SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

CHING SUNG CHOU

Démonstration simple d'un résultat sur le temps local

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 13 (1979), p. 441-442

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1979__13__441_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1977/78

DEMONSTRATION SIMPLE D'UN RESULTAT SUR LE TEMPS LOCAL

par CHOU Ching-Sung

Dans le cours de P.A. Meyer sur les intégrales stochastiques ([1], p. 365), on démontre : si X est une semimartingale, la somme

$$(1) \qquad \sum_{0<s\leqq t} I_{\{X_{s-}\leqq 0\}} X_s^+ + I_{\{X_{s-}>0\}} X_s^-$$

est p.s. finie pour t fini. Ce résultat avait aussi été démontré par P. Millar [2] pour les processus à accroissements indépendants. P.A. Meyer a posé le problème d'arriver à comprendre pourquoi cette somme est finie, et C. Stricker a suggéré une relation avec les nombres de montées et descentes de Doob. En suivant cette idée nous allons arriver ici à une démonstration très facile à comprendre.

D'abord, d'après C. Stricker [3], nous pouvons changer de loi pour nous ramener au cas où $X=X_0+M+A$, où $X_0 \in L^1$, M est une martingale de carré intégrable sur $[0,t]$, A un processus à variation intégrable sur $[0,t]$. Puis en remplaçant X par le processus arrêté X^t, nous pouvons supposer que cette décomposition existe sur $[0,\infty]$. Il est très facile de vérifier que toutes les intégrales stochastiques $\int_0^\infty \varphi_s dX_s$, où φ est prévisible et $0\leqq\varphi\leqq 1$, sont bornées dans L^1 par un même nombre m.

Soit $a>0$. Considérons les temps d'arrêt $T_0^a=0$, puis

$$T_1^a = \inf\{t>T_0^a : X_t \leqq \tfrac{a}{2}\} \quad , \quad T_2^a = \inf\{t>T_1^a : X_t \geqq a\}$$
$$T_3^a = \inf\{t>T_2^a : X_t \leqq \tfrac{a}{2}\} \quad , \quad T_3^a = \inf\{t>T_3^a : X_t \geqq a\} \quad , \quad \text{etc.}$$

La somme $(X_{T_2}-X_{T_1})+(X_{T_4}-X_{T_3})+\ldots$ est une intégrale $\int_0^\infty \varphi_s dX_s$, $0\leqq\varphi\leqq 1$, donc elle est intégrable, et son espérance est majorée par m. D'autre part, tous les termes de cette somme (qui n'a qu'un nombre fini de termes $\neq 0$) sont positifs, sauf peut être le dernier terme non nul, majoré par $2X^*$ en valeur absolue. On en déduit que $E[U^a] \leqq m+2E[X^*]$, avec

$$U^a = |X_{T_2}-X_{T_1}|+|X_{T_4}-X_{T_3}| + \ldots$$

Posons aussi

$$V^a = \sum_{0<s} I_{\{X_{s-}\leqq 0, X_s \geqq a\}} X_s$$

Si $s>0$ est tel que $X_{s-}\leqq 0$, $X_s\geqq a$, soit 2k le dernier entier pair tel que $T_{2k}<s$. La condition $X_{s-}\leqq 0$ entraîne $T_{2k+1}<s$, et comme $T_{2k+2}\geqq s$, $X_s \geqq a$ on a $T_{2k+2}=s$. Donc $V^a \leqq U^a$ et

$$E[V^a] \leqq m + 2E[X^*] \text{ indépendamment de a}$$

Il ne reste plus qu'à faire tendre a vers 0, pour trouver que la somme (1) est intégrable.

Dans le travail de N. El Karoui Sur les montées des semi-martingales, le cas discontinu (Temps locaux, Astérisque n°52-53, S.M.F. 1978), la théorie du temps local est reliée aux nombres de montées. Le seul résultat de la théorie du temps local utilisé est le suivant : si J est un ensemble optionnel tel que $\{ s : s\in J,\ X_{s-}=0\}$ soit à coupes dénombrables, alors $\int_0^t 1_J(s) 1_{\{X_{s-}=0\}} dX_s$ est à variation finie. Il suffit de démontrer pour cela que :

Proposition . Si X est une semi-martingale, de décomposition X=M+A, alors $\int_0^t 1_{\{X_{s-}=0\}} dM^d_s$ est un processus à variation finie.

M. Stricker nous a signalé que cette proposition se déduit facilement de ce qui précède.

Démonstration. Soit (N_t) la martingale locale purement discontinue $N_t = \int_0^t 1_{\{X_{s-}=0\}} dM^d_s$. Nous avons

$$\Delta N_t = 1_{\{X_{t-}=0\}} \Delta M_t = 1_{\{X_{t-}=0\}} [\Delta X_t - \Delta A_t]$$

Comme $\Sigma_{t\leqq u} 1_{\{X_{t-}=0\}} |\Delta X_t| < \infty$ pour u fini, on a le même résultat pour $\Sigma_{t\leqq u} |\Delta N_t|$. D'après un théorème de Yoeurp (Séminaire X, p. 440, lemme 1.5), cela entraîne que N est à variation finie.

BIBLIOGRAPHIE

[1] P.A. Meyer . Un cours sur les intégrales stochastiques. Sém. Prob. X, Lecture Notes in M. 511, Springer 1976.

[2] P.W. Millar . Stochastic integrals and processes with stationary independent increments. Proc. 6-th Berkeley Symp., Vol. III, p. 307-332 (1972).

[3] C. Stricker . Quasimartingales, martingales locales, semi-martingales et filtration naturelle. ZfW 39, 1977, p. 55-64.

Mathematics Department
National Central University
Chung-Li , Taiwan