THIERRY JEULIN
MARC YOR

Sur l'expression de la dualité entre H^1 et BMO

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 13 (1979), p. 360-370
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1979__13__360_0>

Sur l'expression de la dualité entre H^1 et BMO

T. Jeulin et M. Yor

Introduction

Un théorème de représentation, dû à Herz et Lépingle constitue un des piliers de l'étude sur la topologie $\sigma(H^1, BMO)$ menée en [1], et nous a incité ensuite à apporter quelques précisions sur l'expression de la dualité entre H^1 et BMO.

Ainsi, on étudie dans cette note la question suivante : pour quels couples de martingales $(X,Y) \in H^1 \times BMO$, a-t-on

$$E(|X_\infty Y_\infty|) < \infty \quad \text{et} \quad (X,Y)_{H^1 \times BMO} = E(X_\infty Y_\infty) \ ?$$

0 - Soit $(\Omega, \underline{\underline{F}}, \underline{\underline{F}}_t, P)$ un espace de probabilité filtré, où $(\underline{\underline{F}}_t)$ est une filtration vérifiant les conditions habituelles. On suppose, de plus, $\underline{\underline{F}} = \bigvee_t \underline{\underline{F}}_t$, ce qui permet d'identifier systématiquement une variable $X \in L^1(\underline{\underline{F}})$ avec la martingale càdlàg uniformément intégrable $X_t = E(X|\underline{\underline{F}}_t)$.

1 -Le critère suivant d'appartenance à BMO est le pendant, en théorie des martingales, du résultat analogue sur l'espace fonctionnel $BMO(\mathbb{R}^d)$ (cf [2], p.136, lemme3).

Proposition 1: Soit $X \in L^2(\underline{\underline{F}}_\infty)$.
X appartient à BMO si, et seulement si, il existe un processus adapté, continu à gauche Z, et une constante c tels que: pour tout t.a T, $1_{(T<\infty)} Z_T \in L^2$ et $E\{(X-Z_T)^2 \mid \underline{\underline{F}}_T\} \leq c^2$, sur $(T<\infty)$.
De plus, on a alors: $\|X\|_{BMO} \leq 2c$.

Démonstration:

a) Si $X \in BMO$, le processus $Z=X_-$ et la constante $c=\|X\|_{BMO}$ vérifient les conditions demandées.

b) Inversement, s'il existe un processus Z et une constante c satisfaisant les hypothèses, on a, pour tout t.a. T, sur $(T<\infty)$:

$$(E(X|\underline{\underline{F}}_T) - Z_T)^2 \leqslant E\{(X-Z_T)^2|\underline{\underline{F}}_T\} \leqslant c^2 \ .$$

D'après le théorème de section optionnel, on a donc: $(X_t-Z_t)^2 \leqslant c^2$, hors d'un ensemble évanescent.

La continuité à gauche de Z entraine que : $(X_{t-}-Z_t)^2 \leqslant c^2$, hors du même ensemble.

Pour tout t.a. T, on a donc, sur $(T<\infty)$:

$$E\{(X-X_{T-})^2|\underline{\underline{F}}_T\} \leqslant 2E\{(X-Z_T)^2 + (Z_T-X_{T-})^2|\underline{\underline{F}}_T\} \leqslant 4c^2 \ .$$

X appartient donc à BMO, et $\|X\|_{BMO} \leqslant 2c$.

On déduit de la proposition 1 deux résultats de stabilité relatifs à l'espace BMO;

Corollaire : a) Si $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une application lipschitzienne, et si $f^1,\dots,f^n$ sont n variables de BMO, alors $L(f^1,\dots,f^n) \in BMO$. De plus, si k est une constante de Lipschitz de L (pour la norme euclidienne), on a:

$$\|L(f^1,\dots,f^n)\|_{BMO} \leqslant 2k \left\{\sum_{i=1}^n \|f^i\|^2_{BMO}\right\}^{1/2}$$

b) Si $f \in BMO$, alors $f^* = \sup_t |f_t| \in BMO$, et $\|f^*\|_{BMO} \leqslant 4\|f\|_{BMO}$.

Démonstration: a) Par définition de k, on a, pour tout t.a. T, en posant $f=(f^1,\dots,f^n)$: $E\{(L(f) - L(f_{T-}))^2|\underline{\underline{F}}_T\} \leqslant c^2$, où $c=k\left\{\sum_{i=1}^n \|f^i\|^2_{BMO}\right\}^{1/2}$.

On applique la proposition 1, avec $Z=L(f_-)$.

b) Soit $f \in BMO$, et soit T un temps d'arrêt. D'après l'inégalité de Doob pour p = 2, utilisée pour toutes les martingales $f'_t = f_{S+t} - f_{S-}$, avec $S = T_A$, $A \in F_T$, on a:

$$E\left[(f^* - f^*_{T-})^2 \,|\, \underline{\underline{F}}_T\right] \leqslant 4\ E\left[(f_\infty - f_{T-})^2 \,|\, \underline{\underline{F}}_T\right] \leqslant 4\ \|f\|^2_{BMO} \ .$$

(f^*_t désigne ici le processus croissant $\sup_{s \leqslant t} |f_s|$).

On applique la proposition 1, avec $Z=f^*_-$, et c=2.

2 - Rappelons la représentation de BMO obtenue par Herz et Lépingle (cf [3]) :

si $Y \in$ BMO, il existe un processus $(B_t, t \geq 0)$, non adapté en général, à variation bornée, tel que :

a) $\int_0^\infty |dB_s| \leq C \quad \|Y\|_{BMO}$, où C est une constante universelle ;

b) $Y = A_\infty$, où A est la projection duale optionnelle de B ;

c) pour tout $X \in H^1$, on a :

$$(1) \qquad E([X,Y]_\infty) = E(\int_0^\infty X_s \, dB_s)$$

(l'intégrale figurant en (1) a bien un sens , car

$$E(\int_0^\infty |X_s||dB_s|) \leq E(X^*) \left\| \int_0^\infty |dB_s| \right\|_{L^\infty} .$$

Pour illustrer le paragraphe précédent, cherchons une représentation de Herz pour $|Y|$, si $Y \in$ BMO est représenté au moyen de B, vérifiant a), b), c) .

On a, d'après b) ,

$$|Y| = |A_\infty| = \int_{[0,\infty]} \operatorname{sgn}(A_{s-})dA_s + \sum_{0 \leq s} \{ |A_s| - |A_{s-}| - \operatorname{sgn}(A_{s-})\Delta A_s \}$$

$$= \int_{[0,\infty]} H_s \, dA_s \quad ,$$

si l'on pose $A_{0-} = 0$, et

$$H_s = \operatorname{sgn}(A_{s-}) \, 1_{(\Delta A_s = 0)} + 1_{(\Delta A_s \neq 0)} \frac{|A_s| - |A_{s-}|}{\Delta A_s} .$$

H étant optionnel, borné, on peut prendre pour B', représentation de Herz de $|Y|$: $B'_t = \int_{[0,t]} H_s \, dB_s$.

Revenons à la formule (1), pour justifier l'égalité :

$$(1') \quad \text{si } X \in H^1 , \; Y \in \text{BMO}, \quad E([X,Y]_\infty) = E(\int_0^\infty X_s \, dA_s)$$

En effet, on a :

(2) $E(\int_0^\infty |X_s|\,|dA_s|) < \infty$.

Pour montrer cela, on peut supposer B (et donc A) croissant, quitte à décomposer B en $\int_0^{\cdot} |dB_s| - (\int_0^{\cdot} |dB_s| - B)$. On a donc :

$$E(\int_0^\infty |X_s|\,dA_s) = \lim_n \uparrow E(\int_0^\infty (|X_s|\wedge n)\,dA_s)$$
$$= \lim_n \uparrow E(\int_0^\infty (|X_s|\wedge n)\,dB_s)$$
$$\leqslant E(X^*)\,\|\int_0^\infty dB_s\|_{L^\infty} \quad .$$

(2) étant vraie, on obtient, en approximant X_s par $X_s^{(n)} = (X_s\wedge n)\vee(-n)$:

$$E(\int_0^\infty X_s\,dA_s) = \lim_n E(\int_0^\infty X_s^{(n)}\,dA_s)$$
$$= \lim_n E(\int_0^\infty X_s^{(n)}\,dB_s) = E(\int_0^\infty X_s\,dB_s) \text{ , d'où } (1').$$

Il est maintenant tentant d'écrire, d'après ($1'$) :

(3?) $E([X,Y]_\infty) = E(\int_0^\infty X_s\,dA_s) \underset{(\alpha)}{=} E(X_\infty Y_\infty)$,

en invoquant, pour "justifier" (α), le fait que la projection optionnelle du processus constant X_∞ est X_s ! Or, le membre de droite de (3?) n'est en général pas défini, car $XY \notin L^1$.

Toutefois, on a la :

<u>Proposition 2</u> : <u>si</u> X <u>est une variable positive de</u> H^1 , <u>et</u> $Y\in$ BMO, <u>on a</u> : $E(X|Y|)<\infty$ <u>et</u>

(3_+) $E([X,Y]_\infty) = E(XY)$.

<u>Démonstration</u> :

Comme précédemment, on peut supposer que le processus B figurant dans la décomposition de Herz est croissant (ce qui entraine $Y \geqslant 0$).

D'après la formule ($1'$), on a , en prenant pour $X_s^{(n)}$ une version càdlàg de $E(X\wedge n\,|\,\underline{\underline{F}}_s)$:

$$E([X,Y]_\infty) = \lim_n \uparrow E(\int_0^\infty X_s^{(n)}\,dA_s)$$
$$= \lim_n \uparrow E((X\wedge n)\,Y)$$
$$= E(XY)$$

On a ainsi montré, en même temps, les deux résultats cherchés, car $E(|[X,Y]_\infty|)$ est fini, ce qui provient de l'inégalité de Fefferman.

On déduit de la proposition 2 le :

Corollaire : soit X une variable aléatoire telle qu'il existe $Y \in BMO$ vérifiant $E(|XY|) = \infty$. Alors, $|X| \notin H^1$.

Autrement dit, en général, contrairement à l'espace BMO (voir ci-dessus) et aux espaces H^p , pour $1 < p < +\infty$ (rappelons qu'alors $H^p \simeq L^p$), la fonction "valeur absolue" $x \to |x|$ ne conserve pas l'espace H^1 . Il en est de même pour la multiplication par une fonction $\varphi \in L^\infty$ (si $X \in H^1$, mais $|X| \notin H^1$, prendre $\varphi = \mathrm{sgn}(X)$).

Remarque : l'opération de multiplication par n'importe quelle $\varphi \in L^\infty$ ne conserve pas non plus, en général, l'espace BMO, comme l'a remarqué Dellacherie, en étudiant l'exemple d'espace filtré qui termine l'article [1].

3 - Les résultats précédents incitent à s'intéresser à l'espace de Banach $K^1 = \{ X \,/\, \|X\|_{K^1} = \| |X| \|_{H^1} < \infty \}$

Remarquons immédiatement que $K^1 = H^1_+ - H^1_+$.

D'autre part, on a la caractérisation suivante de K^1 :

Proposition 3 , soit $X : (\Omega, \underline{F}) \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire . Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) $X \in K^1$

ii) $\forall\, Y \in BMO$, $E(|XY|) < +\infty$.

Démonstration

D'après la proposition 2, i) implique ii) .

Inversement, supposons ii) vérifiée. On peut évidemment supposer $X \geq 0$. Rappelons que $E(X^*) = \sup_L E(X_L)$, où L varie parmi toutes les variables aléatoires positives .

Si $E(X^*) = \infty$, il existe donc, pour tout n, une variable positive $L^{(n)}$ telle que $E(X_{L(n)}) \geq 4^n$.

Notons $A^{(n)}$ la projection duale optionnelle du processus croissant (non adapté en général) $1_{(L^{(n)} \leq \ .)}$, et $A^{(n)}_\infty = Y^{(n)}$.

On sait alors que $Y^{(n)} \in$ BMO, et il existe une constante universelle C telle que $\| Y^{(n)} \|_{BMO} \leq C$ ([4] , th.4, p.334) .

Posons maintenant $Y = \sum_n 2^{-n} Y^{(n)}$.

Cette série converge normalement dans BMO, vers Y, qui appartient à BMO_+ . D'autre part, on a :

$$E(XY) = \sum_n 2^{-n} E(XY^{(n)}) = \sum_n 2^{-n} E(X_{L(n)}) = \infty ,$$

ce qui contredit ii) .

Si $X \in H^1$, mais $X \notin K^1$, il est maintenant naturel de chercher à déterminer les variables $Y \in$ BMO, pour lesquelles on a l'égalité

(3) $E([X,Y]_\infty) = E(XY)$.

On a, à ce sujet, la réponse partielle suivante :

<u>Proposition 4</u> : <u>soit</u> $X \in H^1$. <u>Si</u> $Y \in$ BMO, <u>et admet une représentation de Herz</u> $Y_\infty = A_\infty$, <u>avec</u> A , <u>processus optionnel à variation bornée,</u> <u>tel que</u> :

$$E(|X| \int_0^\infty |dA_s|) < \infty ,$$

<u>alors , on a</u> :

$E(|XY|) < \infty$, <u>et</u> (3) : $E([X,Y]_\infty) = E(XY)$.

<u>Démonstration</u>

On a $|Y| = |A_\infty| \leq \int_0^\infty |dA_s|$, d'où $E(|XY|) < \infty$.

D'autre part, on a :
$$E([X,Y]_\infty) = E(\int_0^\infty X_s \, dA_s) = \lim_n E(\int_0^\infty X_s^{(n)} \, dA_s) ,$$

où $X_s^{(n)}$ est une version càdlàg de $E((X \wedge n) \vee (-n) \mid \underline{\underline{F}}_s)$.

La dernière égalité est en effet justifiée par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, puisque

$|X_s^{(n)}| \leq E(|X| \,|\, \underline{\underline{F}}_s)$, et $E\left(\int_0^\infty E(|X| \,|\, \underline{\underline{F}}_s)|dA_s|\right) = E\left(|X|\int_0^\infty |dA_s|\right) < \infty$,

par hypothèse .

On a donc : $E([X,Y]_\infty) = \lim_n E(X_\infty^{(n)} A_\infty)$

$$= \lim_n E(X_\infty^{(n)} Y_\infty) = E(XY) .$$

<u>Remarque</u> : on ne sait pas si (3) est vraie sous la seule condition $E(|XY|) < +\infty$.

D'après la stabilité de BMO par l'application valeur absolue, on peut toujours se ramener au cas où Y est positif. Mais, ceci ne résoud pas le problème posé, car il semble improbable que tout $Y \in BMO_+$ puisse admettre une représentation de Herz à l'aide d'un processus <u>croissant</u> A .

4 - Nous nous proposons maintenant d'établir quelques résultats sur $(K^1)'$, le dual de K^1 , et la dualité $K^1 x\ (K^1)'$.

Auparavant, indiquons quelques résultats immédiats sur l'espace K^1:

- on a les injections continues suivantes :

(4) $L\log^+ L \hookrightarrow K^1 \hookrightarrow H^1$;

- K^1 est stable par multiplication par L^∞ ;
- il résulte des propositions 2 et 3 que,

sur K^1 , la norme H^1 équivaut à $X \to \sup_{\|Y\|_{BMO} \leq 1} E(XY)$

Par contre, on déduit aisément de la proposition (1') que la norme de K^1 (définie sur K^1 !) équivaut à :

$$X \longrightarrow \sup_{\|Y\|_{BMO} \leq 1} E(|XY|) .$$

Contrairement à ce qui se passe pour le couple (H^1, BMO), la dualité entre K^1 et $(K^1)'$ s'exprime très simplement :

<u>Proposition 5 : toute forme linéaire continue sur</u> K^1 <u>peut se représenter au moyen d'une variable</u> L <u>par la formule</u> :

$$\ell(X) = E(XL) \qquad (X \in K^1),$$

L <u>vérifiant</u> : $E(|XL|) < +\infty$, <u>pour toute variable</u> $X \in K^1$.

<u>Démonstration</u>

Soit ℓ une forme linéaire continue sur K^1 ; $\ell|_{H^2}$ est continue pour la norme H^2.

Il existe donc $L \in L^2$ telle que : $\forall X \in H^2$, $\ell(X) = E(XL)$.

Notons $b = \mathrm{sgn}(L)$, en posant, par exemple, $\mathrm{sgn}(0) = 1$.

Alors, on a, pour tout $X \in H^2$, $\ell(bX) = E(X|L|)$.

Soit maintenant $X \in K^1_+ = H^1_+$. Les variables $(X \wedge n)$ convergent vers X dans K^1 ; en effet, $X - (X \wedge n) = (X - n)^+$ vérifie :

$$P\left(\left[(X - n)^+\right]^* \geq c \right) \leq \frac{1}{c} E\left((X - n)^+ \right),$$

d'après l'inégalité de Doob.

Ainsi, la suite $\left[(X - n)^+\right]^*$ converge en probabilité vers 0 et est dominée dans L^1 par X^* ; elle converge donc dans K^1, ce qui est le résultat cherché.

D'après la continuité de ℓ et le théorème de Beppo-Levi, on a donc:

$$\forall X \in K^1_+ , \quad \ell(bX) = E(X|L|)$$

(en particulier, pour tout $X \in K^1$, $E(|XL|) < \infty$) .

Par différence, on a donc :

$$\forall X \in K^1 , \quad \ell(bX) = E(X|L|) ,$$

et finalement $\ell(X) = \ell(b(bX)) = E(bX|L|) = E(XL)$.

Les injections continues duales de (4) permettent de préciser les propriétés d'intégrabilité de $L \in (K^1)'$.

<u>Proposition 6</u> : <u>soit</u> $L \in (K^1)'$; <u>notons</u> $\|L\|_*$ <u>sa norme dans</u> $(K^1)'$.
<u>On a alors</u> :

$$E(\exp|L|) \leqslant \frac{1}{1 - e\,\|L\|_*} \quad \text{si} \quad \|L\|_* < \frac{1}{e} \;.$$

<u>Démonstration</u>

On a $\|\,|L|\,\|_* = \|L\|_*$; en outre, pour tout p, $1 < p < +\infty$, on a, d'après l'inégalité de Doob (q conjugué de p) :

$$|E(LX)| \leqslant \|L\|_* \; E(|X|^*) \leqslant \|L\|_* \, \|\,|X|^*\|_p \leqslant q \, \|L\|_* \, \|X\|_p \;.$$

Par suite, pour tout $q \geqslant 1$, $E(|L|^q) \leqslant q^q \, \|L\|_*^q$, d'où

$$E(\exp|L|) = \sum_n \frac{1}{n!} E(|L|^n) \leqslant \sum_n \frac{1}{n!} n^n \, \|L\|_*^n$$
$$\leqslant \sum_n (e\,\|L\|_*)^n = \frac{1}{1 - e\,\|L\|_*} \quad \text{si} \quad \|L\|_* < \frac{1}{e} \;.$$

Etudions maintenant quelques propriétés de stabilité de $(K^1)'$:
- L^∞ opérant continument (par multiplication) sur K^1, il fait de même sur son dual $(K^1)'$;
- on a aussi la :

<u>Proposition 7</u> : <u>soit</u> L <u>une variable aléatoire</u> . <u>Dès que l'une des trois variables</u> L, $|L|$ <u>et</u> L^* <u>appartient à</u> $(K^1)'$, <u>il en est de même des deux autres</u>.

<u>Démonstration</u> :

Il est clair que $\|L\|_* = \|\,|L|\,\|_* \leqslant \|L^*\|_*$.
Considérons alors $L \in (K^1)'$; pour toute variable θ , et pour tout X de K^1 , on a :

$$E(X\,L_\theta) = E\left(\int_0^\infty L_s \, dC_s\right)$$

où C est la projection duale optionnelle de $X\,1_{(\theta \leqslant s)}$.

On peut donc écrire :

$$|E(X L_\theta)| = |E(C_\infty L)| \leqslant \|L\|_* \|C_\infty\|_{K^1} .$$

Or $E(|C|_\infty | \underline{\underline{F}}_t) \leqslant E(\int_0^\infty |dC_s| \,|\, \underline{\underline{F}}_t)$

$$\leqslant E(|X| 1_{(t<\theta)} | \underline{\underline{F}}_t) + \int_0^t |dC_s| \text{ , d'où :}$$

$$(|C_\infty|)^* \leqslant \int_0^\infty |dC_s| + |X|^* \quad \text{et} \quad \|C_\infty\|_{K^1} \leqslant \|X\|_{K^1} + \|X\|_{L^1} ;$$

on a donc $\|L_\theta\|_* \leqslant 2 \|L\|_*$;

en outre, il existe une suite θ_n telle que $|L_{\theta_n}|$ croisse vers L^* .

On obtient ainsi $\|L^*\|_* \leqslant 2 \|L\|_*$.

Compte tenu des remarques faites précédemment, l'espace $(K^1)'$ contient l'ensemble $L^\infty \times BMO = (g = \varphi f \mid \varphi \in L^\infty , f \in BMO)$.

De plus, on a le :

<u>Lemme</u> : $L^\infty \times BMO$ <u>est un espace vectoriel</u> .

<u>Démonstration</u> : le seul problème est de montrer que $\varphi_1 f_1 + \varphi_2 f_2$ ($\varphi_1 \in L^\infty$, $f_1 \in BMO$) peut se mettre sous la forme φf (avec des notations évidentes) . Pour cela il suffit de prendre :

$$\varphi = \frac{\varphi_1 f_1 + \varphi_2 f_2}{|f_1| + |f_2|} 1_{(|f_1| + |f_2| \neq 0)} \quad \text{qui appartient}$$

bien à L^∞ et $f = |f_1| + |f_2|$, qui appartient à BMO, d'après la proposition 1 .

Reprenons l'exemple étudié en [1] :

$(\Omega, \underline{\underline{F}}^\circ)$ est l'intervalle $]0,1[$, muni de sa tribu borélienne, P est la mesure de Lebesgue; $(\underline{\underline{F}}^\circ_t)$ est la plus petite famille de tribus continue à droite pour laquelle la variable aléatoire

$$S : w \longrightarrow S(w) = 1 - w \qquad (w \in]0,1[ )$$

est un temps d'arrêt. On complète pour la mesure de Lebesgue et on adjoint les ensembles de mesure nulle aux $\underline{\underline{F}}_t^o$, ce qui donne la filtration $(\underline{\underline{F}}_t)$. On se limite à $t \leq 1$.

Soit $X \in L^1$; on note $MX(w) = \frac{1}{w} \int_0^w X(u)\,du$.

On peut alors prendre :

$$\|X\|_{H^1} = \|X\|_{L^1} + \|MX\|_{L^1}$$

$$\|X\|_{BMO} = \|X\|_{L^1} + \|X - MX\|_{L^\infty} .$$

A l'aide du théorème de Fubini, on montre que l'appartenance de X à K^1 équivaut à :

$$\|X.B_o\|_{L^1} < +\infty$$

où B_o est l'élément de BMO défini par $B_o(w) = \log \frac{e}{w}$ $(w \in]0,1[)$.

Par suite $(K^1)' = (V \mid V = B_o \times L \; , L \in L^\infty)$.

On a dans cet exemple (**) $(K^1)' = L^\infty \times BMO$.

Il est naturel de se demander si ce résultat est vrai en général. Nous ne savons pas répondre à cette question.

Références :

[1] DELLACHERIE C.,MEYER P.A.,YOR M. : Sur certaines propriétés des espaces de Banach H^1 et BMO . Séminaire de Probabilité XII,Lecture Notes in Math. 649 , Springer (1978).

[2] MEYER P.A.: Le dual de $H^1(\mathbb{R}^\nu)$: démonstrations probabilistes. Séminaire de Probabilités XI, Lecture Notes in Math. n°581 , Springer (1977) .

[3] MEYER P.A. : Sur un théorème de C. Herz et D. Lépingle . Séminaire de Probabilités XI,Lecture Notes in Math. n° 581 ; Springer (1977).

[4] MEYER P.A. : Un cours sur les intégrales stochastiques,Chapitre V: Les espaces H^1 et BMO. Séminaire de Probabilités X, Lecture Notes in Math. n° 511 , Springer (1976).