THIERRY JEULIN
MARC YOR

Un théorème de J. W. Pitman

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 13 (1979), p. 521-532
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1979__13__521_0>

Un théorème de J.W. Pitman

(T. Jeulin , avec un appendice de M. Yor)

Le but de cette note est de donner une nouvelle démonstration d'un théorème dû à J.W. Pitman ([5]) :

Théorème : a) Soit X_t un mouvement brownien réel issu de 0, et soit $S_t = \sup_{s \leq t} X_s$. Alors $2S-X$ a même loi qu'un processus de Bessel d'ordre 3 issu de 0 .

a') Soit Z_t un processus de Bessel d'ordre 3 issu de 0, et soit $J_t = \inf_{s \geq t} Z_s$. Alors $2J-Z$ est un mouvement brownien .

Rappelons d'abord, en suivant Pitman, que les assertions a) et a') sont équivalentes.

Considérons en effet l'ensemble U (resp. V) des applications continues $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ (resp. $v : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$) telles que $u(0) = 0$ et $\sup_t u(t) = +\infty$ (resp. $v(0) = 0$ et $\lim_{t \to +\infty} v(t) = +\infty$). On munit en outre U et V de la topologie de la convergence compacte et on note $\underline{\underline{U}}$ et $\underline{\underline{V}}$ leurs tribus boréliennes respectives.

Pour $u \in U$, définissons $\bar{u}(t) = \sup_{s \leq t} u(s)$, et pour $v \in V$, $\underline{v}(t) = \inf_{s \geq t} v(s)$. Soit en outre q un réel, $q > 1$.

On vérifie facilement que les applications [mesurables]

$$(1) \qquad \begin{array}{l} U \xrightarrow{f_q} V \\ u \longrightarrow f_q(u) = q\bar{u} - u \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{l} V \xrightarrow{g_q} U \\ v \longrightarrow g_q(v) = (q/q-1)\, \underline{v} - v \end{array}$$

sont réciproques et que : (1') $\underline{f_q(u)} = (q-1)\, \bar{u}$.

Notons P_o (resp. Q_o) la probabilité sur $(U,\underline{\underline{U}})$ (resp. $(V,\underline{\underline{V}})$) faisant des applications coordonnées un mouvement brownien (resp. un processus de Bessel d'ordre 3) issu de 0 . a) et a') signifient :

a") $\quad Q_o = f_2(P_o)$.

Notons cependant la proposition élémentaire suivante :

<u>Proposition</u> : <u>Soit</u> X_t <u>un mouvement brownien réel issu de</u> 0 , <u>et soit</u> $S_t = \sup\limits_{s \leqslant t} X_s$. <u>Soit en outre</u> q <u>un réel,</u> $q > 1$. <u>Une condition nécessaire (et donc suffisante, d'après le théorème de Pitman) pour que</u> qS-X <u>soit un processus de Markov homogène est</u> : $q = 2$.

<u>Démonstration</u> : soient $R_t = qS_t - X_t$, $I_t = \inf\limits_{s \leqslant t} R_s = (q-1)\, S_t$ (d'après $\bar{1}'$)). Pour que R soit un processus de Markov homogène, il est nécessaire qu'il existe une fonction [universellement mesurable] $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout $t > 0$,

$E(I_t \mid R_t) = (q-1)\, E(S_t \mid R_t) = (q-1)\, h(R_t)$ p.s. .

La loi de (X_t, S_t) ayant pour densité

$$\varphi(a,b) = \left(\frac{2}{\pi t^3}\right)^{\frac{1}{2}} (2b-a) \exp\left(-\frac{(2b-a)^2}{2t}\right) 1_{(a^+ \leqslant b)}$$

par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$ ([3] page 195), on obtient, pour $q \neq 2$,

$$(q-2)\, E(S_t \mid R_t) = R_t - t^{\frac{1}{2}}\, k_q(t^{-\frac{1}{2}} R_t)$$

$$\text{avec} \quad k_q(r) = \left(\int_{\frac{r}{q-1}}^{r} u^2 \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du\right) \left(\int_{\frac{r}{q-1}}^{r} u \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du\right)^{-1} .$$

(Pour $q = 2$, $h(x) = \frac{1}{2}x$ convient !) .

Le fait que la condition soit suffisante est l'objet de la suite ...

Adoptant maintenant une démarche inverse de celle de Pitman [(+)], nous allons démontrer (ou plutôt redécouvrir...) l'énoncé a').

Z est donc un processus de Bessel d'ordre 3, issu de 0, défini sur un espace probabilisé complet filtré (Ω, $\underline{\underline{F}}$, $\underline{\underline{F}}_t$, P) vérifiant les conditions habituelles : Z est une $(\underline{\underline{F}}_t)$-semi-martingale continue positive, nulle en 0, telle que, par une application classique de la formule d' Ito :

$$B_t = Z_t - \int_0^t \frac{1}{Z_s}\, ds \quad \text{soit un } (\underline{\underline{F}}_t)\text{-mouvement brownien .}$$

Pour simplifier, on suppose que $(\underline{\underline{F}}_t)$ est la filtration $(\underline{\underline{Z}}_t)$ engendrée par Z , dûment complétée.

Soit $X = 2J-Z$ et soit $(\underline{\underline{X}}_t)$ la filtration [dûment complétée] engendrée par X . De (1') vient : $J_t = \sup_{s\leqslant t} X_s$, d'où $\underline{\underline{Z}}_t \subset \underline{\underline{X}}_t$; pour $s \leqslant t$, $J_s = \inf(J_t \,;\, \inf_{s\leqslant u\leqslant t} Z_u)$ (voir [5] ,p.522, pour le même résultat dans le cas discret), d'où : $\underline{\underline{X}}_t = \underline{\underline{Z}}_t \vee \sigma(J_t)$.

En outre si, pour $a \in \mathbb{R}_+^*$, $T_a = \inf(t,\ X_t = a)$ et $\sigma_a = \sup(t,\ Z_t = a)$, alors $T_a = \sigma_a$ ((1')), σ_a est fin d'ensemble $(\underline{\underline{Z}}_t)$-prévisible, T_a est un $(\underline{\underline{X}}_{t+})$-temps d'arrêt , et on déduit de l'égalité : $(J_t > a) = (\sigma_a < t)$, pour tout couple (a,t) , que :

$(\underline{\underline{X}}_{t+})$ <u>est la plus petite filtration continue à droite, contenant</u> $(\underline{\underline{Z}}_t)$ <u>et faisant des variables</u> $(T_a,\ a\in \mathbb{R}_+^*)$ <u>des temps d'arrêt</u> .

Cette caractérisation de la filtration $(\underline{\underline{X}}_{t+})$ nous a incité à utiliser des résultats sur les grossissements successifs des filtrations à l'aide de fins d'ensembles optionnels, pour montrer que Z est une $(\underline{\underline{X}}_{t+})$-semi-martingale (et plus exactement que $(Z_s)_{s\leqslant t}$ est une $(\underline{\underline{X}}_{s+})_{s\leqslant t}$-quasi-martingale) , puis que $X = 2J - Z$ est une

---

(+) Cf. la remarque de M. Yor en appendice .

$(\underline{\underline{X}}_{t+})$-martingale, qui ne saurait être autre qu'un mouvement brownien, puisque $[X,X]_t = [Z,Z]_t = [B,B]_t = t$.

Introduisons quelques notations supplémentaires : $\mathcal{A}$ est l'ensemble des suites croissantes $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$, telles que $\alpha(0) = 0$ et $\alpha(n) = +\infty$ pour un $n \in \mathbb{N}$. Pour $\alpha \in \mathcal{A}$, on désigne par $(\underline{\underline{Z}}^{\alpha}_t)$ la plus petite filtration continue à droite contenant $(\underline{\underline{Z}}_t)$ et faisant des $(T_{\alpha(n)}, n \in \mathbb{N})$ des temps d'arrêt . $\underline{\underline{P}}$ (resp. $\underline{\underline{P}}^{\alpha}$, resp. $\bar{\underline{\underline{P}}}$) désigne la tribu $(\underline{\underline{Z}}_t)$- (resp. $(\underline{\underline{Z}}^{\alpha}_t)$-, resp. $(\underline{\underline{X}}_{t+})$-) prévisible .

$\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \underline{\underline{P}}^{\alpha}$ <u>est une algèbre de Boole engendrant</u> $\bar{\underline{\underline{P}}}$; en outre , les $(T_a, a \in \mathbb{R}_+^*)$ étant des fins d'ensembles $\underline{\underline{P}}$-mesurables, il résulte de ([2] , lemme 17) (voir aussi [1]) que $\underline{\underline{P}}^{\alpha}$ est la tribu sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ engendrée par $\underline{\underline{P}}$ et les intervalles stochastiques $(]\!]T_{\alpha(n)}, T_{\alpha(n+1)}]\!] , n \in \mathbb{N})$. Par suite ([2] , lemme 17 et proposition 18) :

i) <u>si</u> H <u>est un processus mesurable positif, nul en</u> 0, <u>sa projection</u> $^{(\alpha)\text{-}p}H$ <u>sur</u> $\underline{\underline{P}}$ <u>est donnée par</u> :

$$(2) \qquad ^{(\alpha)\text{-}p}H = \sum_{n \in \mathbb{N}} 1_{]\!]T_{\alpha(n)}, T_{\alpha(n+1)}]\!]} \frac{^{p}(H 1_{]\!]T_{\alpha(n)}, T_{\alpha(n+1)}]\!]})}{Y_-^{\alpha(n+1)} - Y_-^{\alpha(n)}}$$

<u>où</u> Y^a <u>est la</u> $(\underline{\underline{Z}}_t)$-<u>surmartingale</u> $^{o}(1_{[\![0,T_a[\![})$, <u>dont on note</u> M^a <u>la partie martingale</u> .

(On fait la convention 0/0 = 0 , et pour U processus mesurable positif, ^{p}U (= ^{o}U) désigne la projection $(\underline{\underline{Z}}_t)$-prévisible (= optionnelle) de U) .

ii) B <u>est une</u> $(\underline{\underline{Z}}^{\alpha}_t)$-<u>semi-martingale et</u>

$$(3)\quad B_t^{\alpha} = B_t - \int_0^t \sum_{n\in N} 1_{(T_{\alpha(n)} < s \leq T_{\alpha(n+1)})} \frac{d\langle B, M^{\alpha(n+1)} - M^{\alpha(n)}\rangle_s}{Y_s^{\alpha(n+1)} - Y_s^{\alpha(n)}}$$

<u>est un</u> $(\underline{\underline{Z}}_t^{\alpha})$-<u>mouvement brownien</u> .

(Les crochets obliques sont relatifs à la filtration $(\underline{\underline{Z}}_t)$).

<u>Explicitons</u> : pour un processus de Bessel d'ordre 3, issu de $x \in \mathbb{R}_+$, la probabilité d'atteinte d'un point $a \in \mathbb{R}_+$ est égale à $\inf(1, a/x)$. La propriété de Markov forte de Z donne alors ([2] , lemme 21) :

$$(4)\quad Y^a = \inf(1, \frac{a}{Z}) .$$

La formule d'Ito pour les fonctions convexes donne :

$$(5)\quad M^a = 1 - a \int_0^{\cdot} 1_{(a < Z_s)} \frac{1}{Z_s^2} dB_s .$$

On a donc : Z est une $(\underline{\underline{Z}}_t^{\alpha})$-semi-martingale continue, de décomposition canonique : (6) $Z = B^{\alpha} + C^{\alpha}$, où

$$(6)\quad C_t^{\alpha} = \int_0^t \sum_{n\in N} 1_{(T_{\alpha(n)} < s \leq T_{\alpha(n+1)})} 1_{(Z_s \leq \alpha(n+1))} \frac{ds}{Z_s - \alpha(n)} .$$

Nous en venons au point crucial :

<u>Lemme 1</u> : C^{α} <u>est la projection duale</u> $(\underline{\underline{Z}}_t^{\alpha})$-<u>prévisible du processus croissant</u> 2J . <u>En outre, pour tout</u> $t \in \mathbb{R}_+$, <u>pour tout</u> H $\underline{\underline{P}}^{\alpha}$-<u>mesurable borné</u> ,

$$(7)\quad E(\int_0^t H_s\, dZ_s) = 2\, E(\int_0^t H_s\, dJ_s) .$$

<u>Démonstration</u> : a) Soit H un processus $\underline{\underline{P}}^{\alpha}$-mesurable borné, nul en 0 . D'après (2) , pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$E\left(\int_0^t H_s \, dJ_s\right) \overset{(2)}{=}$$

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} E\left\{\int_0^t 1_{(T_{\alpha(n)} < s \leqslant T_{\alpha(n+1)})} \frac{{}^p(H 1_{]\!]T_{\alpha(n)}, T_{\alpha(n+1)}]\!]})_s}{Y_s^{\alpha(n+1)} - Y_s^{\alpha(n)}} \, dJ_s\right\} =$$

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} E\left\{\int_0^t 1_{(\alpha(n) < Z_s \leqslant \alpha(n+1))} \frac{{}^p(H 1_{]\!]T_{\alpha(n)}, T_{\alpha(n+1)}]\!]})_s}{Y_s^{\alpha(n+1)} - Y_s^{\alpha(n)}} \, dJ_s\right\}$$

puisque $(T_{\alpha(n)} < s \leqslant T_{\alpha(n+1)}) = (\alpha(n) < J_s \leqslant \alpha(n+1))$ et que le processus croissant J est porté par $(s \mid J_s = Z_s)$.

J^p désignant la projection duale $(\underline{\underline{Z}}_t)$-prévisible de J, on obtient à l'aide de (4) : $E\left(\int_0^t H_s \, dJ_s\right) =$

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} E\left(\int_0^t 1_{(\alpha(n) < Z_s \leqslant \alpha(n+1))} \frac{Z_s \, {}^p(H 1_{]\!]T_{\alpha(n)}, T_{\alpha(n+1)}]\!]})_s}{Z_s - \alpha(n)} \, dJ_s\right) =$$

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} E\left(\int_0^t H_s 1_{(T_{\alpha(n)} < s \leqslant T_{\alpha(n+1)})} \cdot 1_{(Z_s \leqslant \alpha(n+1))} \frac{Z_s}{Z_s - \alpha(n)} \, dJ_s^p\right).$$

b) Il nous reste à calculer J^p. Or, pour un processus de Bessel d'ordre 3, issu de $x \in \mathbb{R}_+$,

$$E_x(J_0) = \int_0^\infty P_x(J_0 > y)\, dy = \int_0^x P_x(T_y = \infty)\, dy = \int_0^x \left(1 - \frac{y}{x}\right) dy = \tfrac{1}{2} x .$$

La propriété de Markov donne donc, pour tout $(\underline{\underline{Z}}_t)$-temps d'arrêt T, T fini, $E(Z_T) = 2\, E(J_T)$,

soit $Z - 2J$ est $(\underline{\underline{Z}}_t)$-innovant, ou $Z - 2J^p$ est une $(\underline{\underline{Z}}_t)$-martingale locale, soit $J^p = \frac{1}{2} \int_0^{\cdot} \frac{1}{Z_s} \, ds$.

c) Si H est $\underline{\underline{P}}^{\alpha}$-mesurable, borné par $h \in \mathbb{R}_+$,

$\left[H\cdot B^{\alpha}, H\cdot B^{\alpha}\right]_t = \int_0^t H_s^2 \, ds$ est majoré par $h^2\, t$.

$H\cdot B^{\alpha}$ est donc une $(\underline{\underline{Z}}_t^{\alpha})$-martingale de carré intégrable, nulle en 0 , donc d'espérance nulle ; (6) implique alors (7) .

<u>Lemme 2</u> : <u>pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $(Z_s)_{s \leqslant t}$ est une $(\underline{\underline{X}}_{s+})_{s \leqslant t}$-quasi-martingale.</u>

<u>Démonstration</u> : $s \to Z_s$ étant continu dans L^1 , il suffit de montrer que, pour tout t , $(Z_s)_{s \leqslant t}$ est une $(\underline{\underline{X}}_s)_{s \leqslant t}$-quasi-martingale .

Pour toute subdivision $\mathcal{S} = (0=t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} = t)$ de $[0,t]$,

on note $\mathrm{Var}(Z, \mathcal{S}, \underline{\underline{X}}, t) = \left(\sum_{i=0}^{n} E\left\{\left|E(Z_{t_{i+1}} - Z_{t_i} \mid \underline{\underline{X}}_{t_i})\right|\right\}\right) + E(Z_t)$,

et on veut montrer que $\mathrm{Var}(Z, \underline{\underline{X}}, t) = \sup_{\mathcal{S}} \mathrm{Var}(Z, \mathcal{S}, \underline{\underline{X}}, t)$ est finie pour tout t . Or ,

$$\mathrm{Var}(Z, \mathcal{S}, \underline{\underline{X}}, t) - E(Z_t)$$

$$= \sup\left(\sum_{i=0}^{n} E(U_{t_i}(Z_{t_{i+1}} - Z_{t_i})) \;;\; |U_{t_i}| \leqslant 1 \;;\; U_{t_i} \ \underline{\underline{X}}_{t_i}\text{-mesurable}\right)$$

$$= \sup\left(\sum_{i=0}^{n} E(V_{t_i}(Z_{t_{i+1}} - Z_{t_i})) \;;\; |V_{t_i}| \leqslant 1 \ ,\ V_{t_i} \ \underline{\underline{Z}}^{\alpha}_{t_i}\text{-mesurable pour un } \alpha \in \mathcal{A}\right)$$

$$\leqslant \sup\left\{E\left(\int_0^t H_s \, dZ_s\right) \;;\; |H| \leqslant 1 \ ,\ H \ \underline{\underline{P}}^{\alpha}\text{-mesurable pour un } \alpha \in \mathcal{A}\right\}$$

$$\overset{(7)}{=} \sup\left\{2\, E\int_0^t H_s \, dJ_s \;;\; |H| \leqslant 1 \ ,\ H \ \underline{\underline{P}}^{\alpha}\text{-mesurable pour un } \alpha \in \mathcal{A}\right\}$$

$= E(Z_t) = (2t/\pi)^{\frac{1}{2}}$, d'où le lemme 2 .

Le lemme 2 et l'égalité (7) , pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$, et H processus $\underline{\underline{P}}^{\alpha}$-mesurable borné , entrainent, par application du théorème de classe monotone, que (7) est encore valable pour tout processus H $\underline{\underline{\bar{P}}}$-mesurable borné. Ceci équivaut à dire que : Z-2J est une $(\underline{\underline{X}}_{t+})$-martingale continue , cqfd .

Remarques : 1) La filtration ($\underline{\underline{X}}_t$) est en fait continue à droite .

2) Il ne faut pas déduire hâtivement du lemme 2 que toute ($\underline{\underline{Z}}_t$)-martingale est une ($\underline{\underline{X}}_t$)-semi-martingale, la fausseté de cette assertion ayant été prouvée dans l'article sur les "faux-amis", écrit avec M. Yor, dans ce volume .

Appendice .

Sur le supremum du mouvement brownien : les théorèmes de P. Lévy et J. Pitman .

(M. Yor)

1 . Une question de J. Pitman.

Contrairement à T. Jeulin, nous avons essayé de donner une démonstration du théorème de Pitman présenté sous sa première forme (cf. le début de l'exposé de Jeulin) que nous rappelons :

Théorème A1 (J. Pitman): Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien réel, issu de 0, et soit $S_t = \sup_{s \leq t} X_s$. Alors, $Z = 2S - X$ est (en loi) un processus de Bessel d'ordre 3, issu de 0 .

Remarquons tout de suite, d'après Pitman, que :

$S_t = J_t \ (\overset{\text{déf}}{=} \inf_{s \geq t} Z_s)$, pour tout t .

On note encore ($\underline{\underline{Z}}_t$) (resp. ($\underline{\underline{X}}_t$)) la filtration naturelle de Z (resp. X) convenablement complétée, et rendue continue à droite .

En fait, notre approche ne semble pas pouvoir aboutir à la preuve complète du théorème A1 . Plus modestement, nous répondons seulement ici à une question de Pitman ([5] ,p.523, fin de la note(ii)) en faisant la remarque suivante : si l'on sait déjà (par une méthode ou une autre) que $(Z_t)_{t \geq 0}$ est un processus de Markov (inhomogène) - en fait, on utilisera uniquement :

$$(*) \quad \forall\, t, \quad E(J_t \mid \underline{\underline{Z}}_t) = E(J_t \mid Z_t) \quad -$$

alors on peut montrer facilement que $(Z_t)_{t \geq 0}$ est un processus de Bessel d'ordre 3, issu de 0 .

2. <u>Sur les processus de Bessel d'ordre n</u> ($n \in \mathbb{N}^*$).

Si $(\rho_t, t \geq 0)$ est un processus de Bessel d'ordre n, issu de 0, <u>i.e.</u>: si $\rho_t = \| B_t \|$, où (B_t) est un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, issu de 0, et $\| . \|$ désigne la norme euclidienne, il découle d'une application simple de la formule d'Ito que :

(a) $(\rho_t^2 - nt, t \geq 0)$ <u>est une martingale continue, de processus croissant égal à</u> $4 \int_0^t \rho_s^2 \, ds$.

L'intérêt de cette remarque provient du résultat d'unicité suivant, dû à T.Jeulin ([2]) qui emploie pour cela des résultats de T.Yamada ([6]) sur les équations différentielles stochastiques à coefficients höldériens, d'ordre $\alpha < 1$ (en fait, ici $\alpha = \frac{1}{2}$) :

(b) <u>Si, sur un espace de probabilité filtré</u>, $(\rho_t, t \geq 0)$ <u>est un processus à valeurs positives, nul en</u> 0, <u>qui vérifie</u> (a) , ρ <u>est (en loi) un processus de Bessel d'ordre</u> n .

3. <u>Retour au théorème de Pitman</u>.

Comme annoncé dans le paragraphe 1 , nous admettons ($*$), et démontrons le théorème A1 .

Si deux processus H et K, adaptés à une filtration $(\underline{\underline{F}}_t)$ diffèrent d'une $(\underline{\underline{F}}_t)$-martingale locale, on note : $H \equiv K \pmod{(\underline{\underline{F}}_t)}$.

Appliquant la formule d'Ito à Z^2, il vient :

$$\begin{aligned} Z_t^2 &= 2\int_0^t Z_s \, dZ_s + t \\ (1) \qquad &= -2\int_0^t Z_s \, dX_s + 4\int_0^t Z_s \, dS_s + t \,. \end{aligned}$$

Il résulte déjà de cette formule que :

(c) Z^2 est une semi-martingale continue pour $(\underline{\underline{X}}_t)$ (et donc pour $(\underline{\underline{Z}}_t)$), et le processus croissant de la partie martingale continue de Z^2 (qui est le même relativement à $(\underline{\underline{X}}_t)$ et à $(\underline{\underline{Z}}_t)$) est $4\int_0^t Z_s^2 \, ds$.

Revenons à (1). La mesure aléatoire dS_s étant portée par $\{s \mid X_s = S_s\}$, on a :

$$\begin{aligned} Z_t^2 &\equiv t + 4\int_0^t X_s \, dS_s \pmod{(\underline{\underline{X}}_t)} \\ &\equiv t + 4\, X_t S_t \pmod{(\underline{\underline{X}}_t)}, \end{aligned}$$

par intégration par parties.

En utilisant la formule : $2S_t = Z_t + X_t$, il vient :

$$\begin{aligned} Z_t^2 &\equiv t + 2\, X_t\,(Z_t + X_t) \pmod{(\underline{\underline{X}}_t)} \\ &\equiv 3t + 2\, X_t Z_t \pmod{(\underline{\underline{X}}_t)}, \end{aligned}$$

et donc : (2) $Z_t^2 - 3t \equiv 2\, E(X_t \mid \underline{\underline{Z}}_t)\, Z_t \pmod{(\underline{\underline{Z}}_t)}$.

Or, d'après (*) , et la connaissance de la loi conjointe du couple (X_t, S_t) - pour t fixé - (voir l'exposé de Jeulin) , on a :

$2\, E(S_t \mid \underline{\underline{Z}}_t) = Z_t$, d'où : $E(X_t \mid \underline{\underline{Z}}_t) = 0$.

D'après (2) et (c), $\rho = Z$ vérifie (a) pour $n = 3$, et est donc, d'après (b), un processus de Bessel d'ordre 3 .

4. Le théorème de P. Lévy.

La méthode utilisée précédemment permet aussi de démontrer très simplement le

Théorème A2 (P.Lévy) : Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien réel, issu de 0, et soit $S_t = \sup_{s \leq t} X_s$. Alors $Y = S - X$ est (en loi) un processus de Bessel d'ordre 1 , issu de 0 .

Démonstration : D'après la formule d'Ito, on a :

$$Y_t^2 = 2\int_0^t Y_s \, dY_s + t = -2\int_0^t Y_s \, dX_s + t ,$$

car la mesure aléatoire dS_s est portée par $\{ s \mid X_s = S_s \}$.
En conséquence, $\rho = Y$ vérifie (a) avec $n = 1$, et est donc , d'après (b), un processus de Bessel d'ordre 1 .

Remarque finale : Toute la difficulté de l'étude du processus Z provient de ce que, pour tout $t > 0$, $\underline{\underline{Z}}_t \subsetneq \underline{\underline{X}}_t$
(en fait, $\underline{\underline{X}}_t = \underline{\underline{Z}}_t \vee \sigma(S_t)$; voir l'exposé de Jeulin).

Par contre, l'étude de Y est rendue aisée par l'égalité

(3) $\underline{\underline{Y}}_t = \underline{\underline{X}}_t$, pour tout t .

Cette égalité découle immédiatement de

(3') $$\forall t , \quad X_t = \int_0^t 1_{(Y_s \neq 0)} \, dY_s ,$$

laquelle résulte des deux arguments suivants :

- dS_s est portée par $\{ s \mid Y_s = 0 \}$, et
- $d\langle X,X\rangle_s = d\langle Y,Y\rangle_s$ ne charge pas $\{ s \mid Y_s = 0 \}$ ([4], chap. VI).

Références :

[1] Dellacherie C. ,Meyer P.A. : A propos du travail de Yor sur le grossissement des tribus. Séminaire de Probabilités XII, Lect. Notes in Math. 649, Springer 1978 .

[2] Jeulin T. : Grossissement d'une filtration et applications (dans ce volume)

[3] Lévy P. : Processus stochastiques et mouvement brownien. Paris 1948..

[4] Meyer P.A. : Un cours sur les intégrales stochastiques. Séminaire de Probabilités X, Lect. Notes in Math. 511 , Springer 1976.

[5] Pitman J.W. : One dimensional Brownian motion and the three-dimensional Bessel Process. Adv. Appl. Prob. 7,511 -526, 1975 .

[6] Yamada T. : Sur une construction des solutions d'équations différentielles stochastiques dans le cas non-lipschitzien. Séminaire de Probabilités XII, Lect. Notes in Math. 649, Springer 1978