CHRISTOPHE STRICKER

Semimartingales et valeur absolue

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 13 (1979), p. 472-477
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1979__13__472_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1977/78

SEMIMARTINGALES ET VALEUR ABSOLUE

par C. STRICKER

P.A. Meyer a démontré dans [5] que si X est une semimartingale, $|X|$ en est une aussi. C. Yoeurp a établi le même résultat pour les quasimartingales, et il a montré par ailleurs que si X est une semimartingale continue, et si $|X|$ est une quasimartingale, alors X est une quasimartingale (voir [8])

Depuis lors, deux démonstrations très simples du premier résultat de Yoeurp ont été découvertes, l'une par Jeulin [4], qui n'exige rien que la définition des quasimartingales, l'autre par Meyer à partir de la décomposition de Rao. Nous en indiquons ici une troisième, qui conduit à une remarque supplémentaire sur les espaces H^p.

En ce qui concerne le second résultat de Yoeurp, nous montrons que l'on peut supprimer la condition que X soit une semimartingale. Le théorème de Yoeurp apparaît comme un cas particulier d'un résultat plus général sur le " renversement des excursions d'une semimartingale", qui contient aussi une importante remarque d'Azéma et Yor [1], [10].

La rédaction définitive de cette note a beaucoup profité de discussions avec P.A. Meyer et M. Yor. Nous les en remercions ici.

Soit $(\Omega,\underline{\underline{F}},P,(\underline{\underline{F}}_t))$ un espace probabilisé filtré vérifiant les conditions habituelles. On rappelle qu'un processus càdlàg. adapté $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est une quasimartingale si $X_t\in L^1$ pour tout t, et $\mathrm{Var}(X)=\sup_\tau \mathrm{Var}_\tau(X)<\infty$, où $\tau=(t_i)_{0\leqq i\leqq n}$ parcourt l'ensemble des subdivisions finies de $\mathbb{R}_+$, et

$$\mathrm{Var}_\tau(X)=\mathrm{Var}^o_\tau(X) + E[|X_{t_n}|] \text{ , où } \mathrm{Var}^o_\tau(X) = E[\sum_{i=0}^{n-1}|E[X_{t_{i+1}}-X_{t_i}|\underline{\underline{F}}_{t_i}]|]$$

Il est commode, pour des raisons techniques, d'introduire aussi $\mathrm{Var}^o(X)=\sup_\tau \mathrm{Var}^o_\tau(X)$.

Toute quasimartingale est une semimartingale, et inversement (Dellacherie [2]), si X est une semimartingale, il existe une loi Q équivalente à P pour laquelle X est une quasimartingale sur tout intervalle fini.

Rappelons d'autre part une définition possible des espaces H^p de semimartingales (voir par exemple [6]): X appartient à H^p si et seulement si X est une semimartingale spéciale, admettant la décomposition canonique X=M+A (M est une martingale locale, A un processus à variation finie prévisible nul en 0) telle que $M^*\in L^p$, $\int_0^\infty|dA_s|\in L^p$. Comme on a $M^*\leqq X^*+A^*\leqq$

$X^*+\int_0^\infty|dA_s|$, et de même $X^*\leqq M^*+\int_0^\infty|dA_s|$, on peut prendre comme norme sur l'espace H^p

$$\|X\|_{H^p} = \|X^*+\int_0^\infty|dA_s|\,\|_{L^p}$$

En particulier, on montre assez facilement que $\|X\|_{H^1} = E[X^*]+\mathrm{Var}^\circ(X)$.

Voici le premier résultat de Yoeurp, que nous démontrons directement pour les fonctions convexes lipschitziennes, en adaptant le raisonnement par lequel on prouve ([5], p.362) que les fonctions convexes transforment les semimartingales en semimartingales.

PROPOSITION 1. Soit f une fonction convexe, positive et nulle en 0, lipschitzienne de rapport K. Soit K une quasimartingale. Alors $f\circ X$ est une quasimartingale, et $\mathrm{Var}(f\circ X) \leqq 2K\mathrm{Var}(X)$.

DEMONSTRATION. X se décompose de manière unique en une somme X=M+A, où M est une martingale locale, A est un processus prévisible à variation intégrable nul en 0. Nous allons supposer d'abord que M est une martingale uniformément intégrable. Nous avons pour s<t

$$\begin{aligned} E[f(X_t)-f(X_s)\,|\,\underline{\underline{F}}_s] &= E[f(M_t+A_t)-f(M_t+A_s)+f(M_t+A_s)-f(M_s+A_s)\,|\,\underline{\underline{F}}_s] \\ &\geqq E[f(M_t+A_t)-f(M_t+A_s)\,|\,\underline{\underline{F}}_s] \quad (\text{ inégalité de Jensen }) \\ &\geqq -KE[\,|A_t-A_s|\,|\,\underline{\underline{F}}_s] \quad (\text{ condition de Lipschitz }) \end{aligned}$$

Le processus $Y_t=f(X_t)+K\int_0^t|dA_s|$ est donc une sousmartingale positive, et l'on a $\mathrm{Var}^\circ(Y) \leqq E[Y_\infty] = E[f(X_\infty)+K\int_0^\infty|dA_s|]$. D'autre part

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(f\circ X) &= E[f\circ X_\infty]+\mathrm{Var}^\circ(f\circ X) \leqq E[f\circ X_\infty]+E[K\int_0^\infty|dA_s|]+\mathrm{Var}^\circ(Y) \\ &\leqq 2E[f(X_\infty)] + 2E[K\int_0^\infty |dA_s|] \leqq 2KE[|X_\infty|]+2K\mathrm{Var}^\circ(X) \\ &= 2K\mathrm{Var}(X). \end{aligned}$$

Pour lever l'hypothèse faite sur M, on applique ce qui précède aux processus X^{T_n} , où les temps d'arrêt T_n croissent vers $+\infty$ et réduisent M, et on utilise le fait que l'arrêt diminue la variation (cela se voit sur la décomposition de Rao). Puis on fait tendre n vers $+\infty$.

REMARQUE. Nous avons un peu détaillé la démonstration, afin d'obtenir la constante 2 indiquée par Jeulin ou Meyer, et qui est la meilleure possible (prendre le cas où X est une martingale nulle en 0 et uniformément intégrable, et où $f(x)=|x|$). Si l'on ne s'intéresse pas à la constante, on peut aller beaucoup plus vite.

COROLLAIRE. Si $X\in H^1$, on a $\|f\circ X\|_{H^1} \leqq 2K\|X\|_{H^1} < \infty$.

Ce corollaire est une conséquence évidente de la proposition 1, compte tenu de la définition de la norme de H^1.

Passons à H^p, $p>1$ (nous n'étudions que le cas de la fonction $f(x)=|x|$). Nous démontrons, par la même méthode mais avec des calculs plus laborieux que dans le cas $p=1$, la proposition suivante (cf. Yor [6]).

PROPOSITION 2. Si $X\epsilon H^p$, on a $|X|^p \epsilon H^1$, avec $\| \, |X|^p \, \|_{H^1} \leqq c_p \| X \|_{H^p}$

DEMONSTRATION. Les calculs reposent sur l'inégalité suivante, où u et v sont positifs

$$|u^p-v^p| \leqq p|u-v|(\sup(u,v))^{p-1}$$

d'où l'on tire, pour u et v réels

$$(1) \quad |v|^p-p(\sup(|u|,|v|))^{p-1}|u-v| \leqq |u|^p \leqq |v|^p+p(\sup(|u|,|v|))^{p-1}|u-v|$$

Reprenons la décomposition $X=M+A$ de la proposition 1 ; comme $X\epsilon H^p$, M est bornée dans L^p. Ecrivons (1) en prenant $u=M_t+A_t$, $v=M_t+A_s$, donc $|u-v| \leqq \int_s^t |dA_r|$, $\sup(|u|,|v|) \leqq |X_t|+\int_s^t |dA_r| \leqq X^*_t + \int_0^\infty |dA_r|$, v.a. que nous noterons Y, et qui appartient à L^p. Nous obtenons

$$|M_t+A_s|^p - p\int_s^t |dA_r| \, Y^{p-1} \leqq |M_t+A_t|^p \leqq |M_t+A_s|^p + p\int_s^t |dA_r| \, Y^{p-1}$$

Retranchons $|M_s+A_s|^p$, conditionnons par $\underline{\underline{F}}_s$ en remarquant que

$$E[|M_t+A_s|^p-|M_s+A_s|^p|\underline{\underline{F}}_s] \geqq 0$$

Il vient

$$| \, E[|M_t+A_t|^p-|M_s+A_s|^p|\underline{\underline{F}}_s] \, | \leqq E[|M_t+A_s|^p-|M_s+A_s|^p+ pY^{p-1}\int_s^t |dA_r| \, |\underline{\underline{F}}_s]$$

Soit maintenant une subdivision finie $\tau=(t_i)_{0\leqq i\leqq n}$. L'inégalité précédente nous donne

$$\mathrm{Var}_\tau(|X|^p) \leqq E[\sum_{i=0}^{n-1}(|M_{t_{i+1}}+A_{t_i}|^p-|M_{t_i}+A_{t_i}|^p)+pY^{p-1}\int_0^{t_n}|dA_r| + |X_{t_n}|^p \,]$$

$$\leqq E[|M_{t_n}+A_{t_{n-1}}|^p+\sum_{i=0}^{n-1}(|M_{t_i}+A_{t_{i-1}}|^p-|M_{t_i}+A_{t_i}|^p) +pY^{p-1}\int..+|X_{t_n}|^p]$$

Nous majorons $|M_{t_n}+A_{t_{n-1}}|$ et $|X_{t_n}|$ par $X^*+\int_0^\infty |dA_s|=Y$; de même, $\int_0^{t_n}|dA_r|$ est majoré par Y. Pour la somme, nous appliquons à nouveau (1) :

$$||M_{t_i}+A_{t_{i-1}}|^p-|M_{t_i}+A_{t_i}|^p| \leqq p\int_{t_{i-1}}^{t_i}|dA_s| \, Y^{p-1}$$

d'où une somme majorée par pY^p. Finalement, il vient

$$\mathrm{Var}_\tau(|X|^p) \leqq E[2(1+p)Y^p] = 2(1+p)\|X\|_{H^p}$$

Nous passons au second résultat de Yoeurp. Nous voulons montrer que

PROPOSITION 3. Si X est un processus adapté continu, et si $|X|$ est une quasimartingale, X en est une aussi, et $\mathrm{Var}(X) \leq \mathrm{Var}(|X|)$.

COROLLAIRE. Avec les mêmes notations, si $|X|$ est une semimartingale, X en est une aussi.

Pour passer de la proposition 3 au corollaire, il suffit de remplacer P par une loi Q équivalente, pour laquelle $|X|$ devient une quasimartingale sur tout intervalle fini (cf. [2], théorème 5).

REMARQUE. Revenons à la proposition 3 . Si $|X|$ appartient à H^1, il est clair que X appartient à H^1, avec une norme majorée par celle de $|X|$. On retrouve ainsi un résultat de Yor [6], sous des hypothèses plus faibles.

Nous allons donner à la proposition 3 une forme plus générale. Soit M l'ensemble $\{X=0\}=\{|X|=0\}$. On pose comme d'habitude

$$D_t(\omega) = \inf\{s>t \ , \ (s,\omega)\in M\}$$

et

$$\tau_t(\omega) = \sup\{s<t \ , \ (s,\omega)\in M\} \ , \ \ell_t(\omega) = \sup\{s\leq t, \ (s,\omega)\in M\}$$

posons aussi $Z_t=|X_t|$, $Y_t=X_t$, $\varepsilon_t= \mathrm{sgn}(Y_t)$ (on convient que sgn(0)=1 par exemple). Le processus $K_t = \limsup_{s\downarrow\downarrow t} \varepsilon_s$ est progressif ; on a $|K|\leq 1$ et

$$Y_t = K_{\ell_t} Z_t = K_{\tau_t} Z_t$$

(les processus ℓ_t et τ_t ne diffèrent qu'aux extrémités droites d'intervalles contigus à M, points où Z s'annule). La proposition 3 est donc un cas particulier de la proposition suivante :

PROPOSITION 4. Soient Z une quasimartingale, M un ensemble progressif fermé à droite, K un processus progressif tel que $|K|\leq 1$. On suppose que $Z_{D_t}=0$ pour tout t, sur $\{D_t<\infty\}$. On pose

$$Y_t = K_{\ell_t} Z_t = K_{\tau_t} Z_t$$

Alors Y est une quasimartingale, et l'on a $\mathrm{Var}(Y)\leq 3\mathrm{Var}(Z)$ (si $Z\geq 0$, on peut remplacer 3 par 1).

Avant de démontrer ce théorème, disons que cet énoncé a été suggéré par une formule établie par Azéma et Yor, dans le cas où le processus K est prévisible. On a alors explicitement

$$Y_t = \int_0^t K_{\tau_s} dZ_s \quad \text{(le processus } K_\tau \text{ étant prévisible)}$$

Cette formule a une grande importance dans la théorie des temps locaux. Il faut remarquer la signification probabiliste du processus Y, lorsque K ne prend que les valeurs ±1 : Y s'obtient en "renversant" de manière aléatoire les excursions de Z hors de l'ensemble H où Z s'annule.

DEMONSTRATION. Comme ℓ_t est $\underline{\underline{F}}_t$-mesurable, K_{ℓ_t} est $\underline{\underline{F}}_t$-mesurable, et Y est adapté. Vérifions que Y est continu à droite[1] : il n'y a aucun problème dans le complémentaire de $\overline{M}$, ni aux points de M isolés à droite. Si $t\in M$ n'est pas isolé à droite, on a $D_t=t$, donc $Y_t=0$. La continuité à droite de Y résulte alors du fait que $|Y_t|\leq |Z_t|$ et que $Z_{t+}=Z_t=0$.

Il nous suffit de démontrer que, pour toute subdivision $\sigma=(s_i)_{0\leq i\leq n}$, on a $\mathrm{Var}_\sigma(Y) \leq 3\mathrm{Var}(Z)$. Pour tout $i<n$, posons $T_i=s_{i+1}\wedge D_{s_i}$, et introduisons la subdivision[1] aléatoire $\tau=(s_0,T_0,s_1,T_1\dots s_{n-1},T_n,s_n)$; on sait que $\mathrm{Var}_\sigma(Y)\leq \mathrm{Var}_\tau(Y)$, et que $\mathrm{Var}_\tau(Z)\leq \mathrm{Var}(Z)$ (ce dernier point est trivial pour les surmartingales positives, et s'étend aux quasimartingales par la décomposition de Rao). En fin de compte, il suffit de démontrer que $\mathrm{Var}_\tau(Y)$ $\leq 3\mathrm{Var}(Z)$.

Nous avons pour tout i

$$E[Y_{T_i}-Y_{s_i}|\underline{\underline{F}}_{s_i}] = E[K_{\ell_{T_i}}Z_{T_i}-K_{\ell_{s_i}}Z_{s_i}|\underline{\underline{F}}_{s_i}] = E[K_{\ell_{s_i}}(Z_{T_i}-Z_{s_i})|\underline{\underline{F}}_{s_i}]$$
$$= K_{\ell_{s_i}}E[Z_{T_i}-Z_{s_i}|\underline{\underline{F}}_{s_i}]$$

(en effet, K_{ℓ_t} garde la valeur constante $K_{\ell_{s_i}}$ sur tout l'intervalle $[s_i,T_i]$ si $T_i<D_{s_i}$; si $T_i=D_{s_i}$, on a $\ell_{T_i}\neq\ell_{s_i}$, mais le changement n'a aucune importance car $Z_{T_i}=0$). Prenant une valeur absolue, puis une espérance, nous obtenons

(2) $E[\ \Sigma|E[Y_{T_i}-Y_{s_i}||\underline{\underline{F}}_{s_i}]|\ ] \leq E[\ \Sigma|E[Z_{T_i}-Z_{s_i}|\underline{\underline{F}}_{s_i}]|\ ]$

De même, nous avons $Y_{T_i}=0$ sur $\{T_i<s_{i+1}\}$, donc

$$|E[Y_{s_{i+1}}-Y_{T_i}|\underline{\underline{F}}_{T_i}]|=|E[Y_{s_{i+1}}I_{\{T_i<s_{i+1}\}}|\underline{\underline{F}}_{T_i}]|\leq E[|Z_{s_{i+1}}|I_{\{\ \}}|\underline{\underline{F}}_{T_i}]$$
$$= |E[|Z_{s_{i+1}}|-|Z_{T_i}||\underline{\underline{F}}_{T_i}]|$$

ou encore

(3) $E[\ \Sigma|E[Y_{s_{i+1}}-Y_{T_i}||\underline{\underline{F}}_{T_i}]| \leq E[\ \Sigma|E[|Z_{s_{i+1}}|-|Z|_{T_i}|\underline{\underline{F}}_{T_i}]|$

Ajoutons (2) et (3) : il vient $\mathrm{Var}_\tau(Y) \leq \mathrm{Var}_\tau(Z)+\mathrm{Var}_\tau(|Z|) \leq \mathrm{Var}(Z)+$ $\mathrm{Var}(|Z|) \leq 3\mathrm{Var}(Z)$ d'après la proposition 1 .Si $Z=|Z|$, on obtient simplement $\mathrm{Var}_\tau(Y) \leq \mathrm{Var}_\tau(Z)$.

COROLLAIRE. Si $Z\in\underline{\underline{H}}^1$, on a aussi $Y\in\underline{\underline{H}}^1$.

En effet, il est clair que $Y^*\leq Z^*$. Si K est prévisible, la formule d'Azéma-Yor entraîne que $\|Y\|_{\underline{\underline{H}}^p} \leq c\|Z\|_{\underline{\underline{H}}^p}$ pour $p<\infty$, mais on ne sait rien de tel pour K progressif.

1. Les points de τ ne sont pas tous distincts

REFERENCES

[1] AZEMA (J.) et YOR (M.). En guise d'introduction. Temps Locaux, Astérisque n° 52-53, Soc. Math. France 1978.

[2] DELLACHERIE (C.). Quelques applications du lemme de Borel-Cantelli à la théorie des semimartingales. Sém. Prob. XII, Lect. Notes 649, Springer 1978, p. 742-745.

[3] DELLACHERIE (C.) et MEYER (P.A.). Probabilités et Potentiels, chap. VI (à paraître).

[4] JEULIN (T.). Partie positive d'une quasimartingale. C.R.A.S. Paris, t. 287, 1978, p. 351-352.

[5] MEYER (P.A.). Un cours sur les intégrales stochastiques. Sém. Prob. X, Lect. Notes 511, Springer 1976.

[6] MEYER (P.A.). Sur un théorème de J. Jacod. Sém. Prob. XII, Lect. Notes Notes in M. 649, Springer 1978, p. 57-60.

[7] STRICKER (C.). Quasimartingales, martingales locales, semimartingales et filtration naturelle. ZfW 39, 1977, p. 55-63.

[8] YOEURP (C.). Compléments sur les temps locaux et les quasimartingales. Astérisque 52-53, 1978, Soc. Math. France, p. 197-218.

[9] YOR (M.). Une remarque sur les espaces H^p de semimartingales. C.R. A.S. Paris, t. 287, 1978, p.

[10] YOR (M.). Sur le balayage des semi-martingales continues. A paraître.

I.R.M.A.
Laboratoire associé au CNRS
rue du G^{al} Zimmer
67084 Strasbourg-Cedex.