SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

CLAUDE DELLACHERIE

Inégalités de convexité pour les processus croissants et les sousmartingales

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 13 (1979), p. 371-377

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1979__13__371_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1977/78

INEGALITES DE CONVEXITE POUR LES PROCESSUS CROISSANTS ET LES SOUSMARTINGALES

par C. Dellacherie

Nous donnons ici une démonstration simple de l'extension due à Garsia et Neveu de l'inégalité de Burkholder-Davies-Gundy relative à un processus croissant et une de ses projections duales. Puis, nous généralisons, dans le même esprit, l'inégalité classique de Doob sur la norme L^p d'une sousmartingale. Le texte qui suit reprend, sans grandes modifications, une deuxième rédaction du paragraphe concernant ces inégalités dans le deuxième tome à paraitre du livre rose (nous n'en garantissons pas la couleur) : la troisième (et dernière ?) rédaction étant quelque peu différente, il m'a semblé intéressant de publier celle-ci, ne serait ce que pour les délais de publication...

Rappelons d'abord un peu de terminologie, en nous plaçant sous les conditions habituelles. Un <u>processus croissant brut</u> est un processus $B=(B_t)$ indexé par $\overline{\mathbb{R}}_+$ dont les trajectoires sont des fonctions croissantes à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$; un tel processus n'est pas forcément adapté, et peut avoir un saut en 0 (i.e. $0 \neq B_0$) et à l'infini (i.e. $B_{\infty -} \neq B_\infty$). Nous supposons par la suite que B_∞ est intégrable (et donc p.s. fini).

Le <u>potentiel gauche</u> Z^g <u>de</u> B est, suivant Azéma, la projection optionnelle du processus $(B_\infty - B_{t-})$. Si A est la projection duale optionnelle de B, on a, pour tout temps d'arrêt T,

$$\text{(o)} \quad Z^g_T = E[B_\infty - B_{T-} \mid \underline{\underline{F}}_T] = E[A_\infty - A_{T-} \mid \underline{\underline{F}}_T] = E[A_\infty \mid \underline{\underline{F}}_T] - A_{T-}$$

On en déduit que Z^g est aussi le potentiel gauche de A et que c'est un processus làglàd (sans être càdlàg en général - c'est en fait un exemple typique de surmartingale forte). Si $B_0 = 0$, le <u>potentiel</u> Z <u>de</u> B est, plus classiquement, la projection optionnelle du processus $(B_\infty - B_t)$. Si $\hat{A}$ est cette fois la projection duale prévisible de B, on a, pour tout t.d'a. T,

(p) $Z_T = E[B_\infty - B_T | \underline{\underline{F}}_T] = E[\hat{A}_\infty - \hat{A}_T | \underline{\underline{F}}_T] = E[\hat{A}_\infty | \underline{\underline{F}}_T] - \hat{A}_T$

On en déduit que Z est aussi le potentiel de $\hat{A}$ et que c'est une surmartingale càdlàg (c'est un "vrai" potentiel si $B_{\infty-} = B_\infty$). Enfin, écrivant (o) et (p) pour tout t.d'a. prévisible, on s'aperçoit que la version continue à gauche Z_- de Z est égale à la projection prévisible de Z^g.

Nous passons maintenant aux inégalités de convexité annoncées. Dans tout ce qui suit, nous adoptons les notations suivantes : ϕ est une fonction croissante, continue à droite, de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ et

$$\Phi(t) = \int_0^t \phi(s)\, ds$$

est donc une fonction convexe, croissante, nulle en 0 , sur $\mathbb{R}_+$. Il est clair que l'on a $\Phi(t) \leq t\phi(t)$ pour tout t ; lorsque $\Phi(t) = t^p$ pour $p \in [1,\infty[$, on a $t\phi(t)/\Phi(t) = p$. De manière générale, nous associons à notre fonction convexe Φ trois constantes p , $\bar{p}$ et q appartenant à $[1,\infty]$ comme suit :

$$p = \sup_{t\,:\,\phi(t)\neq 0} t\phi(t)/\Phi(t)$$

$$\bar{p} = \inf_{t\,:\,\phi(t)\neq 0} t\phi(t)/\Phi(t)$$

$$q = \bar{p}/(\bar{p}-1) \ , \text{ exposant conjugué de } \bar{p}$$

On a alors, pour tout $t \geq 0$,

$$\bar{p}\Phi(t) \leq t\phi(t) \leq p\Phi(t)$$

avec égalité ssi $\Phi(t)$ est proportionnelle à t^p. On dit que Φ est <u>modérée</u> si p est fini (on peut montrer que cela équivaut à l'existence d'une constante C telle que l'on ait $\Phi(2t) \leq C\Phi(t)$ pour tout t ; voir l'appendice) ; nous verrons en appendice que, lorsque Φ est une "fonction de Young" , la finitude de q correspond essentiellement à la modération de la fonction conjuguée Ψ de Φ . On associe aussi à la fonction convexe Φ une seminorme $\|\cdot\|_\Phi$ en posant, pour toute v.a. X ,

$$\|X\|_\Phi = \inf \{\lambda > 0 : E[\Phi(|X|/\lambda) \leq 1\} \leq \infty \quad ;$$

lorsque $\Phi(t) = t^p$, on obtient la norme de L^p, notée $\|\cdot\|_p$. Il est clair que $\|\cdot\|_\Phi$ est positivement homogène ; d'autre part, Φ étant croissante et convexe, la sous-additivité de $\|\cdot\|_\Phi$ résulte de l'inégalité , pour a,b > 0,

$$\Phi(|X+Y|/(a+b)) \leq \Phi((|X|+|Y|)/(a+b)) \leq \frac{a}{a+b}\Phi(\frac{|X|}{a}) + \frac{b}{a+b}\Phi(\frac{|Y|}{b}) \, .$$

Nous entrons maintenant dans le vif du sujet en démontrant un petit lemme analytique : c'est lui qui nous permettra de donner des démonstrations simples des inégalités annoncées plus haut.

LEMME.- <u>Soient</u> U <u>et</u> V <u>des v.a. positives telles que</u>

$$E[U\phi(U] < \infty \qquad , \qquad E[U\phi(U)] \leq E[V\phi(U)]$$

On a alors

$$E[\Phi(U)] \leq E[\Phi(V)]$$

DEMONSTRATION. Soit ψ l'inverse continue à droite de ϕ, à valeurs dans $[0,\infty]$: $\psi(t) = \inf\{s : \phi(s) > t\}$; ψ est finie sur $[0,\phi(\infty)[$. L'interprétation géométrique de $\Phi(t)$ comme aire du sous-graphe de ϕ entre 0 et t fournit les égalité et inégalité suivantes, pour $u,v \geq 0$,

(a) $u\phi(u) = \Phi(u) + \int_0^{\phi(u)} \psi(s)\, ds$

(faire un dessin)

(b) $v\phi(u) \leq \Phi(v) + \int_0^{\phi(u)} \psi(s)\, ds$

Si $E[U\phi(U)]$ est fini, il en est de même de $E[\int_0^{\phi(U)} \psi(s)\, ds]$ d'après (a) si bien que l'on peut retrancher cette quantité des deux membres de l'inégalité supposée $E[U\phi(U)] \leq E[V\phi(U)]$. Compte tenu de (a) et (b), on obtient alors l'inégalité voulue $E[\Phi(U)] \leq E[\Phi(V)]$.

Voici maintenant les inégalités dues essentiellement à Garsia et Neveu

THEOREME.- <u>Soit</u> A <u>un processus croissant optionnel</u> (<u>resp prévisible</u>) <u>dont le potentiel gauche</u> (<u>resp potentiel</u>) Z <u>soit majoré par une martingale càdlàg</u> $Y_t = E[Y_\infty | \underline{\underline{F}}_t]$. <u>On a alors</u>

1) $E[\Phi(A_\infty)] \leq E[Y_\infty \phi(A_\infty)]$,

2) $E[A_\infty \phi(A_\infty)] \leq E[pY_\infty \phi(A_\infty)]$,

<u>où</u> p <u>est la constante associée à</u> Φ <u>plus haut</u>,

3) $E[\Phi(A_\infty)] \leq E[\Phi(pY_\infty)]$

<u>et donc</u>, <u>par homogénéité</u>,

4) $\|A_\infty\|_\Phi \leq p\|Y_\infty\|_\Phi$.

DEMONSTRATION. Nous remarquons d'abord que, d'après le théorème de convergence monotone, on peut supposer A majoré par une constante, quitte à remplacer A par $A \wedge n$ et à faire tendre n vers l'infini. On est alors assuré que $E[\Phi(A_\infty)]$ et $E[A_\infty \phi(A_\infty)]$ sont finis ; 3) résulte alors de 2) d'après le lemme, et 2) de 1) puisque $A_\infty \phi(A_\infty)$ est majoré par $p\Phi(A_\infty)$. Reste donc à démontrer 1). Nous remarquons d'abord que l'on a

(a) $\Phi(A_\infty) \leq \int_{[0,\infty]} \phi(A_s)\, dA_s$,

inégalité résultant de la formule du changement de variable pour les intégrales de Stieltjès, mais que l'on peut aussi démontrer comme suit : si $C = (C_t)$ est le changement de temps associé à A , on a

$$\Phi(A_\infty) = \int_0^{A_\infty} \phi(s)\, ds \leq \int_0^{A_\infty} \phi(A_{C_s})\, ds = \int_{[0,\infty]} \phi(A_s)\, dA_s$$

Intégrons par parties le 2ème membre de (a) : on obtient

(b) $\Phi(A_\infty) \leq \int_{[0,\infty]} (A_\infty - A_{s-})\, d\phi(A_s)$

Maintenant, dans le cas optionnel, Z est la projection optionnelle du processus $(A_\infty - A_{t-})$, si bien que, $\phi(A)$ étant un processus croissant optionnel, l'espérance du second membre de (b) est égale à celle de $\int_{[0,\infty]} Z_s \, d\phi(A_s)$. Comme Z est majoré par Y , il résulte de (b) que

$$E[\Phi(A_\infty)] \leq E[\int_{[0,\infty]} Y_s \, d\phi(A_s)] = E[Y_\infty \phi(A_\infty)],$$

la dernière égalité provenant aussi du fait que (Y_t) est la projection optionnelle du processus "constant" (Y_∞) et que $\phi(A)$ est optionnel. Dans le cas prévisible, ce dernier est prévisible et Y_- , qui est aussi la projection prévisible de Y , majore Z_- , projection prévisible du processus $(A_\infty - A_{t-})$, si bien que l'on obtient aussi $E[\Phi(A_\infty)] \leq E[Y_\infty \phi(A_\infty)]$.

REMARQUES. i) Si A est la projection duale optionnelle (resp prévisible) du processus croissant brut B , on peut prendre $Y_\infty = B_\infty$, d'où l'on a

$$\|A_\infty\|_\Phi \leq p\|B_\infty\|_\Phi ,$$

inégalité de Burkholder-Davis-Gundy.

ii) Si on prend $\phi_a(t) = 1_{[a,\infty[}(t)$, avec $a \in \mathbb{R}_+$, on a $\Phi_a(t) = (t-a)^+$ si bien que l'inégalité 1) du théorème s'écrit dans ce cas

$$\int_{\{A_\infty \geq a\}} (A_\infty - a) \, dP \leq \int_{\{A_\infty \geq a\}} Y_\infty \, dP$$

On retrouve par ailleurs l'inégalité générale 1) en intégrant les deux membres de cette dernière inégalité par rapport à $d\phi(a)$: c'est la démarche adoptée par Garsia et Neveu pour démontrer 1) .

COROLLAIRE.- Soit A un processus croissant optionnel (resp prévisible) dont le potentiel gauche (resp potentiel) Z soit majoré par une constante $c > 0$ - ce qui est en particulier le cas si A est projection duale d'un processus croissant brut B majoré par c . On a alors,

a) pour tout entier n ,
$$E[A_\infty^n] \leq n!\, c^n$$

b) pour $0 < \lambda < 1/c$,
$$E[\exp(\lambda A_\infty)] \leq 1/(1-\lambda c)$$

DEMONSTRATION. Si on applique l'inégalité 1) du théorème à la fonction $\Phi(t) = t^n$, on obtient $E[A_\infty^n] \leq ncE[A_\infty^{n-1}]$, d'où la première inégalité, par récurrence. Si on applique 1) à la fonction $\Phi(t) = e^{\lambda t} - 1$, on obtient $E[\exp(\lambda A_\infty) - 1] \leq c\lambda E[\exp(\lambda A_\infty)]$, d'où la seconde inégalité si $\exp(\lambda A_\infty)$ est intégrable ; le cas général s'obtient par troncation.

Nous passons maintenant au théorème généralisant l'inégalité de Doob. Un théorème de ce type, mais, disons, un peu maladroit, a déjà été donné par Neveu dans son livre sur les martingales discrètes ; par ailleurs, Meyer avait obtenu un énoncé un peu moins bon que celui que nous donnons, mais ayant l'avantage de mettre en évidence une dualité entre ce théorème et le théorème précédent (voir la "troisième rédaction" !).

THEOREME.- Soit $X = (X_t)_{t\in\overline{\mathbb{R}}_+}$ une sous-martingale càdlàg positive achevée et soit A le processus croissant optionnel défini par $A_t = \sup_{s\leq t} X_s$. On a alors

1) $E[A_\infty \phi(A_\infty)] \leq E[X_\infty \phi(A_\infty)] + E[\Phi(A_\infty)]$,

2) $E[A_\infty \phi(A_\infty)] \leq E[qX_\infty \phi(A_\infty)]$

où q est la constante associée à Φ plus haut,

3) $E[\Phi(A_\infty)] \leq E[\Phi(qX_\infty)]$

et donc, par homogénéité,

4) $\|A_\infty\|_\Phi \leq q\|X_\infty\|_\Phi$.

DEMONSTRATION. Dans le cas où $E[A_\infty\phi(A_\infty)]$ est fini, 3) résulte de 2) d'après le lemme, et 2) de 1) puisque $\Phi(A_\infty)$ est majoré par $A_\infty\phi(A_\infty)/\bar{p}$ et que $q = \bar{p}/(\bar{p}-1)$. Il n'est cependant pas évident ici, contrairement à ce qui se passait dans la démonstration du premier théorème, que l'on peut tronquer A de sorte à avoir $E[A_\infty\phi(A_\infty)] < \infty$. On s'en tire pourtant en faisant la remarque cruciale suivante : comme $A_t = \sup_{s\leq t} X_s$, on a $X_t(\omega) = A_t(\omega)$ chaque fois que t est un temps de saut ou un point de croissance à droite de $s \to A_s(\omega)$ - autrement dit, on a $X = A$ sur le support droit de dA -, si bien que l'on a $X_\cdot(\omega) = A_\cdot(\omega)$ $dA(\omega)$-p.s. . Nous modifions alors notre énoncé en affaiblissant son hypothèse : nous demandons seulement que A soit un processus croissant optionnel et X une sousmartingale càdlàg positive achevée tels que l'on ait $X \geq A$ dA-p.s. . Il est alors possible de supposer A majoré par une constante, quitte à remplacer A par $A\wedge n$ et à faire tendre ensuite n vers l'infini. Par ailleurs, nous pouvons supposer ϕ continue car, dans le cas général, ϕ est limite d'une suite décroissante de fonctions continues et croissantes et, A_∞ étant supposé borné, les inégalités de l'énoncé passent à la limite. Il nous reste donc à démontrer 1) dans ces conditions. En intégrant par parties, on a l'égalité

$$A_\infty\phi(A_\infty) = \int_{[0,\infty]} A_s\, d\phi(A_s) + \int_{[0,\infty]} \phi(A_{s-})\, dA_s$$

Comme on a $X \geq A$ dA-p.s., que X et A sont continus à droite et que ϕ est continue, on a encore $X \geq A$ $d\phi(A)$-p.s. - le support droit de $d\phi(A)$ est égal au support droit de dA - , et donc on a

$$\int_{[0,\infty]} A_s\, d\phi(A_s) \leq \int_{[0,\infty]} X_s\, d\phi(A_s) .$$

On a d'autre part l'inégalité

$$\int_{[0,\infty]} \phi(A_{s-})\, dA_s \leq \Phi(A_\infty) ,$$

inégalité résultant de la formule de changement de variable pour les intégrales de Stieltjès, mais que l'on peut aussi démontrer comme suit : si $C = (C_t)$ est le changement de temps associé à A, on a

$$\Phi(A_\infty) = \int_0^{A_\infty} \phi(s)\,ds \geq \int_0^{A_\infty} \phi(A_{C_{s-}})\,ds = \int_{[0,\infty]} \phi(A_{s-})\,ds .$$

D'où, finalement, l'inégalité

$$A_\infty \phi(A_\infty) \leq \int_{[0,\infty]} X_s\, d\phi(A_s) + \Phi(A_\infty)$$

Maintenant, $\phi(A)$ est un processus croissant optionnel, et la sous-martingale X est majorée par la projection optionnelle du processus "constant" (X_∞) (i.e. la martingale càdlàg $(E[X_\infty|\underline{\underline{F}}_t])$), si bien que l'espérance de $\int_{[0,\infty]} X_s\, d\phi(A_s)$ est majorée par celle de $X_\infty \phi(A_\infty)$. D'où finalement, l'inégalité 1) de l'énoncé.

REMARQUES. i) Si on prend $\phi_a(t) = 1_{[a,\infty[}(t)$, avec $a \in \mathbb{R}_+$, on a $\Phi_a(t) = (t-a)^+$ et $t\phi_a(t) - \Phi_a(t) = a.1_{[a,\infty[}(t)$. L'inégalité 1) s'écrit alors

$$\int_{\{A_\infty \geq a\}} a\, dP \leq \int_{\{A_\infty \geq a\}} X_\infty\, dP ,$$

qui n'est autre que l'inégalité maximale de Doob. On retrouve par ailleurs l'inégalité générale 1) en intégrant les deux membres de cette dernière inégalité par rapport à $d\phi(a)$. Ceci est la démarche adoptée pour démontrer 1) dans la "troisième rédaction". La démarche que nous avons adoptée est sans doute un peu plus pénible, mais a l'avantage de mettre en évidence l'importance de l'égalité de X et de A sur le support droit de A. Cette dernière a été mise aussi à profit (indépendamment de nous) par Yor et al. dans leurs travaux sur le temps local.

ii) Voici une autre conséquence intéressante de l'égalité dont nous venons de parler. Soit M une martingale continue, que nous supposons ≥ 1 pour éviter toute difficulté, et soit $M_t^* = \sup_{s \leq t} M_t$. On a alors

$$E[M_\infty^*] = E[\int_{[0,\infty]} dM_t^*] = E[\int_{[0,\infty]} \frac{M_t}{M_t^*}\, dM_t^*]$$

$$= E[M_\infty \operatorname{Log} M_\infty^*] \geq E[M_\infty \operatorname{Log} M_\infty]$$

Par ailleurs, on sait - autre inégalité de Doob - que l'on a

$$E[M_\infty^*] \leq 2\,(1 + E[M_\infty \operatorname{Log} M_\infty])$$

et on comprend alors pourquoi cette inégalité est optimale (en un certain sens) en ce qui concerne l'intégrabilité de M_∞^*.

APPENDICE

Voici d'abord la voie la plus rapide, à ma connaissance, pour démontrer que la modération de Φ, soit

(1) $p = \sup_t t\phi(t)/\Phi(t) < \infty$ (avec $0/0 = 1$),

est équivalente à la propriété suivante

(2) $\exists a > 1$ tel que $c = \sup_t \Phi(at)/\Phi(t) < \infty$ (avec $0/0 = 1$) ,

ou encore à celle-ci, manifestement équivalente à (2),

(3) $$c = \sup_t \Phi(2t)/\Phi(t) < \infty$$

D'abord, de l'inégalité évidente (ϕ étant croissante)

$$t\phi(t) \leq \int_t^{2t} \phi(s)\, ds = \Phi(2t) - \Phi(t)$$

on déduit immédiatement que (3) implique (1). Inversement, si Φ est modérée, on a, pour tout $u \geq 0$,

$$p\Phi(u) \geq u\phi(u) \geq (p+1)\int_{\frac{pu}{p+1}}^{u} \phi(s)\, ds = (p+1)[\Phi(u) - \Phi(\tfrac{pu}{p+1})]$$

et donc, en faisant le changement de variable $t = pu/(p+1)$, on a $\Phi(\frac{p+1}{p}t) \leq (p+1)\Phi(t)$: d'où (3), avec $a = \frac{p+1}{p}$.

Nous disons maintenant quelques mots sur les fonctions de Young et montrons que la finitude de $q = \bar{p}/(\bar{p}-1)$, où $\bar{p} = \inf_t t\phi(t)/\Phi(t)$ (avec $0/0 = \infty$), est impliquée par la modération de la fonction conjuguée Ψ de Φ .

Notre fonction convexe Φ est dite <u>de Young</u> si $\Phi(t)/t$ tend vers l'infini quand t tend vers l'infini. Cela revient à dire que l'inverse continue à droite ψ de ϕ (cf la démonstration du lemme) est finie partout, si bien que $\Psi(t) = \int_0^t \psi(s)\, ds$ est une nouvelle fonction de Young, appelée <u>fonction conjuguée</u> de Φ . On a alors, pour tout $t \geq 0$,

$$t\phi(t) = \Phi(t) + \Psi[\phi(t)]$$

(cf la démonstration du lemme). Maintenant, l'inégalité $\Phi(t) \leq t\phi(t)/\bar{p}$ s'écrit encore $t\phi(t) - \Psi[\phi(t)] \leq t\phi(t)/\bar{p}$, soit encore

$$t\phi(t) \leq q\,\Psi[\phi(t)]$$

Or, comme on a $t \leq \psi[\phi(t)]$, on voit que la finitude de $\sup_u u\psi(u)/\Psi(u)$ entraine celle de q . Si ϕ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}_+$, on a même $q = \sup_u u\psi(u)/\Psi(u)$; je n'ai pas eu le courage de chercher si, en général, la finitude de q implique la modération de Ψ .