SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

NICOLE EL KAROUI

Temps local et balayage des semimartingales

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 13 (1979), p. 443-452

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1979__13__443_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1977/78

TEMPS LOCAL ET BALAYAGE DES SEMI-MARTINGALES[1]

par Nicole EL KAROUI

En utilisant des techniques classiques en balayage de processus de Markov, nous dégageons le lien entre le temps local en zéro d'une semi-martingale X, et les balayés de certains processus à variation finie, sur l'ensemble des zéros de X. Nous généralisons en particulier les résultats de [2], établis lorsque X est une martingale continue. Le temps local est alors obtenu comme la projection duale optionnelle d'un processus à variation finie, qui ne croît que sur les extrémités gauches des excursions de X hors de 0, et peut être approximé par un processus à variation finie lié aux excursions de longueur plus grande que ε.

On applique ensuite les résultats précédents aux semi-martingales X-a et, intégrant en a, on obtient comme en [2] une caractérisation du processus croissant $[X,X]$ associé à une martingale.

I. BALAYAGE EN THEORIE GENERALE

Nous rappelons dans ce paragraphe, un certain nombre de résultats classiques en théorie des processus de Markov, sur le balayage sur un ensemble aléatoire ([8]).

Sur un espace filtré $(\Omega, \underline{\underline{F}}, \underline{\underline{F}}_t, P)$, satisfaisant aux conditions habituelles, est défini un ensemble aléatoire H, progressivement mesurable et fermé à droite, c.à.d. que, pour chaque ω, la coupe H_ω de H, définie par : $H_\omega = \{ t>0 : (\omega,t)\in H\}$ est un ensemble fermé à droite de $\mathbb{R}^+$. Il est alors bien connu ([3]) que la fermeture $\overline{H}$ de H est un ensemble optionnel.

Deux processus jouent un rôle important dans la description de H :

a) Le processus croissant, continu à droite, non adapté (D_t) défini par

1. Note de la rédaction du séminaire . Cet article porte sur un sujet voisin de celui de Yor : sur le balayage des semi-martingales continues, et aussi de l'article de Le Jan : martingales et changement de temps. Nous n'avons pas du tout suggéré de modifications aux divers auteurs, car nous espérons que le lecteur appréciera ces très différentes variations sur le même thème du balayage. Signalons simplement, pour éviter des confusions, que le processus noté (ℓ_t) par N. El Karoui correspond à celui qui est noté (τ_t) par Yor, et non au (ℓ_t) de Yor ou de Stricker plus bas.

$$D_t = \inf\{ s>t : s\in H \}$$

b) Le processus croissant, continu à gauche, adapté donc prévisible

$$\ell_t = \sup\{ s<t : s\in H \}$$

Notons que pour chaque t, D_t est un $\underline{\underline{F}}$-temps d'arrêt et que

$$\overline{H} = \overline{\cup_{r\in\mathbf{Q}} [D_r]} \qquad \text{où } D_r=\{(\omega,t) : t=D_r(\omega),\ t<\infty \}$$

Le processus ℓ_t est l'inverse à gauche du processus croissant D_t. On pose $G=\{(\omega,s) : \ell_s=s\}$, de sorte que les temps de sauts de ℓ_t sont inclus dans G^c, et que l'on a $\overline{H}=H\cup G$.

DEFINITION 1. Soit A un processus à variation intégrable, non nécessairement adapté. On appelle H-balayée optionnelle (resp. prévisible) du processus A, la projection duale optionnelle (resp. prévisible) du processus à variation intégrable A^H défini par : $A^H_t = A_{D_t} - A_{D_0}$. On la désigne par ${}^oA^H$ (resp. ${}^pA^H$).

REMARQUE. En théorie des processus de Markov, on suppose de plus que l'ensemble aléatoire H est homogène. On appelle alors temps local de H, la fonctionnelle additive L^H définie par : $\int_0^t e^{-s}dL^H_s$ est la H-balayée prévisible de $\int_0^t e^{-s}ds$.

La formule du changement de variables permet de préciser un peu la structure des H-balayées.

En effet, l'inégalité $D_0<s\leqq D_t$ est équivalente à $0<\ell_s\leqq t$, et on a donc : $A^H_t = \int 1_{\{0<\ell_s\leqq t\}}\, dA_s$. Plus généralement, si Z est un processus mesurable positif, on a

(1) $$\int Z_s dA^H_s = \int Z_{\ell_s} 1_{\{0<\ell_s\}} dA_s$$

En particulier, si le processus A est porté par G, les processus A et A^H sont indistinguables.

Les processus dont les H-balayées présentent le plus d'intérêt sont donc ceux qui sont portés par G^c. Le processus A^H est alors purement discontinu. En effet, si $H^{\to}$ désigne l'ensemble des extrémités gauches des intervalles contigus à $\overline{H}$, il est facile de voir que

$$G^c = \{ s : \exists g\in H^{\to} ,\ g<s\leqq D_g\} = \cup_{g\in H^{\to}}]\!]g, D_g]\!]$$ [1]

et donc que

(2) $$A^H_t = \int_{D_0}^{D_t} 1_{\{0<\ell_s<s\}} dA_s = \Sigma_{0<g\in H^{\to},\ g\leqq t} (A_{D_g} - A_g)$$

1. On a aussi $G^c=\cup_{r\in Q}]\!]r, D_r]\!]$; G^c est l'ensemble prévisible noté L dans l'article de Meyer-Stricker-Yor plus bas.

Rappelons que l'ensemble $H^{\rightarrow}$ est généralement cité comme un bon exemple d'ensemble qui est progressivement mesurable, mais qui le plus souvent n'est pas optionnel. On peut le décomposer en deux ensembles disjoints, l'un $H_{\pi}^{\rightarrow}$ qui ne contient aucun graphe de temps d'arrêt, l'autre $H_{b}^{\rightarrow}$, qui est une réunion dénombrable de graphes de temps d'arrêt. Pour plus de détails, voir [8] et [5].

La proposition suivante sera utilisée par la suite :

PROPOSITION 2. <u>Soit</u> A <u>un processus à variation intégrable</u> (<u>non adapté</u>). <u>On suppose que</u> A <u>est une martingale par rapport à</u> $(\underline{\underline{F}}_{D_t})$, <u>et que l'on a</u> $E[\Delta A_T 1_{\{T<\infty\}}]=0$ <u>pour tout temps d'arrêt</u> T <u>de la famille</u> $(\underline{\underline{F}}_t)$. <u>Alors la projection duale optionnelle de</u> A (<u>par rapport à</u> $(\underline{\underline{F}}_t)$) <u>est nulle</u>.

DEMONSTRATION. Puisque A est une $(\underline{\underline{F}}_{D_t})$-martingale, sa projection duale prévisible par rapport à $(\underline{\underline{F}}_{D_t})$, donc aussi par rapport à $(\underline{\underline{F}}_t)$, est nulle. D'autre part, A ne chargeant aucun graphe de temps d'arrêt, ses projections duales optionnelle et prévisible sont égales.

2. H-BALAYEES DES SEMI-MARTINGALES

Nous considérons dans tout ce paragraphe, une semi-martingale X appartenant à $\underline{\underline{H}}^1$, de décomposition canonique $X=X_0+M+V$, où M est une martingale de $\underline{\underline{H}}^1$ nulle en 0, et V est un processus à variation intégrable prévisible. Pour tout ce qui concerne les semi-martingales, nous renvoyons systématiquement au cours sur les intégrales stochastiques de P.A. Meyer ([9]), et pour les temps locaux des semi-martingales, à [1].

Nous supposons que l'ensemble aléatoire H est contenu dans $\{ s : X_s=0\}$. Alors $\overline{H}$ est contenu dans $\{ s : X=0 \text{ ou } X_-=0 \}$.

Nous nous proposons d'établir une relation entre le temps local de X en 0, et les passages dans H, généralisant ainsi les résultats de [2], établis pour les martingales continues. Pour la clarté de l'exposé, nous rappelons d'abord un certain nombre de formules sur les temps locaux.
$L^o(X)$ désignant le temps local de X au point 0, et X^+ la partie positive de X, on a

(3) $X_t^+ = X_0^+ + \int_0^t 1_{\{X_{s-}>0\}}dX_s + \frac{1}{2}L_t^o(X) + \Sigma_{0<s\leqq t}(1_{\{X_{s-}>0>X_s\}}+1_{\{X_{s-}\leqq 0<X_s\}})|X_s|$

(4) $\frac{1}{2}(L_t^o(X)-L_t^o(-X))= \int_0^t 1_{\{X_{s-}=0\}}dX_s - \Sigma_{0<s\leqq t} 1_{\{X_{s-}=0\}}X_s$

(5) Si X est une semi-martingale positive, $L_t^o(-X)=0$ pour tout t.

Le calcul simple, qui permet d'établir la proposition suivante, est à la base de ce travail.

PROPOSITION 3. <u>Soit</u> X <u>une semi-martingale de</u> $\underline{\underline{H}}^1$, <u>de décomposition canonique</u> $X=X_0+M+V$. <u>Soit</u> Z <u>un processus prévisible tel que la semi-martingale</u>

$$Y_t = \int_0^t Z_{\ell_s} 1_{\{\ell_s>0\}} dX_s$$

<u>appartienne à $\underline{\underline{H}}^1$. On a alors</u>[1]

(6) $$Y_t = Z_{\ell_t} 1_{\{\ell_t>0\}} X_t$$

<u>ou encore</u>

(6') $$Z_{\ell_t} X_t 1_{\{\ell_t>0\}} = \int_0^t Z_{\ell_s} 1_{\{0<\ell_s<s\}} dX_s + \Sigma_{0<s\leq t} 1_{\{\ell_s=s\}} Z_s X_s + \frac{1}{2}\int_0^t Z_s 1_{\{\ell_s=s\}} (dL_s^0(X)-dL_s^0(-X))$$

<u>Le processus (non adapté)</u>

(7) $$K_u = X_\infty 1_{\{0<\ell_\infty\leq u\}} - \Sigma_{0<s\leq u} 1_{\{\ell_s=s\}} X_s - \left(\int_0^{\cdot} 1_{\{\ell_s<s\}} dV_s\right)_u^H$$

<u>est à variation intégrable, et l'on a aussi</u>

(8) $$K_u = \int_{D_0}^{D_u} 1_{\{\ell_s<s\}} dM_s + \frac{1}{2}\int_0^u 1_{\{\ell_s=s\}} (dL_s^0(X)-dL_s^0(-X)) = \Sigma_{0<g\leq u, g\in H^{\rightarrow}} (M_{D_g}-M_g)$$

<u>En particulier, le processus</u> $K_u - \frac{1}{2}\int_0^u 1_{\{\ell_s=s\}}(dL_s^0(X)-dL_s^0(-X))$ <u>est une martingale de $\underline{\underline{H}}^1$ par rapport aux tribus $\underline{\underline{F}}_{D_t}$.</u>

DEMONSTRATION. Nous commençons par la formule (6). Si Z est un processus élémentaire de la forme $1_{]\!]0,S]\!]}$, Z_ℓ est le processus $1_{]\!]D_0,D_S]\!]}$, tandis que Y_t est égal à $1_{\{t>D_0\}}(X_{D_S\wedge t}-X_{D_0}) = 1_{\{D_S\geq t>D_0\}}X_t$, car X_{D_0} (resp. X_{D_S}) est nul sur $\{D_0<\infty\}$ (resp. $\{D_S<\infty\}$). On a donc bien $Y_t=Z_{\ell_t}1_{\{\ell_t>0\}}X_t$, et l'identité (6) s'étend alors facilement à un processus prévisible Z pour lequel Y appartient à $\underline{\underline{H}}^1$.

Etablir (6') revient alors à montrer que le second membre est égal à l'intégrale stochastique Y_t, ce qui peut s'écrire

$$\int_0^t Z_{\ell_s} 1_{\{\ell_s=s\}} dX_s = \Sigma_{0<s\leq t} 1_{\{\ell_s=s\}} Z_s X_s + \frac{1}{2}\int_0^t Z_s 1_{\{\ell_s=s\}} (dL_s^0(X)-dL_s^0(-X))$$

Or l'ensemble $\{ s : \ell_s=s \}$ est contenu dans $\{ s : X_{s-}=0\}$. On évalue l'intégrale stochastique $\int_0^{\cdot} 1_{\{X_{s-}=0\}} dX_s$ par la formule (4), puis on intègre le processus $(Z_{\ell_s} 1_{\{\ell_s=s\}})$ par rapport à la semi-martingale (à variation finie) obtenue.

La formule (6') peut se simplifier légèrement si H est exactement l'ensemble des zéros de X : en effet, $L^0(X)$ et $L^0(-X)$ sont continus et portés par $\{X=0\}$, donc par H, donc par $\{ s : \ell_s=s\}$, et on peut alors supprimer l'indicatrice.

Dans la formule (6'), prenons $t=+\infty$, $Z=1_{]\!]0,u]\!]}$, et écrivons que

1. Cf. le théorème 1 de l'article de Yor plus bas (N.d.l.r.).

$dX = dM + dV$ sur $]0,\infty[$. Nous obtenons

$$X_\infty 1_{\{0<\ell_\infty \leq u\}} = \int_0^\infty 1_{\{0<\ell_s \leq u\}} d(M+V)_s + \Sigma_{0<s\leq u} 1_{\{\ell_s=s\}} X_s$$
$$+ \frac{1}{2} \int_0^u 1_{\{\ell_s=s\}} (dL_s^0(X) - dL_s^0(-X))$$

Dans la première intégrale au second membre, nous remplaçons $\{0<\ell_s\leq u\}$ par $\{D_0<s\leq D_u\}$, et nous obtenons la première égalité (8). Le fait que K est à variation intégrable (plutôt que simplement à variation finie) se ramène au résultat analogue sur $\Sigma_{0<s\leq u} 1_{\{\ell_s=s\}} X_s$, qui s'étudie aisément sur (3) ou (4).

Reste donc à établir la seconde égalité (8). Pour cela, nous écrivons le dernier membre de (8) comme la somme (qui se trouvera être absolument convergente)

$$\Sigma_{g\in H^{\rightarrow}, 0<g\leq u} [(X_{D_g} - X_g) - (V_{D_g} - V_g)]$$

La somme relative à V est absolument convergente (et représente même un processus à variation intégrable), du fait que V est à variation intégrable ; elle est égale au dernier terme à droite de (7). Dans la somme relative à X, seul un terme X_{D_g} peut être non nul : celui qui correspond à $g=\ell_\infty$, présent seulement si $\ell_\infty \leq u$. Il reste donc seulement à évaluer $\Sigma_{g\in H^{\rightarrow}, 0<g\leq u} X_g$, et on vérifie très facilement que cette somme est égale à $\Sigma_{0<s\leq u} 1_{\{\ell_s=s\}} X_s$, absolument convergente d'après (3) ou (4). On a donc retrouvé l'expression (7) de K.

Pour finir, on remarque que $N_t = \int_0^t 1_{\{\ell_s<s\}} dM_s$ est une martingale de $\underline{\underline{H}}^1$ par rapport à $(\underline{\underline{F}}_t)$, donc $N_t^H = N_{D_t} - N_{D_0}$ est une martingale de $\underline{\underline{H}}^1$ par rapport à $(\underline{\underline{F}}_{D_t})$, d'où la dernière affirmation.

REMARQUE. A l'exception de cette dernière affirmation, la seule propriété de la décomposition X=M+V que l'on a utilisée dans la démonstration est le fait que V est à variation intégrable.

Si l'on écrit (8) avec M=X, V=0, on obtient

$$\int_{D_0}^{D_u} 1_{\{\ell_s<s\}} dX_s = X_\infty 1_{\{0<\ell_\infty \leq u\}} - \Sigma_{0<s\leq u} 1_{\{\ell_s=s\}} X_s$$
$$- \frac{1}{2} \int_0^u 1_{\{\ell_s=s\}} (dL_s^0(X) - dL_s^0(-X)) .$$

Si X est à variation intégrable, on peut prendre M=0, X=V, et alors (8) se réduit à

$$\frac{1}{2}\int_0^u 1_{\{\ell_s=s\}} (dL_s^0(X) - dL_s^0(-X)) = 0$$

qui n'est pas particulièrement intéressant, car $L^0(X)$ et $L^0(-X)$ eux mêmes sont nuls ([1], p. 33, corollaire 3).

Les conséquences de cette proposition sont simples et nombreuses. Nous leur consacrerons le paragraphe suivant, nous bornant pour l'instant à celle-ci :

COROLLAIRE 4. Sous les hypothèses de la proposition 3, le processus K a pour projection duale optionnelle

$$B_t = \frac{1}{2}\int_0^t 1_{\{\ell_s=s\}}(dL_s^o(X)-dL_s^o(-X))$$

PREUVE : D'après la formule (8), K-B satisfait aux hypothèses de la proposition 2. Sa projection duale optionnelle est donc nulle.

Nous terminons ce paragraphe par un résultat d'approximation qui se déduit aisément des égalités (8). Au cours de la démonstration, nous mettrons en évidence une suite de martingales, sommes de leurs sauts, qui convergent dans $\underline{\underline{H}}^1$ vers une martingale qui ne possède plus cette propriété remarquable. Pour plus de détails concernant ces martingales, voir [7][1].

PROPOSITION 5. Sous les hypothèses de la proposition 3, les processus à variation finie B_t^ε (non adaptés) définis par

$$B_t^\varepsilon = \Sigma_{0<g\leq t, g\in H^{\rightarrow}} 1_{\{g+\varepsilon\leq D_g\}}(X_{g+\varepsilon}-X_g)$$

convergent vers B_t dans L^1, uniformément en t.

DEMONSTRATION. Rappelons que, d'après (8), le processus $\overline{N}_t=K_t-B_t$ est une martingale des tribus $\underline{\underline{F}}_{D_t}$, égale à $\int_{D_0}^{D_t} 1_{\{\ell_s<s\}}dM_s$, et que l'on a $\Delta\overline{N}_s = \Delta K_s = 1_{\{s\in H^{\rightarrow}\}}(M_{D_s}-M_s)$. Nous allons approximer la martingale $\overline{N}$ par une suite de $\underline{\underline{F}}_{D_t}$-martingales sommes de leurs sauts.

Posons $\overline{N}_t^\varepsilon = \int_{D_0}^{D_t} 1_{\{\ell_s+\varepsilon<s\}}dM_s$; il est clair que $\overline{N}^\varepsilon$ est une $\underline{\underline{F}}_{D_t}$-martingale qui converge dans $\underline{\underline{H}}^1$ vers $\overline{N}$. Nous avons d'autre part

$$\{ s : \ell_s+\varepsilon<s\} = \cup_n]\!] L_n^\varepsilon+\varepsilon, T_n^\varepsilon]\!]$$

où L_n^ε, T_n^ε désignent respectivement les extrémités gauche et droite du n-ième intervalle contigu à $\overline{H}$, de longueur plus grande que ε. Il est bien connu (voir [3]) que $L_n^\varepsilon+\varepsilon$ et T_n^ε sont des temps d'arrêt. Donc $\overline{N}_t^\varepsilon$ est somme de ses sauts, et l'on a

$$\overline{N}_t^\varepsilon = \Sigma_n 1_{\{L_n^\varepsilon\leq t\}}(M_{T_n^\varepsilon} - M_{L_n^\varepsilon+\varepsilon})$$

Il reste à expliciter la différence $\overline{N}-\overline{N}^\varepsilon$:

$$\overline{N}_t-\overline{N}_t^\varepsilon = \Sigma_{0<g\leq t,\ g\in H^{\rightarrow}} 1_{\{g+\varepsilon\leq D_g\}}(X_{g+\varepsilon}-X_g) - \frac{1}{2}\int_0^t 1_{\{\ell_s=s\}}(dL_s^o(X)-dL_s^o(-X))$$
$$- \int_0^t 1_{\{0<\ell_s<s<\ell_s+\varepsilon\}} dV_s \quad - \quad \Sigma_{0<g\leq t,\ g\in H^{\rightarrow}} 1_{\{D_g<g+\varepsilon\}}X_g$$

1. Et l'article de Le Jan dans ce volume (n.d.l.r.).

La première ligne est égale à $B_t^\varepsilon - B_t$. Quant à la seconde, les deux processus V_t et $\Sigma_{0<g\leq t,\ g\in H^{\rightarrow}} X_g$ étant à variation intégrable, elle converge vers 0 p.s. et dans L^1, uniformément en t, lorsque ε tend vers 0. La proposition 5 en résulte.

REMARQUES . a) En fait la convergence est un peu meilleure que ne l'indique l'énoncé : $\sup_t |B_t - B_t^\varepsilon|$ tend vers 0 dans L^1. La démonstration donne aussitôt ce résultat.

b) On établit exactement de la même façon que, pour tout processus prévisible Z, tel que la semi-martingale Y de la proposition 3 appartienne à $\underline{\underline{H}}^1$, le processus

$$\Sigma_{0<g\leq t,g\in H^{\rightarrow}} \ Z_g 1_{\{g+\varepsilon\leq D_g\}}(X_{g+\varepsilon}-X_g)$$

converge (dans L^1 uniformément en t, ou au sens de a) ci-dessus) vers $\frac{1}{2}\int_0^t 1_{\{\ell_s=s\}} Z_s(dL_s^0(X)-dL_s^0(-X))$

3. BALAYAGE ET TEMPS LOCAL

Nous allons exploiter la proposition 3 en l'appliquant à la semi-martingale X^+ et à l'ensemble H égal à $\{X=0\}$. On rappelle que $L_t^0(X)=L_t^0(X^+)$.

THEOREME 6. <u>Soient</u> X <u>une semi-martingale de</u> $\underline{\underline{H}}^1$, <u>de décomposition</u> $X = X_0+M+V$, <u>et</u> H <u>l'ensemble</u> $\{X=0\}$. <u>Les identités suivantes sont satisfaites</u>

$$(9)\qquad \Sigma_{0<g\leq t,\ g\in H^{\rightarrow}} \ (M_{D_g}-M_g) = \int_{D_0}^{D_t} 1_{\{\ell_s<s\}}dM_s + \tfrac{1}{2}(L_t^0(X)-L_t^0(-X))$$

$$(10)\qquad \Sigma_{0<g\leq t,\ g\in H^{\rightarrow}} \int_{]g,D_g]} 1_{\{X_{s-}>0\}}dM_s = \int_{D_0}^{D_t} 1_{\{\ell_s<s\}}1_{\{X_{s-}>0\}}dM_s + \tfrac{1}{2}L_t^0(X)$$

<u>En particulier, la projection duale optionnelle de</u>

$$(11)\qquad X_\infty^+ 1_{\{0<\ell_\infty\leq t\}} - \Sigma_{0<g\leq t,g\in H^{\rightarrow}} \ \Sigma_{g\leq s<D_g} (1_{\{X_{s-}>0>X_s\}}+1_{\{X_{s-}\leq 0<X_s\}})|X_s| - \int_{D_0}^{D_t} 1_{\{0<\ell_s<s\}}1_{\{X_{s-}>0\}}dV_s$$

<u>est égale à</u> $\frac{1}{2}L_t^0(X)$.

<u>Par ailleurs, le processus</u> $\Sigma_{0<g\leq t} 1_{\{g+\varepsilon\leq D_g\}}(X_{g+\varepsilon}^+ - X_g^+)$ <u>converge uniformément en</u> t <u>dans</u> L^1 <u>vers</u> $\frac{1}{2}L_t^0(X)$.

PREUVE : La formule (9) recopie (8), avec des simplifications dues au fait que H est exactement l'ensemble des zéros de X (suppression de $1_{\{\ell_s=s\}}$). La formule (10) est encore (8), mais appliquée à X^+, dont la décomposition $X_0^+ + M'+V'$ est donnée par la formule (4) :

$$M'_t = \int_0^t 1_{\{X_{s-}>0\}} dM_s \quad , \; V'_t = \int_0^t 1_{\{X_{s-}>0\}} dV_s + \Sigma_{0<s\leq t} (\ldots)|X_s| + \tfrac{1}{2}L^0_t(X)$$

et dont le temps local en 0 est donné par $L^0_t(X^+)=L^0_t(X)$, $L^0_t(-X^+)=0$.
Il est peut être intéressant de noter que

$$\int_{D_0}^{D_t} 1_{\{\ell_s<s\}} 1_{\{X_{s-}>0\}} dM_s = \int_0^{\infty} 1_{\{0<\ell_s<s\wedge t\}} 1_{\{X_{s-}>0\}} dM_s$$

ce qui permet de transformer un peu (9), et plus généralement les intégrales analogues dans d'autres expressions. La formule (11) exprime le corollaire 4 , le processus K étant celui que fournit la formule (7) associée à X^+. Enfin, la dernière affirmation est la proposition 5, écrite pour X^+.

REMARQUES. a) Si X est une martingale continue, le théorème 6 n'est en fait qu'une version un peu plus précise des propositions 5 et 8 de [2].

b) Le résultat d'approximation est à rapprocher de [6], où il est établi que, pour le mouvement brownien, $\sqrt{2\pi/\varepsilon}\ \Sigma_{0<g\leq t, g\in H^{\rightarrow}} 1_{\{g+\varepsilon\leq D_g\}}$ converge p.s. vers le temps local en 0.

Il reste à établir le lien avec les temps locaux markoviens, ce que nous ferons brièvement dans le corollaire suivant .

COROLLAIRE 7. Sur l'espace canonique Ω^o des trajectoires càdlàg. à valeurs réelles, muni des coordonnées Y_t, des tribus naturelles $\underline{\underline{F}}^o$, $\underline{\underline{F}}^o_t$, des opérateurs de translation θ_t , on se donne une famille de probabilités P^x telle que le système (Ω, $\underline{\underline{F}}^o_t$, Y_t , θ_t, P^x) soit un processus de Markov fort. On suppose en outre que, pour toute loi P^x, le processus (Y_t) est une semi-martingale par rapport à la famille $(\underline{\underline{F}}^o_t)$, rendue continue à droite et convenablement complétée.

Il existe alors une fonctionnelle additive $L^0_t(Y)$ sur Ω, qui est pour tout x, une version du temps local en 0 de la semimartingale Y sous P^x. Désignons par D le temps d'entrée de Y au point 0. Si $L^0(Y)$ n'est pas identiquement nul, on a $P^0\{D=0\}=1$, et $\int_0^t e^{-s} dL^0_s$ est proportionnel à la partie continue de la balayée optionnelle de $(1-e^{-t})$ sur l'ensemble des zéros de Y.

DEMONSTRATION. L'étude de [4] montre qu'on peut choisir des versions des intégrales stochastiques indépendantes de la loi initiale. La relation (3) prouve donc l'existence d'une version du temps local indépendante de la loi initiale, qui soit en même temps une fonctionnelle additive (car $Y^+_t - Y^+_0$ est une fonctionnelle additive). Si $L^0(Y)$ n'est pas identiquement nul, l'ensemble $H^{\rightarrow}\cap\{(\omega,t) : P^{Y_t(\omega)}\{D=0\}=1\}$, qui d'après [8] est la partie de $H^{\rightarrow}$ qui ne contient aucun graphe de temps d'arrêt, est non vide. Ceci entraîne que $P^0\{D=0\}=1$.

Le processus Y étant markovien, toutes les fonctionnelles additives continues, à support dans l'ensemble $\{Y=0\}$, sont proportionnelles. Or la partie continue de la balayée optionnelle de $(1-e^{-t})$ est égale à $\int_0^t e^{-s}1_{\{Y_s=0\}}ds$ + la projection duale optionnelle du processus

$$\Sigma_{0<g\leqq t, g\in H^{\rightarrow}} 1_{\{Y_g=0\}}(e^{-g}-e^{-D_g}) \quad .$$

REMARQUE. Toutefois, on peut avoir $P^o\{D=0\}=1$ sans que Y possède une partie martingale continue (c'est le cas de certains processus à accroissements indépendants sans partie gaussienne). On a alors $L^o(Y)=0$, le temps local en 0 au sens des semi-martingales est identiquement nul, tandis que le temps local "markovien" est bien une fonctionnelle additive non identiquement nulle, qui croît uniquement sur l'ensemble des zéros de Y.

Nous allons indiquer maintenant une variante de la formule (11), qui s'obtient en appliquant la proposition 3 et son corollaire 4 à la semimartingale X^+ et à l'ensemble $H=\{X^+=0\}=\{X\leq 0\}$, lorsque X est une <u>martingale</u> continue à droite, qui appartient à $\underline{\underline{H}}^1$. Nous rappelons les faits suivants

. $L_t^0(X^+)=L_t^0(X)$, et $L_t^0(-X^+)=0$

. Le processus à variation finie dans la décomposition canonique $X^+=X_0^++M+V$ est $\quad V_t = \frac{1}{2}L_t^0(X) + \Sigma_{0<s\leqq t}\ (1_{\{X_{s-}\leqq 0\}}X_s^+ +1_{\{X_{s-}>0\}}X_s^-)$

D'après la proposition 3 et son corollaire, $\frac{1}{2}L_t^0$ est projection duale optionnelle du processus à variation finie

$$K_t = X_\infty^+ 1_{\{0<\ell_\infty\leqq t\}} - \Sigma_{0<s\leqq t} 1_{\{\ell_s=s\}}X_s^+ - \int_{D_0}^{D_t} 1_{\{\ell_s<s\}}dV_s \quad .$$

Nous évaluons les différents termes. Le premier reste tel quel. Dans le second, on remarque que $(X_{s-}<0) \Rightarrow (\ell_s=s) \Rightarrow (X_{s-}\leqq 0)$, donc cette première somme s'écrit

$$\Sigma_{0<s\leqq t} 1_{\{\ell_s=s\}}X_s^+ = \Sigma_{0<s\leqq t} 1_{\{X_{s-}\leqq 0\}}X_s^+ - \Sigma_{0<s\leqq t}1_{\{X_{s-}=0,\ell_s<s\}}X_s^+$$

Dans le troisième terme, nous regardons la contribution des trois morceaux de V : celle de L^0 est nulle , celle de $\Sigma_{s\leqq t,\ X_{s-}\leqq 0}$ se réduit à $\Sigma_s 1_{\{X_{s-}=0,\ \ell_s<s\}}X_s^+$, celle de $\Sigma_{s\leqq t,\ X_{s-}>0}$ figure au complet, on peut supprimer $1_{\{\ell_s<s\}}$. D'autre part, la sommation porte sur les $s\in]D_0,D_t]$, et il est intéressant de mettre en évidence la contribution de $]0,t]$. Ainsi on peut écrire : $\frac{1}{2}L_t^0(X)$ est projection duale optionnelle du processus

$$(12)\qquad K_t = X^+_\infty 1_{\{0<\ell_\infty \leqq t\}}$$
$$- \Sigma_{0<s\leqq t}\ (1_{\{X_{s-}\leqq 0\}}X^+_s + 1_{\{X_{s-}>0\}}X^-_s)$$
$$- 1_{\{t<D_t\}}1_{\{X_{D_t-}>0\}}X^-_{D_t} + 1_{\{0<D_0<t\}}1_{\{X_{D_0-}>0\}}X^-_{D_0}$$
$$- \Sigma_{t<s<D_t}\ 1_{\{X_{s-}=0\}}X^+_s$$

Faisant passer la seconde ligne du même côté que $L^0_t(X)$, on voit que

$$(13)\qquad \tfrac{1}{2}L^0_t(X) + \Sigma_{0<s\leqq t}\ (1_{\{X_{s-}\leqq 0\}}X^+_s + 1_{\{X_{s-}>0\}}X^-_s)$$

est projection duale optionnelle d'un certain processus à variation finie, somme des lignes 1,3 et 4.

Maintenant, nous écrivons le même résultat pour la semi-martingale $X^a=(X-a)^+$, avec l'ensemble $H^a=\{X\leqq a\}$ et les processus ℓ^a et D^a correspondants, et nous intégrons en a, à la manière de [2] . Le processus croissant (13) nous donne après intégration $\frac{1}{2}[X,X]_t$ (voir [1], p.197). L'intégration des différents termes de (12) est possible de manière explicite. Par exemple, la dernière ligne donne 0, la première donne

$$\tfrac{1}{2}[(X_\infty - {}_*X_0)^2-(X_\infty - {}_*X_t)^2] \qquad \text{avec } {}_*X_t = \inf_{u\geqq t} X_u$$

A la troisième ligne, le premier terme donne

$$\tfrac{1}{2}\Sigma_{s>t}\ \Delta({}_*X^t_s)^2 \qquad \text{où } {}_*X^t_s = \inf_{t\leqq u\leqq s} X_u$$

et le second

$$\tfrac{1}{2}\Sigma_{s\leqq t}\ \Delta({}_*X^0_s)^2$$

Malheureusement, ces résultats ne peuvent servir à démontrer des inégalités de Burkholder, à la manière de [2], du fait que les processus ne sont pas croissants, mais seulement à variation finie (et si $X\notin \underline{H}^2$, on travaille avec des mesures qui ne sont ni positives, ni bornées).

[1] Temps locaux. Astérisque n° 52-53, S.M.F. 1978.

[2] J.Azéma et M. Yor. En guise d'introduction. Astérisque 52-53. S.M.F. 1978.

[3] C. Dellacherie. Capacités et processus stochastiques. Springer.

[4] C. Doléans-Dade. Intégrales stochastiques par rapport à une famille de probabilités. Sém. Prob.IV, Lect. Notes n°124, Springer 1970

[5] N. El Karoui, H. Reinhard. Compactification et balayage de processus droits. Astérisque n°21, S.M.F. 1975.

[6] K. Ito, H.P. McKean. Diffusion processes and their sample paths. Springer 1965.

[7] Y.Le Jan. Martingales de sauts. Z. fur W. 1978.

[8] B. Maisonneuve, P.A. Meyer. Ensembles aléatoires markoviens homogènes. Sém. Prob. VIII , Lect. Notes n°381, Springer 1974.

[9] P.A. Meyer. Un cours sur les intégrales stochastiques. Sém. Prob.X. Lect. Notes n°511, Springer 1976.