

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

MICHEL ÉMERY

Équations différentielles stochastiques lipschitziennes : étude de la stabilité

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 13 (1979), p. 281-293

http://www.numdam.org/item?id=SPS_1979__13__281_0

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

EQUATIONS DIFFERENTIELLES LIPSCHITZIENNES

ETUDE DE LA STABILITE

par M. EMERY

Cet exposé est consacré à l'étude de la stabilité de la solution de l'équation différentielle stochastique de Doléans-Dade et Protter

$$X_t = H_t + \int_0^t [F(X)]_{s-} dM_s$$

lorsqu'on perturbe simultanément les trois paramètres H , F et M . Les méthodes sont celles employées par Doléans-Dade et Protter pour résoudre l'équation; les résultats seront énoncés relativement à la topologie de la convergence compacte en probabilité et à la topologie des semimartingales étudiée dans l'exposé [3]. Pour éviter de renvoyer le lecteur à Protter [12], qui fait lui-même référence à l'article parfois obscur [4], nous reprendrons le sujet à son début; nous redémontrerons en passant le théorème d'existence et d'unicité de Doléans-Dade et Protter.

Les notations sont celles du "Cours sur les intégrales stochastiques" de Meyer, ainsi que de l'exposé [3] "Une topologie sur l'espace des semimartingales", dont nous supposerons connus les résultats. Rappelons que les conditions sont habituelles, que le mot localement est pour nous relatif à des arrêts à $T-$ et que \underline{D} désigne l'espace des processus càdlàg adaptés, muni de la topologie de la convergence compacte en probabilité, et \underline{SM} l'espace des semimartingales, muni de la topologie introduite dans [3]. Toutefois, pour $Z \in \underline{D}$, la notation Z^* désignera ici la variable aléatoire finie ou non $\sup_t |Z_t|$ (et non un processus croissant).

DEFINITION. Soit $a > 0$. On appelle $Lip(a)$ l'ensemble des applications F de \underline{D} dans \underline{D} , non nécessairement linéaires, mais

1) non anticipantes: pour tout temps d'arrêt T , et pour tous X et Y de \underline{D} tels que $X^{T-} = Y^{T-}$, on a $(FX)^{T-} = (FY)^{T-}$;

2) a-lipschitziennes: $(FX - FY)^* \leq a (X - Y)^*$.

Par exemple, si $f(\omega, t, x)$ est une application de $\Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ dans \mathbb{R}

\mathbb{F}_t -mesurable en ω pour t et x fixés,

càdlàg en t pour ω et x fixés,

et a-lipschitzienne en x pour ω et t fixés,

la fonctionnelle F donnée par $FX_t(\omega) = f(\omega, t, X_t(\omega))$ est dans $\text{Lip}(a)$ (voir [1], [2]). Mais, plus généralement, F peut faire intervenir tout le passé de X avant t .

Si F est dans $\text{Lip}(a)$, on n'a pas nécessairement $(FX)^{T-} = F(X^{T-})$; on conviendra des notations $FX_- = (FX)_-$, $FX^{T-} = (FX)^{T-}$, etc ...

Voici les énoncés que nous avons en vue:

THEOREME 0. Soit $a > 0$.

a) Pour $H \in \underline{D}$, $F \in \text{Lip}(a)$, $M \in \underline{SM}$, il existe un et un seul $X \in \underline{D}$ tel que

$$X = H + FX_- \cdot M ;$$

si de plus $H \in \underline{SM}$, $X \in \underline{SM}$.

b) Les deux applications ainsi définies de $\underline{D} \times \text{Lip}(a) \times \underline{SM}$ dans \underline{D} et de $\underline{SM} \times \text{Lip}(a) \times \underline{SM}$ dans \underline{SM} sont continues.

THEOREME 0'. Les résultats du théorème 0 restent vrais lorsqu'on y remplace la constante de Lipschitz a par une variable aléatoire \mathbb{F} -mesurable p.s. finie.

Dans le b), la topologie dont est muni $\text{Lip}(a)$ est la topologie de la convergence simple associée à la topologie de \underline{D} .

Avant d'attaquer les démonstrations, rendons à César ce qui est à César. Lorsque FX est du type $f(\omega, t, X_t(\omega))$, le a) est dû à Doléans-Dade ([1],[2]) et à Protter ([10],[11]) — chez Protter, H ne dépend pas de t ni f de ω — . C'est Meyer qui a remarqué que l'hypothèse plus faible $F \in \text{Lip}(a)$ est suffisante; une méthode différente est employée par Métivier et Pellaumail ([6]). Pour le b), le cas continu a été abordé par Protter ([10]), le cas où M est

fixe a été étudié dans [4]; Protter, dans [11], a obtenu, en perturbant M , le résultat de stabilité localement dans \underline{H}^p ; c'est lui qui a observé que la solution est stable en tant que semimartingale. La généralisation de l'existence et de l'unicité au cas où la constante de Lipschitz dépend de ω se fait, selon une idée de Lengart ([5]), à l'aide d'un théorème de Jacod et Meyer ([9]).

Tout ce que nous ferons subir à l'équation de Doléans-Dade et Protter reste vrai pour des systèmes d'équations

$$X^j = H^j + \sum_{i=1}^m (F^{ij} X^i)_- \cdot M^i, \quad 1 \leq j \leq n;$$

ceci peut se voir par exemple à l'aide du formalisme des matrices carrées développé dans [4].

LE LEMME FONDAMENTAL

Rappelons tout d'abord quelques inégalités, relatives aux espaces \underline{S}^2 , \underline{H}^2 , \underline{S}^∞ et \underline{H}^∞ définis dans [7], d'utilisation constante dans la suite: Pour X et Y dans \underline{D} , M dans \underline{SM} , F dans $\text{Lip}(a)$ et T dans \underline{T} ,

- (1) $\|M\|_{\underline{S}^2} \leq 3 \|M\|_{\underline{H}^2}$ (inégalité de Doob) ;
- (2) $\|X \cdot M\|_{\underline{H}^2} \leq \|X\|_{\underline{S}^\infty} \|M\|_{\underline{H}^2}$;
- (3) $\|X \cdot M\|_{\underline{H}^2} \leq \|X\|_{\underline{S}^2} \|M\|_{\underline{H}^\infty}$;
- (4) $\|X \cdot M\|_{\underline{S}^2} \leq 3 \|X\|_{\underline{S}^2} \|M\|_{\underline{H}^\infty}$;
- (5) $\|FX - FY\|_{\underline{S}^2} \leq a \|X - Y\|_{\underline{S}^2}$;
- (6) $\|FX^T\|_{\underline{S}^2} \leq \|F0\|_{\underline{S}^2} + a \|X^T\|_{\underline{S}^2}$ (ici, 0 est le processus nul).

Les quatre premières sont dans [7], (5) répète la définition de $\text{Lip}(a)$, et la dernière résulte de (5) et de

$$\|FX^T\|_{\underline{S}^2} = \|F(X^T)^T\|_{\underline{S}^2} \leq \|F(X^T)\|_{\underline{S}^2}.$$

LEMME 1. Soient $H \in \underline{S}^2$, $F \in \text{Lip}(a)$ telle que $F0 = 0$, et $M \in \underline{H}^\infty$ telle que

$$\|M\|_{\underline{H}^\infty} \leq \frac{1}{6a} \cdot \underline{L'equation}$$

$$X = H + FX \cdot M$$

admet alors dans \underline{S}^2 une solution et une seule. Celle-ci vérifie

$$\|X\|_{\underline{S}^2} \leq 2 \|H\|_{\underline{S}^2} \cdot$$

Démonstration. L'application de \underline{S}^2 dans lui-même qui à X associe $H + FX \cdot M$ est $\frac{1}{2}$ -lipschitzienne en vertu des inégalités (4) et (5), d'où (théorème du point fixe) l'existence et l'unicité. Elle envoie 0 sur H, d'où l'estimation. ■

Ce lemme est à l'origine de l'idée suivante, clé de la méthode de Doléans-Dade: Puisqu'on sait contrôler l'équation quand M est petite, on va découper le temps en intervalles sur lesquels M varie peu, et résoudre l'équation par petits morceaux que l'on recollera ensuite.

DEFINITION. Soit $\varepsilon > 0$. On dit qu'une semimartingale M peut être découpée en tranches plus petites que ε , et l'on écrit $M \in D(\varepsilon)$, si M est dans \underline{H}^∞ , et s'il existe une suite finie de temps d'arrêt $0 = T_0 \leq T_1 \leq \dots \leq T_k$ tels que

$$M = M^{T_k-} \text{ et que, pour } 1 \leq i \leq k,$$

$$\| (M - M^{T_{i-1}-})^{T_i-} \|_{\underline{H}^\infty} \leq \varepsilon \cdot$$

Remarquer que l'expression dont on prend la norme n'est autre que l'accroissement de M sur l'intervalle $]]T_{i-1}, T_i[$. Cette définition exige que les sauts de M aux instants T_i soient bornés ($M \in \underline{H}^\infty$), mais ils peuvent être grands.

PROPOSITION 1. Soit M une semimartingale.

- Si $M \in D(\varepsilon)$, pour tout temps d'arrêt T , $M^T \in D(\varepsilon)$ et $M^{T-} \in D(2\varepsilon)$.
- Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des temps d'arrêt T arbitrairement grands tels que M^{T-} soit dans $D(\varepsilon)$.

Démonstration. Le a) résulte facilement des inégalités

$$\|M^T\|_{\underline{H}^\infty} \leq \|M\|_{\underline{H}^\infty}, \quad \|M^{T-}\|_{\underline{H}^\infty} \leq 2 \|M\|_{\underline{H}^\infty} \cdot$$

Pour le b), remarquons d'abord que, si M^1 et M^2 sont deux semimartingales respectivement découpées en tranches plus petites que ε par des suites T_i^1 et T_j^2 de temps d'arrêt, le a) entraîne que $M^1 + M^2$ est découpée en tranches plus petites que 2ε par la suite obtenue en réordonnant les points T_i^1, T_j^2 .

Décomposons M en une martingale locale N à sauts bornés par ε et un processus à variation finie A (théorème de Doléans-Dade et Yen: [8]). Il suffit de démontrer séparément la proposition pour N et A . Pour A , pas de difficulté: on définit la suite T_k par $T_0 = 0$,

$$T_{k+1} = \inf\{t \geq T_k : \int_{T_k, t} |dA_s| \geq \varepsilon \text{ ou } \int_0^t |dA_s| \geq k\},$$

et, pour tout k , $A^{T_k^-}$ est dans $D(\varepsilon)$. Pour N , c'est à peine plus délicat: on définit la suite T_k par $T_0 = 0$,

$$T_{k+1} = \inf\{t \geq T_k : [N, N]_t - [N, N]_{T_k} \geq \varepsilon^2 \text{ ou } [N, N]_t \geq k\};$$

pour tout k , $N^{T_k^-}$ est dans \underline{H}^∞ . Comme la semimartingale $(N - N^{T_k})^{T_{k+1}^-}$ peut être décomposée en

$$(N^{T_{k+1}} - N^{T_k}) - \Delta N_{T_{k+1}} I_{\{T_{k+1} > T_k\}} I_{[T_{k+1}, \infty[},$$

sa norme dans \underline{H}^∞ est majorée par

$$\begin{aligned} & \| ([N, N]_{T_{k+1}} - [N, N]_{T_k})^{\frac{1}{2}} + |\Delta N_{T_{k+1}}| \|_{L^\infty} \\ &= \| (\Delta N_{T_{k+1}}^2 + [N, N]_{T_{k+1}} - [N, N]_{T_k})^{\frac{1}{2}} + |\Delta N_{T_{k+1}}| \|_{L^\infty} \\ &\leq (\varepsilon^2 + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} + \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc, pour tout k , $N^{T_k^-}$ est dans $D((1+\sqrt{2})\varepsilon)$. —

LEMME 2 (Lemme fondamental). Soient $H \in \underline{S}^2$, $F \in \text{Lip}(a)$ telle que $F_0 = 0$, et $M \in D(\frac{1}{6a})$.

L'équation $X = H + FX \cdot M$ admet alors dans \underline{S}^2 une solution X et une seule, et on a l'estimation $\|X\|_{\underline{S}^2} \leq b \|H\|_{\underline{S}^2}$, où b ne dépend que de a et M .

Démonstration. Nous noterons $m = \|M\|_{\underline{H}^\infty}$, $h = \|H\|_{\underline{S}^2}$, et nous supposons que M est découpée en k tranches plus petites que $\frac{1}{6a}$ par une suite de temps d'arrêt $0 = T_0 \leq T_1 \leq \dots \leq T_k$. L'idée est très simple: résoudre successivement l'équa-

tion sur les intervalles $[[0, T_i[[$, $[[0, T_i]]$, $[[0, T_{i+1}[[$, en obtenant de proche en proche une estimation de la solution. Le passage de $[[0, T_i[[$ à $[[0, T_i]]$ se fera par un calcul explicite du saut, le passage de $[[0, T_i]]$ à $[[0, T_{i+1}[[$ à l'aide du lemme 2. Un petit détail: il ne faudra pas oublier les ω pour lesquels $T_{i+1} = T_i$.

Nous allons donc étudier successivement les équations

$$E_i: \quad X = H^{T_i^-} + FX_- \cdot M^{T_i^-} \quad (0 \leq i \leq k) .$$

Pour $i = 0$, pas de problème: l'équation s'écrit $X = 0$, elle admet une solution et une seule, de norme dans \underline{S}^2 $x^0 = 0$. Supposons que l'équation E_i admette, dans \underline{S}^2 , une solution et une seule, X^i , de norme x^i . Nous allons montrer qu'il en est de même de E_{i+1} et calculer x^{i+1} en fonction de x^i . Pour simplifier les notations, nous poserons, pour tout processus U de \underline{D} , $D_i U = (U - U^{T_i})^{T_{i+1}^-}$.

L'équation $X = H^{T_i} + FX_- \cdot M^{T_i}$ a, dans \underline{S}^2 , une solution et une seule Y^i , qui vaut $X^i + (\Delta H_{T_i} + FX_{T_i}^i - \Delta M_{T_i}) I_{[[T_i, \infty[[}$, et dont la norme y^i est majorée par $x^i + 2h + ax^i_m$ (inégalité (6)). Comme toute solution X de E_{i+1} doit vérifier $X^{T_i} = Y^i$ sur $[[0, T_{i+1}[[$, le changement d'inconnue $Z = X - (Y^i)^{T_{i+1}^-}$ transforme E_{i+1} en l'équation

$$Z = D_i H + F(Y^i + Z)_- \cdot D_i M .$$

Celle-ci s'écrit, en posant $G^i = F(Y^i + \cdot)_- - FY^i$,

$$Z = (D_i H + FY^i_- \cdot D_i M) + G^i Z_- \cdot D_i M .$$

Puisque G^i est dans $\text{Lip}(a)$ avec $G^i 0 = 0$, et que $\|D_i M\|_{\underline{H}}^\infty \leq \frac{1}{6a}$, le lemme 1 permet de résoudre cette équation: Elle admet, dans \underline{S}^2 , une solution Z^i et une seule, de norme $z^i \leq 2 \|D_i H + FY^i_- \cdot D_i M\|_{\underline{S}^2} \leq 2(2h + \gamma a y^i \frac{1}{6a}) = 4h + y^i$ (inégalités (4) et (5)).

On en conclut que l'équation E_{i+1} admet, dans \underline{S}^2 , une solution et une seule, $X^{i+1} = Z^i + (Y^i)^{T_{i+1}^-}$, de norme

$$x^{i+1} \leq z^i + y^i \leq 4h + 2y^i \leq 8h + 2(1+am)x^i .$$

En itérant ceci de $i = 0$ à $k-1$, on obtient, en tenant compte de $x^0 = 0$, que E_k a, dans \underline{S}^2 , une solution et une seule, X^k , dont la norme vérifie

$$x^k \leq 8 \frac{(2+2am)^k - 1}{1+2am} h .$$

Il reste à remarquer que, puisque $M = M^{T_k^-}$, l'équation $X = H + FX_- \cdot M$ a, dans \underline{S}^2 , une solution et une seule, $X = X^k + H - H^{T_k^-}$; sa norme est majorée par $x^k + 2h$, d'où le lemme, avec $b = 2 + 8 \frac{(2+2am)^k - 1}{1+2am} . \blacksquare$

EXISTENCE, UNICITE, STABILITE.

THEOREME 1 (Doléans-Dade, Protter). Soient H dans D, M dans SM, F dans Lip(a) pour un a > 0. L'équation X = H + FX_- \cdot M admet, dans D, une solution et une seule.

Démonstration. En réécrivant l'équation sous la forme

$$X = (H + FO_- \cdot M) + GX_- \cdot M$$

on se ramène à étudier le cas où $FO = 0$.

On choisit des temps T arbitrairement grands tels que H^{T^-} soit dans \underline{S}^2 et M^{T^-} dans $D(\frac{1}{12a})$. On peut alors résoudre dans \underline{S}^2 , à l'aide du lemme précédent, chacune des équations ${}^T X = H^{T^-} + F({}^T X)_- \cdot M^{T^-}$. Grâce à l'unicité dans \underline{S}^2 , les solutions sont compatibles: il existe un processus càdlàg adapté X tel que, pour chaque T, $X^{T^-} = {}^T X$. Ceci fournit une solution de l'équation.

Si Y est une autre solution, il existe des temps d'arrêt S arbitrairement grands tels que $(X-Y)^{S^-}$ soit borné. Les temps $R = \inf(S, T)$ sont arbitrairement grands; X^{R^-} et Y^{R^-} sont solutions dans \underline{S}^2 de l'équation en Z $Z = H^{R^-} + FZ_- \cdot M^{R^-}$. Mais (proposition 1) M^{R^-} est dans $D(\frac{1}{6a})$. L'unicité dans le lemme 2 donne $X^{R^-} = Y^{R^-}$, d'où, en fin de compte, $X = Y$. \blacksquare

LEMME 3. Soient a et c deux réels positifs. On considère l'équation

$$E: X = H + FX_- \cdot M \text{ et la suite d'équations } E_n: X^n = H^n + F^n X^n_- \cdot M^n .$$

On suppose que

1) H et, pour tout n, F^n sont dans \underline{S}^2 (respectivement \underline{H}^2); H^n tend vers H dans \underline{S}^2 (respectivement \underline{H}^2);

2) F^n et, pour tout n , F^n sont dans $Lip(a)$; pour tout $Z \in \underline{D}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $(F^n Z)^* \leq c$; $F^n X$ tend vers FX dans \underline{S}^2 (où X est la solution de E);

3) $M \in \underline{D}(\frac{1}{6a})$; pour tout n, M^n est dans \underline{H}^2 ; M^n tend vers M dans \underline{H}^2 .

Alors la solution X^n de l'équation E_n converge vers X dans \underline{S}^2 (respectivement \underline{H}^2).

Démonstration. Posons

$$K^n = (FX - F^n X)_- \cdot M + F^n X^n \cdot (H - M^n) \quad ,$$

$$G^n(\cdot) = F^n X - F^n(X \cdot \cdot) \quad .$$

Les semimartingales K^n sont dans \underline{H}^2 et tendent vers zéro dans \underline{H}^2 , puisque

$$\|K^n\|_{\underline{H}^2} \leq \|FX - F^n X\|_{\underline{S}^2} \|M\|_{\underline{H}^\infty} + \|F^n X^n\|_{\underline{S}^\infty} \|M - M^n\|_{\underline{H}^2}$$

(inégalités (3) et (2)) et que les $F^n X^n$ sont uniformément bornés. D'autre part, pour tout n , G^n est dans $Lip(a)$ et nul en 0.

L'identité

$$X - X^n = H - H^n + (FX - F^n X)_- \cdot M + (F^n X - F^n X^n)_- \cdot M + F^n X^n \cdot (M - M^n)$$

montre que $X - X^n$ est la solution de l'équation E' , où Z est l'inconnue:

$$Z = (H - H^n + K^n) + G^n Z \cdot M \quad ;$$

le lemme fondamental entraîne donc $\|X - X^n\|_{\underline{S}^2} \leq b \|H - H^n + K^n\|_{\underline{S}^2}$, où b ne

dépend pas de n . On en déduit que, si H^n tend vers H dans \underline{S}^2 , X^n tend vers X dans \underline{S}^2 , et la première assertion du lemme est établie.

Si, en outre, H et les H^n sont dans \underline{H}^2 , X et les X^n sont des semimartingales; FX et les $F^n X^n$ étant bornés et M et les M^n étant dans \underline{H}^2 , X et les X^n sont dans \underline{H}^2 . Dans le cas où H^n tend vers H dans \underline{H}^2 , l'équation E' entraîne

$$\|X - X^n\|_{\underline{H}^2} \leq \|H - H^n\|_{\underline{H}^2} + \|K^n\|_{\underline{H}^2} + a \|X - X^n\|_{\underline{S}^2} \|M\|_{\underline{H}^\infty}$$

(inégalités (3) et (5) avec $G^n 0 = 0$), et l'on voit que X^n tend vers X non seulement dans \underline{S}^2 , mais aussi dans \underline{H}^2 . ■

THEOREME 2. Soit $a > 0$. On considère l'équation E : $X = H + FX \cdot M$ et la suite d'équations E_n : $X^n = H^n + F^n X^n \cdot M^n$, où H et les H^n sont dans \underline{D} (respectivement dans \underline{S}^2), F et les F^n dans $Lip(a)$ et M et les M^n dans \underline{SM} .

On suppose que H^n tend vers H dans \underline{D} (respectivement \underline{SM}), que $F^n X$ tend vers FX dans \underline{D} et que M^n tend vers M dans \underline{SM} .

Alors X^n tend vers X dans \underline{D} (respectivement \underline{SM}).

Les théorèmes 1 et 2 donnent un résultat un peu plus fin que le théorème 0 annoncé au début: on n'exige pas que $F^n Z$ tende vers FZ pour tout $Z \in \underline{D}$, mais seulement pour la solution X de l'équation E (cette amélioration est due à Meyer).

Démonstration. La règle du jeu est simple: compte tenu de la proposition 1 et du théorème 2 de [3], il s'agit, par arrêt à T_- et par extraction d'une sous-suite, de se ramener au cas où les hypothèses du lemme 3 sont réalisées; par identification de la limite le théorème sera alors établi. Nous utiliserons les opérateurs de troncation $B^x \in \text{Lip}(1)$ définis pour $x \geq 0$ par

$$B^x X = \inf[x, \sup(-x, X)].$$

Par arrêt, on peut se ramener au cas où $|FX|$ est borné par un réel c , H et H^n sont dans \underline{S}^2 (respectivement \underline{H}^2), M est dans $D(\frac{1}{12a})$ et M^n tend vers M dans \underline{H}^2 . On considère la nouvelle équation

$$Y^n = H^n + B^{a+c+1} F^n Y^n \cdot M^n ;$$

grâce au lemme 3, Y^n tend vers X dans \underline{S}^2 (respectivement \underline{H}^2). Par extraction d'une sous-suite, on se ramène maintenant au cas où $(Y^n - X)^*$ et $(F^n X - FX)^*$ tendent vers zéro p.s. Posons

$$T_k = \inf \{ t \geq 0: \exists m \geq k \mid |Y_t^m - X_t| + |F^m X_t - FX_t| \geq 1 \} .$$

Les T_k forment une suite croissante de temps d'arrêt telle que $P\{T_k = \infty\} \rightarrow 1$. Par arrêt à T_k , on peut supposer que, pour n assez grand ($n \geq k$), $(Y^n - X)^*$ et $(F^n X - FX)^*$ sont bornés par 1. (Toutes les autres propriétés ci-dessus restent vraies, à ceci près que M n'est plus nécessairement dans $D(\frac{1}{12a})$ mais dans $D(\frac{1}{6a})$; l'emploi du lemme 3 est encore justifié.) Nous écrivons maintenant

$$\begin{aligned} |F^n Y^n| &\leq |F^n Y^n - F^n X| + |F^n X - FX| + |FX| \\ &\leq a (Y^n - X)^* + (F^n X - FX)^* + (FX)^* \leq a + 1 + c . \end{aligned}$$

Donc $B^{a+c+1} F^n Y^n = F^n Y^n$, et Y^n est la solution de $Y^n = H^n + F^n Y^n \cdot M^n$; d'où, toujours pour n assez grand, $Y^n = X^n$, ce qui permet de conclure. —

COROLLAIRE. L'exponentiation de Doléans-Dade, qui à $M \in \underline{SM}$ fait correspondre la solution de l'équation $X_t = 1 + M_0 + \int_{]0,t]} X_{s-} dM_s$, est continue de \underline{SM} dans \underline{SM} .

RESOLUTION APPROCHÉE

Dans [4] figure un résultat de résolution approchée de l'équation de Doléans-Dade et Protter par la méthode des différences finies. Nous allons nous intéresser à la méthode des itérations successives, et généraliser un résultat qui n'est donné dans [4] que dans le cas particulier de l'équation exponentielle.

THEOREME 3. On considère l'équation $X = H + FX \cdot M$, où H est dans \underline{D} , F dans $\text{Lip}(a)$ et M dans \underline{SM} . Pour tout $Y^0 \in \underline{D}$, la suite (Y^n) de processus de \underline{D} définie par la relation $Y^{n+1} = H + FY^n \cdot M$ converge dans \underline{D} vers la solution X de l'équation. Plus précisément, $X - Y^n$ tend vers 0 dans \underline{SM} .

Le théorème 3 justifie la définition de la topologie de \underline{SM} : il fournit des suites pour lesquelles \underline{SM} est un cadre naturel de convergence.

Démonstration. Par arrêt, on se ramène au cas où Y^0 est borné, où M est découpée en tranches plus petites que $\alpha = \frac{1}{10a}$ par une suite de temps d'arrêt $0 = T_0 \leq \dots \leq T_k$, et où $H = H^{T_k-}$. Posons $m = \sup(\|M\|_{\underline{H}^\infty}, 3\alpha)$.

Les processus $V^n = X - Y^n$ vérifient l'équation

$$V^n = (Y^{n+1} - Y^n) + G^n V^n \cdot M,$$

où $G^n \in \text{Lip}(a)$ est la fonctionnelle $F(\cdot + Y^n) - FY^n$. Le lemme fondamental donne $\|V^n\|_{\underline{S}^2} \leq b \|Y^{n+1} - Y^n\|_{\underline{S}^2}$, où b ne dépend pas de n . Nous allons établir que $Y^{n+1} - Y^n$ tend vers zéro dans \underline{S}^2 . La première partie du théorème en découlera, et la seconde résultera de

$$\|Y^{n+1} - X\|_{\underline{H}^2} = \|(FY^n - FX) \cdot M\|_{\underline{H}^2} \leq a \|Y^n - X\|_{\underline{S}^2} \|M\|_{\underline{H}^\infty}.$$

Soit donc Z^n le processus $Y^{n+1} - Y^n$; posons $z_i^n = \|(Z^n)^{T_i-}\|_{\underline{S}^2}$ et, pour tout $U \in \underline{D}$, $D_i U = (U - U^{T_i})^{T_{i+1}-}$. On a

$$z_{i+1}^{n+1} \leq z_i^{n+1} + \|\Delta Z_{T_i}^{n+1}\|_{L^2} + \|D_1 Z^{n+1}\|_{\underline{S}^2}.$$

Mais les Z^n vérifient la relation de récurrence $Z^{n+1} = G^n Z^n \cdot M$, d'où

$$\Delta Z_{T_i}^{n+1} = G^n Z_{T_i}^n \cdot \Delta M_{T_i}; \quad D_1 Z^{n+1} = G^n Z^n \cdot D_1 M.$$

Les inégalités (6) et (4) permettent d'établir la relation de récurrence

$$z_{i+1}^{n+1} \leq z_i^{n+1} + a z_i^n + \beta a z_{i+1}^n \alpha.$$

Pour terminer la démonstration, nous allons montrer que cette relation implique la convergence vers zéro de z_k^n ($= \|Z^n\|_{\underline{S}^2}$) quand n tend vers l'infini. Posons $p = am$, $q = \beta a \alpha = \frac{\beta}{10} \leq p$ (définition de m), $v_i^n = \beta^{n+2i} p^i q^{n-i}$. Avec ces notations, la suite double v_i^n satisfait une relation de récurrence analogue à celle vérifiée par z_i^n , mais dans l'autre sens:

$$v_{i+1}^{n+1} + p v_i^n + q v_{i+1}^n = (\beta q + p + 9p) v_i^n < 27 p v_i^n = v_{i+1}^{n+1}.$$

Soit alors c un réel tel que, pour tout i de 0 à k , on ait $z_i^0 \leq c v_i^0$. Comme

z_0^n est nul, la relation $z_i^n \leq c v_i^n$ a lieu pour tous les couples (n, i) tels que

$n = 0$ ou $i = 0$. D'autre part, si elle a lieu pour (n, i) , $(n, i+1)$ et $(n+1, i)$,

$$z_{i+1}^{n+1} \leq z_i^{n+1} + p z_i^n + q z_{i+1}^n \leq c (v_i^{n+1} + p v_i^n + q v_{i+1}^n) \leq c v_{i+1}^{n+1},$$

et elle a lieu pour le couple $(n+1, i+1)$. Elle a donc lieu pour tous les couples

(n, i) tels que $0 \leq i \leq k$ et en particulier pour les couples (n, k) :

$$z_k^n \leq c \beta^{n+2k} (am)^k (\beta/10)^{n-k} = c (30am)^k (9/10)^n,$$

et z_k^n tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini. —

CAS OU LA CONSTANTE DE LIPSCHITZ a DÉPEND DE ω

La définition de $\text{Lip}(a)$ peut être généralisée en y remplaçant la constante a par une variable aléatoire:

THEOREMES 1', 2', 3'. Les théorèmes 1, 2 et 3 restent vrais lorsque l'on y substitue au réel a une variable aléatoire $a(\omega)$ \mathbb{F} -mesurable finie p.s.

Démonstration. On emploie la méthode de localisation de Lengart ([5]).

Rappelons que si (Ω_k) est une suite d'événements non négligeables de \mathbb{F} de réunion Ω , en appelant P_k la probabilité P conditionnée par l'événement Ω_k ,

1) tout processus $M \in \underline{\underline{D}}$ qui est une semimartingale pour chaque P_k est une semimartingale pour P (théorème de Jacod et Meyer, [9]);

2) si une suite (M^n) de semimartingales tend vers une même limite M dans tous les espaces $\underline{\underline{SM}}(P_k)$ simultanément, la convergence a aussi lieu dans $\underline{\underline{SM}}(P)$ (proposition 7 de [3]).

En appliquant ceci à $\Omega_k = \{\omega : a(\omega) \leq k\}$ (non négligeable pour k assez grand), et en utilisant le fait ([5]) que les intégrales stochastiques conservent la même valeur lorsqu'on les calcule pour P_k , les théorèmes 1', 2' et 3' se déduisent immédiatement des théorèmes 1, 2 et 3. —

REFERENCES

- [1] C. DOLEANS-DADE. On the existence and unicity of solutions of stochastic integral equations. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie* 36, 95-101, 1976.
- [2] C. DOLEANS-DADE et P.A. MEYER. Equations différentielles stochastiques. Séminaire de Probabilités XI, p. 581.
- [3] M. EMERY. Une topologie sur l'espace des semimartingales. Dans ce volume.
- [4] M. EMERY. Stabilité des solutions des équations différentielles stochastiques; application aux intégrales multiplicatives. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie* 41, 241-262, 1978.
- [5] E. LENGLART. Sur la localisation des intégrales stochastiques. Séminaire de Probabilités XII, p. 53.
- [6] M. METIVIER et J. PELLAUAIL. On a stopped Doob's inequality and general stochastic equations. Rapport interne N° 28, Ecole Polytechnique de Paris, Février 1978.
- [7] P.A. MEYER. Inégalités de normes pour les intégrales stochastiques. Séminaire de Probabilités XII, p. 757.
- [8] P.A. MEYER. Le théorème fondamental sur les martingales locales. Séminaire de Probabilités XI, p. 463.

- [9] P.A. MEYER. Sur un théorème de C. Stricker.
Séminaire de Probabilités XI, p. 482.
- [10] Ph. PROTTER. On the existence, uniqueness, convergence and explosions of solutions of systems of stochastic integral equations.
Ann. of Prob. 5, 243-261, 1977.
- [11] Ph. PROTTER. Right-continuous solutions of systems of stochastic integral equations. J. Multivariate Analysis 7, 204-214, 1977.
- [12] Ph. PROTTER. \underline{H}^p -Stability of solutions of stochastic differential equations.
Z. Wahrscheinlichkeitstheorie 44, 337-352, 1978.

IRMA (L.A. au C.N.R.S.)
7 rue René Descartes
F-67084 STRASBOURG-Cedex