

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

ALINE BONAMI

DOMINIQUE LÉPINGLE

Fonction maximale et variation quadratique des martingales en présence d'un poids

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 13 (1979), p. 294-306

http://www.numdam.org/item?id=SPS_1979__13__294_0

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

FONCTION MAXIMALE ET VARIATION QUADRATIQUE DES MARTINGALES
EN PRESENCE D'UN POIDS

par A. BONAMI et D. LEPINGLE

§ 1. Introduction. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$ un espace probabilisé complet filtré, la filtration (\mathcal{F}_t) étant continue à droite, contenant les ensembles négligeables de \mathcal{F} , et engendrant \mathcal{F} . Pour toute martingale uniformément intégrable X , on note

$$X^* = \sup_t |X_t|$$

la fonction maximale associée. Les inégalités de Doob affirment que si $p > 1$, il existe une constante c_p telle que

$$(1.1) \quad E[(X^*)^p] \leq c_p E[|X_\infty|^p].$$

Soit Z une variable aléatoire strictement positive d'intégrale égale à 1, et soit $Z_t = E[Z | \mathcal{F}_t]$ la martingale associée. On note \hat{P} la probabilité $Z.P$, et on s'intéresse à la question suivante : à quelle condition sur Z existe-t-il une constante c_p indépendante de X telle que

$$(1.2) \quad \hat{E}[(X^*)^p] \leq c_p \hat{E}[|X_\infty|^p] ?$$

Ce problème a été entièrement résolu dans le cas des martingales dyadiques (c'est-à-dire pour $\Omega =]0,1[$, $dP = dx$, \mathcal{F}_n la tribu engendrée par les

intervalles $]k 2^{-n}, (k+1) 2^{-n}]$, $k = 0, 1, \dots, 2^n - 1$) par Muckenhoupt ([8], voir également [3]). S'inspirant de ce cas particulier, Izumisawa et Kazamaki ont dans [6] introduit la classe de poids (A_p) .

Définition 1. On dit que le poids Z satisfait à la condition (A_p) , où $p > 1$, s'il existe une constante C_p telle qu'en dehors d'un ensemble de probabilité nulle, pour tout $t > 0$,

$$Z_t (E[Z^{-\frac{1}{p-1}} | \mathcal{F}_t])^{p-1} \leq C_p.$$

Ils ont montré que

si $Z \in (A_{p_0})$, l'inégalité (1.2) a lieu pour tout $p > p_0$ et pour toute martingale uniformément intégrable X . En même temps, ils donnent une condition assez technique pour que, si $Z \in (A_p)$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $Z \in (A_{p-\varepsilon})$.

Le point de départ de ce travail était de montrer que si $Z \in (A_p)$ et s'il existe une constante C telle que $\sup_t Z_{t-}/Z_t \leq C$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $Z \in (A_{p-\varepsilon})$: il en résulte que dans ce cas l'inégalité (1-2) a lieu pour toute martingale X uniformément intégrable.

Cette propriété des poids $Z \in (A_p)$ tels que $\sup_t (Z_{t-}/Z_t) < \infty$, qui avait été signalée dans [1], a été également remarquée par C. Doléans-Dade et P.A. Meyer ([4]).

Nous renvoyons donc le lecteur à leur excellente rédaction, et nous nous contentons de montrer dans le § 3, à l'aide d'un contre-exemple déjà donné dans [1], qu'il existe des poids $Z \in (A_p)$ n'appartenant à aucune classe $(A_{p-\epsilon})$, $\epsilon > 0$. Toutefois, dans le contre-exemple étudié, l'inégalité (1.2) a encore lieu. La question est donc encore ouverte de savoir si la condition (A_p) entraîne en toute généralité l'inégalité (1-2).

Dans le § 2, nous étudions les inégalités à poids pour la variation quadratique. Rappelons que si X est une martingale locale, sa variation quadratique $[X]$ est le processus défini de la manière suivante : X admet une décomposition unique en $X^c + X^d$, où X^c est une martingale locale continue, X^d une somme compensée de sauts nulle en zéro ; on pose

$$[X]_t = \langle X^c \rangle_t + \sum_{0 < s \leq t} (\Delta X_s)^2,$$

où $\langle X^c \rangle_t$ est l'unique processus croissant continu adapté A_t tel que $(X^c)^2 - A$ soit une martingale locale nulle en zéro. Il est bien connu [7] que si X est uniformément intégrable, $[X]_\infty$ est fini p.s., et que si $p > 1$

$$(1.3) \quad E[[X]_\infty^{p/2}] \leq c_p E[|X_\infty|^p].$$

Nous montrons que si Z vérifie la condition (A_p) et si $0 < c \leq Z_t / Z_t \leq C$, l'inégalité à poids

$$(1.4) \quad \hat{E}[[X]_{\infty}^{p/2}] \leq c_p \hat{E}[|X_{\infty}|^p]$$

a également lieu. Pour ce faire, nous établissons diverses inégalités à poids entre $[X]_{\infty}$ et X^* qui généralisent celles de [6].

Dans ce qui suit, lorsque p est pris > 1 , nous poserons $V = Z^{-\frac{1}{p-1}}$ et $V_t = E[V | \mathfrak{F}_t]$. Nous supposons avoir choisi des versions continues à droite, pourvues de limites à gauche des processus Z_t et V_t , et si $Z \in (A_p)$, telles que l'inégalité

$$Z_t V_t^{p-1} \leq C_p$$

ait lieu pour tout t , en dehors d'un ensemble négligeable de Ω .

Nous avons par ailleurs $Z_t V_t^{p-1} \geq 1$ comme conséquence de l'inégalité de Hölder appliquée à $1 = E[Z V^{p-1} | \mathfrak{F}_t]$. Rappelons que sur \mathfrak{F}_t , $\frac{d\hat{P}}{dP} = Z_t$, et que l'on a

$$\hat{E}[X | \mathfrak{F}_t] = E\left[\frac{Z}{Z_t} X | \mathfrak{F}_t\right] = \frac{1}{Z_t} E[ZX | \mathfrak{F}_t].$$

Citons enfin le lemme suivant ([4], § 6) :

Lemme (ou inégalité de Hölder inverse) : Si $Z \in (A_p)$ et s'il existe une constante C telle que $\sup Z_{t-} / Z_t \leq C$, il existe $\delta > 0$ et C' tels que, quel que soit t ,

$$E(V^{1+\delta} | \mathfrak{F}_t) \leq C' V_t^{1+\delta}.$$

§ 2. Fonction maximale et variation quadratique

Izumisawa et Kazamaki ont également obtenu dans [6] des conditions pour que les inégalités de Burkholder-Davis-Gundy qui relient fonction maximale et variation quadratique soient encore vérifiées pour la probabilité \hat{P} , mais ils se sont restreints aux martingales à trajectoires continues.

Nous reprenons cette question par une méthode différente valable pour des martingales quelconques.

Rappelons qu'une fonction ϕ sur \mathbb{R}_+ est dite à croissance modérée si : $\phi(0) = 0$, ϕ est convexe et croissante, $\phi(2\lambda) \leq C \phi(\lambda)$ pour tout $\lambda > 0$.

A côté de la condition (A_p) ($p > 1$), il est naturel d'introduire la condition (\hat{A}_p) obtenue en permutant les rôles de P et \hat{P} . Nous dirons que $Z \in (\hat{A}_p)$ si en dehors d'un ensemble de probabilité nulle,

$$\frac{1}{Z_t} (\hat{E}[Z^{\frac{1}{p-1}} | \mathcal{F}_t])^{p-1} \leq C_p \text{ pour tout } t > 0.$$

Remarquons qu'une forme équivalente de cette condition est

$$E[Z^{\frac{p}{p-1}} | \mathcal{F}_t] \leq C_p Z_t^{\frac{p}{p-1}}$$

Nous dirons de plus que $Z \in (\hat{A}_\infty)$ s'il existe un $p > 1$ tel que $Z \in (\hat{A}_p)$.

Lemme. Si $Z \in (\hat{A}_p)$, $\forall A \in \mathcal{F}$, $\forall t \geq 0$,

$$(\hat{E}[1_A | \mathcal{F}_t])^p \leq C_p E[1_A | \mathcal{F}_t]$$

Preuve. D'après l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned} (\hat{E}[1_A \frac{Z}{Z} | \mathcal{F}_t])^p &\leq \hat{E}[1_A/Z | \mathcal{F}_t] (\hat{E}[Z^{\frac{1}{p-1}} | \mathcal{F}_t])^{p-1} \\ &= E[1_A | \mathcal{F}_t] \frac{1}{Z_t} (\hat{E}[Z^{\frac{1}{p-1}} | \mathcal{F}_t])^{p-1} \\ &\leq C_p E[1_A | \mathcal{F}_t]. \end{aligned}$$

Proposition 1. Soit M une martingale uniformément intégrable vérifiant $|\Delta M_t| \leq S_{t-}$ pour tout $t > 0$, où S est un processus croissant adapté. Supposons que Z vérifie la condition (\hat{A}_p) . Il existe alors deux

constantes c_1 et c_2 ne dépendant pas de M telles que si $\beta > 1$,
 $0 < \delta < \beta - 1$, $\lambda > 0$,

$$\hat{P}([M]_{\infty}^{1/2} > \beta\lambda, M^* \vee S_{\infty} < \delta\lambda) \leq c_1 \left(\frac{\delta^2}{\beta^2 - \delta^2 - 1} \right)^{1/p} \hat{P}([M]_{\infty}^{1/2} > \lambda)$$

$$\hat{P}(M^* > \beta\lambda, [M]_{\infty}^{1/2} \vee S_{\infty} < \delta\lambda) \leq c_2 \left(\frac{\delta}{\beta - \delta - 1} \right)^{2/p} \hat{P}(M^* > \lambda)$$

Preuve. Bornons-nous à démontrer la première de ces inégalités de distribution,
à l'aide de la méthode habituelle [2]. Posons

$$T = \inf\{t : [M]_t > \lambda^2\}$$

$$S = \inf\{t : \sup_{s < t} [M_s] \vee S_t > \delta\lambda\}$$

$$M'_t = M_{(t+T)AS} - M_{TAS} ;$$

M' est une martingale adaptée à la filtration $(\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_{t+T})$, et sur
l'ensemble $A = \{[M]_{\infty}^{1/2} > \beta\lambda, S = \infty\}$,

$$[M']_{\infty} = [M]_{\infty} - [M]_T = [M]_{\infty} - \Delta M_T^2 - [M]_{T-} \geq (\beta^2 - \delta^2 - 1)\lambda^2$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} E[1_A | \mathcal{G}_0] &\leq E[1_{\{[M']_{\infty} \geq (\beta^2 - \delta^2 - 1)\lambda^2\}} | \mathcal{G}_0] \\ &\leq \frac{E([M']_{\infty} | \mathcal{G}_0)}{(\beta^2 - \delta^2 - 1)\lambda^2} \\ &= \frac{E(\Sigma(M'_{\infty})^2 | \mathcal{G}_0)}{(\beta^2 - \delta^2 - 1)\lambda^2} \\ &\leq \frac{g\delta^2}{\beta^2 - \delta^2 - 1} \end{aligned}$$

D'après le lemme,

$$\hat{E}(1_A | \mathcal{G}_0) \leq (9 c_p \frac{\delta^2}{\beta^2 - \delta^2 - 1})^{1/p},$$

comme $\{T < \infty\} = \{[M]_\infty^{1/2} > \lambda\} \in \mathcal{G}_0$ et que de plus $A \in \{T < \infty\}$,

$$\hat{P}(A) \leq c_1 \left(\frac{\delta^2}{\beta^2 - \delta^2 - 1}\right)^{1/p} \hat{P}(T < \infty).$$

La seconde inégalité de distribution se démontre de manière analogue.

Proposition 2. Si $Z_{t-}/Z_t \leq c_1$ pour tout $t > 0$ et si B ^{est} un processus croissant adapté, nul en zéro, de compensateur prévisible A , alors pour toute fonction ϕ à croissance modérée,

$$\hat{E}(\phi(A_\infty)) \leq c E(\phi(B_\infty))$$

Preuve. D'après l'inégalité de Neveu-Garsia [5,7], il suffit de démontrer que pour tout temps d'arrêt T ,

$$\hat{E}(A_\infty - A_T | \mathcal{F}_T) \leq c \hat{E}(B_\infty | \mathcal{F}_T)$$

et en fait (en posant $B'_t = 1_D(B_t - B_{t \wedge T})$, $A'_t = 1_D(A_t - A_{t \wedge T})$, où $D \in \mathcal{F}_T$) il suffira de démontrer que $\hat{E}(A'_\infty) \leq c \hat{E}(B'_\infty)$. Or

$$\hat{E}(A'_\infty) = E\left(\int_0^\infty Z_{s-} dA_s\right) \leq c_1 E\left(\int_0^\infty Z_s dA_s\right) = c_1 E\left(\int_0^\infty Z_s dB_s\right) = c_1 \hat{E}(B'_\infty).$$

Théorème 1. Si $Z \in (\hat{A}_\infty)$ et si $Z_{t-}/Z_t \leq c_1$, alors pour toute fonction ϕ à croissance modérée, il existe deux constantes c et C telles que

$$c \hat{E}(\phi(X^*)) \leq \hat{E}(\phi([X]_\infty^{1/2})) \leq C \hat{E}(\phi(X^*))$$

pour toute martingale uniformément intégrable X .

Preuve. Nous suivons la démarche de la décomposition de B. Davis (voir par exemple [2]) en posant

$$S_t = \sup_{s < t} |\Delta X_s|$$

$$N_t^1 = \sum_{s < t} \Delta X_s \mathbf{1}_{\{|\Delta X_s| > 2 S_{s-}\}}$$

N^2 le compensateur prévisible de N^1

$$N = N^1 - N^2$$

$$M = X - N.$$

On vérifie qu'alors $\int_0^\infty |dN^1|_t \leq 2 S_\infty \leq 4 X^*$ et $|dM_t| \leq 4 S_{t-}$

Il résulte alors de la proposition 1 ci-dessus et du lemme 7.1 de [2]

que

$$\begin{aligned} \hat{E}(\phi([M]_\infty^{1/2})) &\leq c \hat{E}(\phi(X^*)) + c \hat{E}(\phi(S_\infty)) \\ &\leq c \hat{E}(\phi(X^*)) + c \hat{E}(\phi(N^*)) \\ &\leq c \hat{E}(\phi(X^*)) + c \hat{E}(\phi(\int_0^\infty |dN|_s)), \end{aligned}$$

où c varie de place en place ; la proposition 2 montre que

$$\hat{E}(\phi(\int_0^\infty |dN|_s)) \leq c \hat{E}(\phi(S_\infty)) < c \hat{E}(\phi(X^*)),$$

et comme $[N]_\infty^{1/2} \leq \int_0^\infty |dN|_s$, nous avons la deuxième inégalité

$$\hat{E}(\phi([X]_\infty^{1/2})) \leq c \hat{E}(\phi(X^*)),$$

la première se démontrant de façon analogue.

Théorème 2. Si Z vérifie la condition (A_p) et s'il existe deux constantes c_1 et c_2 telles que $0 \leq c_1 \leq Z_{t-} / Z_t \leq c_2$ pour tout $t > 0$, il existe alors deux constantes c et C telles que pour toute martingale uniformément intégrable X ,



$$c \hat{E}(|X_\infty|^p) \leq \hat{E}(|X_\infty|^{p/2}) \leq c \hat{E}(|X_\infty|^p) .$$

Preuve. En utilisant le théorème 1, nous obtenons le résultat si Z vérifie (A_p) , (\hat{A}_∞) et si $Z_{t-}/Z_t \leq c_2$. Supposons maintenant que Z vérifie (A_p) et $Z_t/Z_{t-} \leq \frac{1}{c_1}$. Alors, si p' est le conjugué de p ($\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$), on peut vérifier que V satisfait à

$(A_{p'})$, et que $Z = V^{-\frac{1}{p'-1}}$. Le lemme préliminaire du § 1 prouve que Z vérifie l'inégalité de Hölder inverse, ce qui est équivalent au fait que $Z \in (\hat{A}_\infty)$.

§ 3. Etude d'un exemple. Nous avons dit que si Z appartient à la classe (A_p) et si $Z_{t-}/Z_t \leq C$, il existe $\epsilon > 0$ tel que Z appartienne à la classe $(A_{p-\epsilon})$. La condition $Z_{t-}/Z_t \leq C$ est évidemment satisfaite lorsque la martingale Z_t est continue. Si $Z \in (A_p)$, elle est équivalente à la condition $V_t/V_{t-} \leq c$. En particulier, soit (\mathcal{F}_n) une suite croissante de tribus atomiques pour lesquelles il existe une constante K telle que, si A est un atome de \mathcal{F}_n et \tilde{A} l'atome de \mathcal{F}_{n-1} contenant A , $P(\tilde{A})/P(A) \leq K$. Alors, si V_n est une martingale positive, $V_n/V_{n-1} \leq k$ puisque sur l'atome $A \in \mathcal{F}_n$,

$$V_{n-1} = \frac{1}{P(\tilde{A})} \int_{\tilde{A}} V_n dP \geq V_n \frac{P(A)}{P(\tilde{A})} .$$

Dans ce cas (et c'est le cas des tribus dyadiques sur $]0,1[$), la condition supplémentaire $Z_{n-1}/Z_n \leq C$ est

conséquence du fait que $Z \in (A_p)$.

Soient par contre $\Omega =]0,1[$, \mathcal{F}_n la tribu engendrée par les

intervalles $] \frac{1}{(k+1)!}, \frac{1}{k!}]$, $k = 1, \dots, n$, P la mesure de Lebesgue.

Nous allons montrer qu'il existe un poids Z qui satisfait à la condition (A_2) sans satisfaire à la condition $(A_{2-\epsilon})$, et ceci quel que soit $\epsilon > 0$. Comme \mathcal{F}_∞ est la tribu engendrée par les

intervalles $] \frac{1}{(k+1)!}, \frac{1}{k!}]$, $k \in \mathbb{N}^*$, Z est entièrement défini par la suite z_k de ses valeurs sur $] \frac{1}{(k+1)!}, \frac{1}{k!}]$. Prenons

$$z_k = b 2^k / k! \quad , \quad \text{où } b^{-1} = \sum_1^\infty 2^k / k! \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} \right) .$$

Soit $V = Z^{-1} = b^{-1} \sum_1^\infty k! 2^{-k} 1_{] \frac{1}{(k+1)!}, \frac{1}{k!}]}$. On calcule que

$$E[V^\gamma] > \frac{1}{2} \sum_1^\infty (k!)^{\gamma-1} 2^{-k} = +\infty \quad \text{si } \gamma > 1 .$$

Donc, si $\epsilon > 0$, $Z \notin (A_{2-\epsilon})$. Montrons cependant que $Z \in (A_2)$. Il suffit de montrer que pour tout n ,

$$(n! \int_0^{1/n!} V \, dx) (n! \int_0^{1/n!} Z \, dx) \leq C .$$

$$\text{Mais } b^{-1} \int_0^{1/n!} Z \, dx = \sum_{k>n} 2^k / k! \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} \right) \leq \sum_{k>n} \frac{2^k}{(k!)^2} \leq 2 \frac{2^n}{(n!)^2}$$

De même,

$$b \int_0^{1/n!} V \, dx \leq \sum_{k>n} 2^{-k} = 2^{-n+1} .$$

D'où l'inégalité cherchée avec $C = 4$.

On peut néanmoins montrer dans cet exemple que, quelle que soit la martingale uniformément intégrable X , l'inégalité

$$(4.1) \quad \hat{E}[(X^*)^2] \leq C \hat{E}[X^2]$$

est satisfaite. En effet, si $X = x_k$ sur $]\frac{1}{(k+1)!}, \frac{1}{k!}]$,

$$\hat{E}[X^2] \geq \frac{1}{2} \sum x_k^2 \frac{2^k}{(k!)^2}.$$

Posons $y_k = x_k 2^k/k!$. Alors, si $Y = \sum y_k 1_{]2^{-k-1}, 2^{-k}]}$,

$$2 \int_0^1 X^2 Z dx \geq \int_0^{1/2} Y^2 dx.$$

Soit (\mathcal{G}_n) la famille de tribus sur $]0, \frac{1}{2}]$ telle que \mathcal{G}_n soit engendrée par les intervalles $]2^{-k-1}, 2^{-k}]$, $k \leq n$. Soit Y^* la fonction maximale associée à Y pour cette famille de tribus. Il résulte du théorème de Doob que

$$(4.2) \quad \int_0^{1/2} (Y^*)^2 dx \leq C \int_0^{1/2} Y^2 dx.$$

Nous aurons démontré l'inégalité (4.1) si nous montrons que sur

$]\frac{1}{(k+1)!}, \frac{1}{k!}]$, X^* prend une valeur x_k^* majorée par $k! 2^{-k} y_k^*$,

où y_k^* désigne la valeur de Y^* sur $]2^{-k-1}, 2^{-k}]$. En effet, nous aurons alors

$$\int (X^*)^2 Z dx \leq \sum x_k^{*2} \frac{2^k}{(k!)^2} \leq \sum y_k^{*2} 2^{-k} \leq \int_0^{1/2} (Y^*)^2 dx.$$

On conclut ensuite en utilisant (4.2). Montrons donc que

$$x_k^* \leq k! 2^{-k} y_k^*.$$

Mais $x_k^* = \sup \{x_k, \sup_{n < k} n! \int_0^{1/n!} x \, dx\}$.

Or

$$x_k = k! 2^{-k} y_k \leq k! 2^{-k} y_k^* ,$$

et

$$n! \int_0^{1/n!} x \, dx \leq n! \sum_{j > n} y_j 2^{-j} \leq n! 2^{-n} y_k^* .$$

Comme la suite $n! 2^{-n}$ est croissante, on en déduit l'inégalité cherchée.

Remarque. Plus généralement, si $p > 1$, si l'on choisit $z_n = b \left(\frac{2^k}{k!}\right)^{p-1}$,

on peut montrer que $Z \in (A_p)$ tandis que $z \notin \bigcup_{\epsilon > 0} (A_{p-\epsilon})$, et que

l'inégalité

$$\hat{E}[(X^*)^p] < c \hat{E}[|X_\infty|^p]$$

est satisfaite quelle que soit la martingale uniformément intégrable X .

REFERENCES

- [1] D. BEKOLLE et A. BONAMI. *Inégalités à poids pour le noyau de Bergman*. Note aux C.R.A.S. Paris - t. 286, 775-778 (1978)
- [2] D.L. BURKHOLDER. *Distribution function inequalities for martingales*. Annals of Prob., 1, 19-42 (1973) .
- [3] R.R. COIFMAN et C. FEFFERMAN. *Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals*, Studia Math., 51, 241-250 (1974).
- [4] C. DOLEANS-DADE et P.A. MEYER : *inégalités de normes avec poids*.
- [5] A. GARSIA. *Martingale inequalities*. Benjamin 1973
- [6] M. IZUMISAWA et N. KAZAMAKI. *Weighted norm inequalities for martingales*. Tôhoku Math. Journal, 29, 115-124 (1977).
- [7] P.A. MEYER. *Un cours sur les intégrales stochastiques*. Séminaire de Probabilités X. Lecture Notes n° 511. Springer 1976.
- [8] B. MUCKENHOUP . *Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function*. Trans. Amer. Math. Soc., 165, 207-226 (1972).