-s) \text{ p.s.}$$

où a et b sont des fonctions croissantes sur $]0,1]$, telles que $a(0+) = b(0+)=0$.

On impose donc dès le départ certaines conditions "de Hölder" sur X ; si $a=0$, X est une martingale ; si $a(t)\leqq ct$, où c est une constante, X est une quasimartingale (Young appelle nigh-martingales les processus X satisfaisant à B). Par ailleurs, nous serons amenés, pour définir l'intégrale stochastique, à compléter la condition A) par des conditions de Hölder sur Y de type un peu différent (condition C) plus bas).

Passons aux notations relatives aux partitions. Soit $h>0$ tel que $N=\frac{1}{h}$ soit un entier. Nous pouvons lui associer la partition de $]0,1]$ en les intervalles

---

1. Cette hypothèse n'est là que pour fixer les idées, mais n'intervient pas de manière essentielle.

$$\Delta_i^h =]ih,\ (i+1)h] \qquad (0 \leqq i \leqq N-1)$$

et nous conviendrons que $\Delta_{-1}^h =]-h,0]$.

D'une manière générale, si Δ est un intervalle, nous noterons $g(\Delta)$ et $d(\Delta)$ ses extrémités gauche et droite, et nous poserons $\Delta X = X_{d(\Delta)} - X_{g(\Delta)}$. Ainsi $\Delta_i^h(X) = X_{(i+1)h} - X_{ih}$ pour $i \geqq 0$, et pour $i=-1$ nous conviendrons que cela vaut 0.

Nous posons aussi

$$(1) \qquad Y^h = \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{1}{h} \int_{\Delta_{i-1}^h} Y_s ds \right) I_{\Delta_i^h}$$

Sous l'hypothèse A), ces intégrales sont bien définies, et le processus Y^h est un processus étagé prévisible indexé par T. Comme Y^h est étagé, il n'y a aucune difficulté à définir l'intégrale $\int_0^1 Y_s^h dX_s$, qui vaut

$$(2) \qquad I(Y^h) = \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{1}{h} \int_{\Delta_{i-1}^h} Y_s ds \right) \Delta_i^h X$$

DEFINITION. On dit que l'intégrale stochastique du processus Y (satisfaisant à A)) par rapport au processus X (satisfaisant à B)) existe, si les variables aléatoires $I(Y^h)$ convergent dans L^2 lorsque h parcourt la suite $h_n = 2^{-n}$, et l'on pose alors

$$\int_0^1 Y_s dX_s = I(Y) = \lim_{n\to\infty} I(Y^{h_n})$$

Pour éviter d'alourdir les notations, nous sous-entendons désormais que h est de la forme 2^{-n}, et nous écrivons $\lim_{h\to 0}$ au lieu de $\lim_{n\to\infty}$, etc, en mentionnant le moins souvent possible l'entier n.

2. QUELQUES MAJORATIONS ELEMENTAIRES

LEMME 1. <u>Soit un intervalle</u> $\Delta =]u,v]$, <u>et soit une v.a.</u> $\underline{\underline{F}}_u$<u>-mesurable</u> $f \in L^2$. <u>Alors on a</u>

$$E[f^2(\Delta X)^2] \leqq b^2(v-u)E[f^2].$$

DEMONSTRATION. Comme f est $\underline{\underline{F}}_u$-mesurable, on a d'après l'hypothèse B)

$$E[f^2(\Delta X)^2 | \underline{\underline{F}}_u] \leqq b^2(v-u).f^2$$

d'où l'inégalité du lemme en intégrant.

LEMME 2. <u>On a pour</u> $\theta = 1,2$ <u>si</u> Y <u>satisfait à</u> A)

$$(3) \qquad \left\| \frac{1}{|\Delta|} \int_\Delta Y_s ds \right\|^\theta \leqq \frac{1}{|\Delta|} \int_\Delta \|Y_s\|^\theta ds$$

<u>où</u> $\|\ \|$ <u>désigne la norme de</u> L^2, $|\Delta|$ <u>la longueur de l'intervalle</u> Δ.

DEMONSTRATION. Pour $\theta=1$, (3) est l'inégalité de Minkowski sous forme intégrale. Le cas $\theta=2$ s'en déduit en appliquant l'inégalité de Jensen du côté droit.

LEMME 3. Soit Y un processus satisfaisant à A), constant sur les intervalles Δ_i^h (de sorte que $Y=Y^h$). Alors on a

$$\|I(Y)\|^2 \leqq \frac{b^2(h)}{h}\int_0^1\|Y_s\|^2 ds + \frac{a(h)b(h)}{h^2}\left(\int_0^1\|Y_s\|ds\right)^2 \tag{4}$$

DEMONSTRATION. Puisque Y est étagé par rapport à une subdivision dyadique, l'existence de l'intégrale stochastique ne pose aucun problème ($I(Y)=I(Y^h)$ dès que $h=2^{-n}$ est assez petit), d'où la notation $I(Y)$. Nous pouvons écrire

$$Y=\sum_{i=0}^{N-1} f_i I_{\Delta_i^h} \quad , \quad I(Y)=\sum_{i=0}^{N-1} f_i\Delta_i^h X$$

avec $f_i \in L^2$, f_i $\underline{\underline{F}}_{g(\Delta_i^h)}$ -mesurable. Alors nous avons

$$\|I(Y)\|^2 = E[\sum_{i,j} f_if_j\Delta_i^hX\Delta_j^hX] = \Sigma_i\ E[f_i^2(\Delta_i^hX)^2]+2\sum_{i<j}E[f_if_j\Delta_i^hX\Delta_j^hX]$$

La première somme du côté droit se majore grâce au lemme 1 : en omettant h pour simplifier

$$\Sigma_i\ E[f_i^2(\Delta_iX)^2] \leqq b^2(h)\Sigma_i E[f_i^2] \leqq \frac{b^2(h)}{h}\Sigma_i\int_{\Delta_i}\|f_i\|^2ds$$
$$= \frac{b^2(h)}{h}\int_0^1\|Y_s\|^2ds$$

Pour la seconde somme, posons $g(\Delta_i)=u_i$; si $i<j$ on a $\underline{\underline{F}}_{u_i}\subset\underline{\underline{F}}_{u_j}$, donc

$$\begin{aligned}|E[f_if_j\Delta_iX\Delta_jX|\underline{\underline{F}}_{u_i}]| &= |E[f_i\Delta_iX\ E[f_j\Delta_jX|\underline{\underline{F}}_{u_j}]\ |\underline{\underline{F}}_{u_i}]|\\
&\leqq (E[f_i^2(\Delta_iX)^2|\underline{\underline{F}}_{u_i}])^{1/2}(\ E[(E[f_j\Delta_jX|\underline{\underline{F}}_{u_j}])^2|\underline{\underline{F}}_{u_i}])^{1/2}\\
&\leqq |f_i|b(h)(E[\ f_j^2\ E[\Delta_jX|\underline{\underline{F}}_{u_j}]^2\ \ |\underline{\underline{F}}_{u_i}])^{1/2}\\
&\leqq |f_i|b(h)(E[f_j^2|\underline{\underline{F}}_{u_i}]a^2(h))^{1/2}\\
&\leqq b(h)a(h)|f_i|E[f_j^2|\underline{\underline{F}}_{u_i}]^{1/2}\end{aligned}$$

Intégrons, il vient

$$|E[f_if_j\Delta_iX\Delta_jX]| \leqq a(h)b(h)\|f_i\|\ \|f_j\|$$

La seconde somme est donc majorée par

$$2a(h)b(h)\sum_{i<j}\|f_i\|\|f_j\| \leqq a(h)b(h)(\ \Sigma_i\ \|f_i\|)^2 \leqq \frac{a(h)b(h)}{h^2}\left(\int_0^1\|Y_s\|ds\right)^2$$

Par addition, on obtient alors la formule (4).

3. LA CONDITION C)

Nous allons maintenant compléter la condition A) en imposant les deux conditions suivantes au processus Y, où p et q désignent deux fonctions sur $[0,1]$, croissantes, continues, nulles en 0, sous-additives

C) $$\int_0^1\|Y_t-Y_{t-h}\|^2dt \leqq p^2(h) \quad ; \quad \int_0^1\|Y_t-Y_{t-h}\|dt \leqq q(h) \qquad (h\in[0,1])$$

On rappelle que $Y(t)=0$ par convention pour $t\leqq 0$. D'autre part, la condition C) n'est pas en elle même une restriction. En effet, on peut toujours prendre

$$q(h)=p(h)=\sup_{0\leqq u\leqq h}\left(\int_0^1 \|Y_t-Y_{t-u}\|^2 dt\right)^{1/2}$$

fonction évidemment croissante, qui tend vers 0 en 0 d'après des résultats classiques, et dont la sous-additivité est facile à vérifier. La restriction que nous aurons à imposer pour l'existence de l'intégrale stochastique, ce sera une relation entre les fonctions p et q relatives à Y, et les fonctions a et b relatives à X.

LEMME 4. Sous les conditions A) et C) sur Y, on a

$$(5)\quad \int_0^1 \|Y_t-Y_t^h\|^2 dt \leqq 2p^2(2h) \quad ; \quad \int_0^1 \| Y_t-Y_t^h\| \, dt \leqq 2q(2h)$$

DEMONSTRATION. Pour $t\in\Delta_i^h$ on a $Y_t-Y_t^h = \frac{1}{h}\int_{\Delta_{i-1}^h}(Y_t-Y_s)ds$. Par conséquent on a d'après le lemme 2, pour $\theta=1,2$

$$\| Y_t-Y_t^h\|^\theta \leqq \frac{1}{h}\int_{\Delta_{i-1}^h} \|Y_t-Y_s\|^\theta \, ds$$

Puisque $t\in\Delta_i^h$, on a $\Delta_{i-1}^h\subset\,]t-2h,t]$, et on en déduit

$$\|Y_t-Y_t^h\|^\theta \leqq \frac{1}{h}\int_{t-2h}^t \|Y_t-Y_s\|^\theta ds = \frac{1}{h}\int_0^{2h} \|Y_t-Y_{t-u}\|^\theta \, du$$

Intégrons sur Δ_i^h, puis sommons sur i, il vient

$$\int_0^1 \|Y_t-Y_t^h\|^\theta \, dt \leqq \frac{1}{h}\int_0^1\int_0^{2h} \|Y_t-Y_{t-u}\|^\theta \, du dt$$

$$= \frac{1}{h}\int_0^{2h}\left(\int_0^1 \|Y_t-Y_{t-u}\|^\theta dt\right)du$$

Prenons par exemple $\theta=2$; le second membre est majoré par $\frac{1}{h}\int_0^{2h} p^2(u)du \leqq 2p^2(2h)$. De même pour $\theta=1$.

En utilisant des inégalités triangulaires évidentes, on déduit de (5) que, si $h<k$

$$(6)\quad \int_0^1 \|Y_t^h-Y_t^k\|^2 dt \leqq 8p^2(2k) \quad ; \quad \int_0^1 \|Y_t^h-Y_t^k\| dt \leqq 4q(2k)$$

4. CONDITION D'EXISTENCE DE L'INTEGRALE STOCHASTIQUE

Nous parvenons maintenant au résultat principal. La condition analytique D) que nous allons introduire maintenant relie les quatre fonctions a,b,p,q des conditions B) et C), relatives à X et Y.

Rappelons que h est de la forme 2^{-n} . Nous dirons que la condition D) est satisfaite s'il existe des $h_k\downarrow 0$ tels que les deux séries

$$(7)\qquad \Sigma_k \frac{b(h_k)}{\sqrt{h_k}}p(h_{k-1}) \qquad \Sigma_k \frac{\sqrt{b(h_k)a(h_k)}}{h_k}q(h_{k-1})$$

soient convergentes.

Cette condition est évidemment inutilisable. Aussi en indiquerons nous d'après Young une forme plus simple. Introduisons les fonctions

(8) $\tau(u)= b(u)\sqrt{u}$ $\varphi(u)=\sqrt{a(u)b(u)}$

qui sont croissantes, continues, nulles en 0. Les deux conditions D) prennent alors la même forme, qui est l'existence d'une suite $h_k=2^{-n_k}$ telle que

$$\Sigma_k \frac{1}{h_k}\tau(h_k)p(h_{k-1})<\infty \quad , \quad \Sigma_k \frac{1}{h_k}\varphi(h_k)q(h_{k-1}) <\infty \ .$$

Nous faisons une hypothèse simplificatrice : nous dirons qu'une fonction j sur $[0,1]$ est <u>régulière</u> si, pour $0<u<v$ on a

$$\frac{j(v)}{v} \leqq 2\frac{j(u)}{u}$$

et nous supposons que p,q,τ,φ sont régulières - pour p et q, cela résulte d'ailleurs automatiquement de l'hypothèse de sous-additivité. Alors Young montre que la condition

(9) $$\int_0^1 \frac{\tau(u)}{u}dp(u) < \infty \qquad (\text{ resp. } \int_0^1 \frac{\varphi(u)}{u}dq(u) < \infty)$$

est <u>équivalente</u> à l'existence d'une suite $h_k=2^{-n_k}$ telle que $\Sigma_k\frac{1}{h_k}\tau(h_k)p(h_{k-1})$ $<\infty$ (resp. $\Sigma_k \frac{1}{h_k}\varphi(h_k)q(h_{k-1})<\infty$). Mais il reste à exprimer qu'il existe une même suite faisant converger les deux séries à la fois, et Young montre que cela est possible si les fonctions p et q ont des croissances comparables[1]. Les conditions du type (9) sont évidemment beaucoup plus satisfaisantes que D). Pour les détails, voir [1], p.174-175 et [2], p. 122-123.

Après cette digression sur la condition D), revenons à l'intégrale stochastique, en supposant que les fonctions a,b,p,q satisfont à D).

THEOREME 1. <u>Supposons que le processus</u> X <u>satisfasse à</u> B), <u>que le processus</u> Y <u>satisfasse à</u> A) <u>et</u> C). <u>Alors l'intégrale stochastique</u> $I(Y)=\int_0^1 Y_s dX_s$ <u>existe</u>.

DEMONSTRATION. Nous désignons par (h_k) la suite qui figure dans la condition D), par I^k l'intégrale stochastique du processus étagé $Y^k=Y^{h_k}$. Nous avons d'après le lemme 3

$$\|I^{k-1}-I^k\|^2 = \|I(Y^{k-1}-Y^k)\|^2 \leqq \frac{b^2(h_k)}{h_k}\int_0^1 \|Y_t^{k-1}-Y_t^k\|^2dt$$

(10) $$+ \frac{b(h_k)a(h_k)}{h_k^2}\left(\int_0^1 \|Y_t^{k-1}-Y_t^k\|dt\right)^2$$

Nous appliquons la formule (6)

$$\int_0^1 \|Y_t^{k-1}-Y_t^k\|^2dt \leqq 8p^2(2h_{k-1}) \ , \ \int_0^1 \|Y_t^{k-1}-Y_t^k\| dt \leqq 4q(2h_{k-1})$$

Comme p et q sont sous-additives, on a $p(2h_{k-1})\leqq 2p(h_{k-1})$, et de même pour q. Finalement, on aboutit à

$$\|I^{k-1}-I^k\| \leqq c \left(b(h_k)p(h_{k-1})/\sqrt{h_k} + \sqrt{b(h_k)a(h_k)}q(h_{k-1})/h_k \right)$$

1. Nous ne donnons pas de détails sur ce point.

qui est le terme général d'une série convergente. Par conséquent, $I^k=I^{h_k}$ converge dans L^2 vers une v.a. I.

Il reste à démontrer que lorsque $h=2^{-n}\to 0$, $\|I-I^h\|\to 0$. Pour cela, on encadre h entre h_k et h_{k-1}, et on refait le raisonnement du début de la démonstration :

$$\|I^{h_k}-I^h\| \leqq c\ (b(h_k)p(h)/\sqrt{h_k} + \sqrt{b(h_k)a(h_k)}q(h)/h_k)$$

Comme p et q sont croissantes, on peut remplacer $p(h)$, $q(h)$ par $p(h_{k-1})$, $q(h_{k-1})$. Lorsque $h\to 0$, $k\to\infty$, et on a alors du côté droit le terme général d'une série convergente, qui tend donc vers 0. On en déduit que I^h a la même limite que I^{h_k}, c'est à dire I.

EXEMPLE. Supposons que le processus X satisfasse à B) avec a=0, $b(u)=c\sqrt{u}$ (cas du mouvement brownien). Alors la condition D) est satisfaite pour <u>toutes</u> les fonctions sous-additives p et q, et l'intégrale stochastique $\int_0^1 Y_s dX_s$ existe sans autre restriction sur Y que la condition A). On retrouve la théorie d'Ito.

En revanche, dès que l'on ajoute à un mouvement brownien un terme linéaire ($X_t=B_t+\alpha t$), on obtient une théorie de l'intégrale stochastique très peu maniable. La raison en est peut être la suivante : dans tous les raisonnements précédents, on a tenu à prendre des limites <u>dans L^2</u>. Or la théorie de l'intégrale stochastique par rapport aux semimartingales repose sur un mélange de convergences dans L^2 et dans L^1. De plus, on n'a jamais localisé le problème au moyen de temps d'arrêt.

Il semble donc que la méthode de Young ne présente d'intérêt que lorsqu'on cherche à intégrer par rapport à des processus qui ne sont pas des semimartingales.

REFERENCES

[1] L.C.YOUNG. Some New Stochastic Integrals and Stieltjes Integrals, Part I. Advances in Probability 2, p. 161-239. Edited by P. Ney. M. Dekker Inc. New York 1970.

[2] L.C. YOUNG. Some New Stochastic Integrals and Stieltjes Integrals. Part II : Nigh-Martingales. Advances in Probability 3, p. 101-177. Edited by P. Ney and S. Port. M. Dekker Inc., New York 1974.

Institut de Recherche Mathématique
Avancée, Strasbourg