SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

RENÉ CARMONA

Processus de diffusion gouverné par la forme de Dirichlet de l'opérateur de Schrödinger

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 13 (1979), p. 557-569
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1979__13__557_0>

PROCESSUS DE DIFFUSION GOUVERNE PAR LA FORME DE DIRICHLET DE L'OPERATEUR DE SCHRÖDINGER

par René CARMONA

Abstract:

It is well known that Schrödinger operator is unitary equivalent to the Dirichlet operator of the ground state measure, whenever the infimum of its spectrum is actually an eigenvalue. Moreover, the Markov process governed by this Dirichlet operator plays a crucial role in the so-called Feynes-Nelson stochastic mechanics. Unfortunately, none of the various attempts to construct this process seems to be satisfactory. Indeed, either the dimension is restricted to one, or non-explosion is not proved, or the actual state space is not completely known, or the assumptions are too restrictive. The aim of the present note is to give a construction of the desired diffusion process that works in full generality, and to give some properties of the transition functions. We would like to put the emphasis on the fact that all the probabilistic techniques we use are elementary or standard. The only new ingredients are recently discovered regularity properties of Schrödinger operator.

I. INTRODUCTION, NOTATIONS, HYPOTHESES:

Commençons par énoncer les hypothèses qui seront utilisées dans toute cette rédaction:

a) V <u>est une fonction réelle mesurable sur</u> $\mathbb{R}^n$ <u>qui admet une décomposition</u> $V = V_1 - V_2$ <u>avec</u> $V_2 \geq 0$ <u>et</u> $V_2 \in L^p(\mathbb{R}^n, dx)$ <u>pour un</u> $p > \max\{1, n/2\}$ (+), <u>et</u> V_1 <u>mesurable, bornée inférieurement, telle que pour tout compact</u> K, <u>il existe un nombre réel</u> $q = q(K)$, $q \geq 2$ <u>et</u> $q > n/2$ <u>pour lequel</u>:

$$\int_K |V_2(x)|^q \, dx < \infty .$$

(+) Il est bon de remarquer que tout ce que nous allons démontrer reste vrai sous des hypothèses plus faibles sur V_2. En effet, B.Simon a montré (voir [19]) comment étendre les propriétés de l'opérateur H que nous utilisons au cas où la fonction V_2 s'écrit comme somme de fonctions U_i qui ne dépendent que de $n_i \leq n$ variables, et qui sont uniformément localement dans L^{p_i} pour un $p_i > \max\{1, n_i/2\}$

Soit alors $H = -\frac{1}{2}\Delta+V$ l'opérateur de Schrödinger défini comme somme de formes quadratiques (voir par exemple [11] ou [6]). C'est un opérateur auto-adjoint borné inférieurement sur $L^2(\mathbb{R}^n, dx)$.

b) Nous supposons que la borne inférieure, soit λ, du spectre de H est une valeur propre de H (ceci se produit en particulier quand V_1 tend vers l'infini).

Il existe alors une fonction propre associée, soit ψ, que l'on peut choisir positive ou nulle (à cause, par exemple, de certains résultats de théorie du potentiel à la Beurling-Deny) et normalisée (i.e. $\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)^2 = 1$). La fonction ψ est appelée l'état fondamental. Soit μ la mesure de probabilité définie par $d\mu(x) = \psi(x)^2 dx$ et pour toutes f et g dans l'espace $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ des fonctions indéfiniment différentiables à support compact posons :

$$\delta(f,g) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} \nabla f(x).\overline{\nabla g(x)}\, dx.$$

En intégrant par parties nous obtenous $\delta(f,g) = (Df,g)_\mu$ où $(\ ,\ )_\mu$ désigne le pro- le produit scalaire de $L^2(\mathbb{R}^n, d\mu(x))$ et où D est défini par :

$$Df = -\frac{1}{2}\Delta f + \nabla h \cdot \nabla f \qquad (1)$$

avec $h = -\log\psi$. Ainsi la forme quadratique δ est définie par un opérateur symétrique. Elle admet donc une fermeture (que nous noterons encore δ par commodité) qui est appelée la forme de Dirichlet de la mesure μ. Il existe alors un seul opérateur auto-adjoint positif dont la forme quadratique est δ. Cet opérateur est une extension de l'opérateur D défini sur $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ par (1), c'est pourquoi nous le noterons encore D. L'intérêt de cet opérateur dans l'étude de l'opérateur de Schrödinger réside dans le fait qu'il lui est (à une translation près) unitairement équivalent. En fait $D = C(H-\lambda)C^{-1}$ où C est l'opérateur unitaire de $L^2(\mathbb{R}^n, dx)$ sur $L^2(\mathbb{R}^n, d\mu(x))$ défini par $Cf=\psi^{-1}f$ pour $f \in L^2(\mathbb{R}^n, dx)$.

Le but de cette rédaction est de présenter la construction du processus de diffusion gouverné par l'opérateur D et quelques unes de ses propriétés.

Nous poursuivons ce paragraphe en passant en revue les diverses approches déjà utilisées pour résoudre ce problème. Cela nous permettra de présenter de nouvelles notations et, nous osons l'espérer, justifier la présente rédaction.

δ est une forme de Dirichlet régulière dans la terminologie de M. Fukushima (voir [7] et [8]) et par conséquent, il existe un processus de Markov fort (X_t, P_x, ζ) à trajectoires continues à valeurs dans un borélien M de $\mathbb{R}^n$ dont le complémentaire est de δ-capacité nulle, avec pour temps de vie ζ et tel que pour toute fonction f dans $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n, d\mu(x))$ et pour tout $t>o$, $P_t f$ est une modification quasi-continue de $e^{-tD} f$ (ici $\{P_t ; t \geqq o\}$ est le semi-groupe associé au processus). L'approche de Fukushima a déjà été utilisée dans l'étude des formes de Dirichlet associées à l'opérateur de Schrödinger (voir par exemple [1]). Pourtant elle ne nous paraît pas satisfaisante car elle ne nous permet pas de savoir si le temps d'explosion ζ est fini ou non.

Une autre possibilité est de résoudre, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ l'équation intégrale stochastique :

$$d\xi_t = db_t - h(\xi_t)dt \quad , \quad \xi_o = x$$

où $\{b_t, t \geqq o\}$ est un processus de mouvement brownien standard dans $\mathbb{R}^n$. C'est l'approche des tenants de la mécanique stochastique à la Feynes-Nelson (voir [14]) (+) Supposons un instant que ∇h soit localement lipschitzien. Il est alors possible de construire (sur l'espace probabilisé où est construit le mouvement brownien) un processus de Markov fort $\{\xi_t^x ; t \geqq o, x \in \mathbb{R}^n\}$ au temps de vie $\{\tau^x ; x \in \mathbb{R}^n\}$ et d'essayer ensuite de vérifier les tests de "non-explosion" existants (voir par exemple [12]). Quand n=1 et V est une fonction indéfiniement différentiable qui tend vers $+\infty$

(+) Il semblerait que cette théorie connaisse un regain d'intérêt avec des travaux récents visant à fournir une nouvelle explication du phénomène "instanton" en mécanique quantique, et une discussion avec G.Jona-Lasinio a contribué à nous décider à écrire cette note.

lorsque $|x|$ tend vers $+\infty$, cette méthode a été employée par P.Priouret et M.Yor [17]. En général les tests ([11],[12]) ne sont satisfaits qu'au prix d'hypothèses trop restrictives sur V (*). En fait ∇h peut être très singulier : nous savons simplement que h est continue, bornée inférieurement et que ses dérivées premières (an sens des distributions) sont des fonctions localement de carré intégrable. Cette absence de régularité nous empêche aussi d'utiliser les résultats de N.I.Portenko [16] sur les processus de diffusion avec "coefficient de dérive" irrégulier.

Soit $\Omega = C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et soit $\mathcal{F}$ la tribu de parties de Ω engendrée par les applications coordonnées :

$$X_t : \Omega \ni \omega \longrightarrow X_t(\omega) = \omega(t) \qquad t \geqq o$$

Nous utiliserons le fait que $\mathcal{F}$ est aussi la tribu borélienne de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de $\mathbb{R}_+$. Notre but est de construire une famille $\{Q_x ; x \in \mathbb{R}^n\}$ de mesures de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$ donnant lieu à un processus de Markov fort satisfaisant :

$$E_{Q_x}\{f(X_t)\} = f(x) - \int_o^t E_{Q_x}\{(Df)(X_s)\}ds$$

pour tous $t \geqq o$, $x \in \mathbb{R}^n$ et $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Pour les mêmes raisons que précédemment il n'est pas question, à partir des résultats de D.W.Stroock et S.R.S. Varadhan [20] d'utiliser la technique de localisation (voir [21]) et de contrôler l'éventuelle explosion par des tests adéquates (voir [3]). Pourtant la méthode de changement de mesures employée par D.W.Stroock et S.R.S.Varadhan s'applique sans effort car la formule dite de Cameron-Martin se réduit à la formule connue sous le nom de Feynman-Kac. En effet, bien que pouvant être très irrégulier, notre "coefficient de dérive" est très particulier

---

(*) Précisons que nous devons formuler nos hypothèses sur V et qu'il est très difficile d'obtenir des propriétés de régularité de h à partir de telles hypothèses.

puisque c'est un gradient(au sens des distributions).

La construction qui suit ne comporte donc aucune innovation du point de vue probailiste. Prosaïquement elle tire un profit maximum d'estimations récentes démontrées pour certaines fonctionnelles multiplicatives du mouvement brownien(appelées aussi fonctionnelles de Kac). Parmi ces résultats signalons :

$$\forall t>o, \forall r>o, \quad K(r,t) \equiv \sup_{x \in \mathbb{R}^n} E_{W_x}\{\exp[-r\int_o^t V(X_u)du]\}<+\infty \qquad (2)$$

où pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, W_x est l'unique mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$ qui fasse de $\{X_t, t \geq o\}$ un processus de mouvement brownien issu de x. Cette estimation a été démontrée indépendamment par N.I.Portenko [16] et A.M.Bertier et B.Gaveau [2], et a été raffinée depuis en ce qui concerne la dépendance de K en r et t (voir par exemple [5.Remark 3.1]) et la possibilité d'étudier des fonctions V plus générales [19].

Pour simplifier l'écriture de certaines formules (et sans que cela nuise à la généralité des résultats présentés) nous supposerons $\lambda = 0$.

II. CONSTRUCTION DU PROCESSUS :

L'état fondamental ψ est un élément de $L^2(\mathbb{R}^n, dx)$. Il est montré en [5.Prop.3.3] qu'il est possible de choisir un représentant de la classe, que nous noterons ψ, qui soit une fonction continue strictement positive sur $\mathbb{R}^n$ et telle que $\psi(x)$ tende vers o lorsque $|x|$ tend vers ∞. Nous avons alors (rappelons que nous avons fixé $\lambda = o$) :

$$\forall\, t \geq o, \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \psi(x) = E_{W_x}\{\psi(X_t)\exp[-\int_o^t V(X_s)\,ds]\} \tag{3}$$

Pour tout $t \geq o$, $\mathcal{F}_t$ désignera la tribu engendrée par les applications coordonnées X_s pour $o \leq s \leq t$.

Lemme 1 :

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, *la formule :*

$$\forall\, t \geq o, \quad Q_x|_{\mathcal{F}_t} = \psi(X_o)^{-1}\,\psi(X_t)\exp[-\int_o^t V(X_s)\,ds]\,.W_x|_{\mathcal{F}_t} \tag{4}$$

définit une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$ *et l'application* $\mathbb{R}^n \ni x \longrightarrow Q_x$ *est continue pour la topologie de la convergence étroite des mesures.*

Démonstration : Pour tout $t > o$ posons :

$$R_t = \psi(X_o)^{-1}\psi(X_t)\exp[-\int_o^t V(X_s)\,ds] \tag{5}$$

L'hypothèse (a) faite sur V implique que la variable aléatoire R_t est bien définie (au moins W_x .p.s. pour tout $x \in \mathbb{R}^n$). R_t est positive et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ son espérance pour W_x vaut 1 (d'après (3)). La propriété de Markov (simple) de la famille $\{W_x,\ x \in \mathbb{R}^n\}$ implique alors que $\{R_t;\ t \geq o\}$ est une $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t \geq o}, W_x)$ martingale et la formule (4) définit bien des mesures de probabilités Q_x.

Pour démontrer la continuité de l'application $x \longrightarrow Q_x$ il nous suffit de fixer $t > o$ et Φ, $\mathcal{F}_t$-variable aléatoire uniformément continue, et de montrer que la fonction :

$$x \longrightarrow E_{W_x}\{\Phi R_t\} \tag{6}$$

est continue et bornée.

Pour ce faire soit $\{\varepsilon_k; k \geq 1\}$ une suite de nombres réels strictement positifs qui tendent vers o lorsque k tend vers l'infini. Le théorème de convergence dominée de Lebesgue nous donne :

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} E_x \{|\Phi \circ \Theta_{\varepsilon_k} - \Phi|^2\} = o$$

où pour tout $s \geq o$, θ_s est l'opérateur de translation usuel définit par

$(\theta_s \omega)(s') = \omega(s+s')$, $\omega \in \Omega$, $s' \geq o$.

ψ étant continue et strictement positive ψ^{-1} est localement bornée. De plus, ψ étant bornée, la relation (2) implique :

$$\lim_{k\to\infty} E_{W_x}\{(\Phi \circ \Theta_{\varepsilon_k}) R_t\} = E_{W_x}\{\Phi R_t\}$$

la limite étant uniforme en x sur tout borné de $\mathbb{R}^n$. Ainsi, la fonction (6) étant visiblement bornée, pour conclure il suffit de montrer que pour tout $\varepsilon > o$ la fonction :

$$x \longrightarrow E_{W_x}\{(\Phi \circ \Theta_\varepsilon) R_t\}$$

est continue. En fait nous avons (par la propriété de Markov) :

$$E_{W_x}\{(\Phi \circ \Theta_\varepsilon) R_t\} = E_{W_x}\{R_\varepsilon E_{W_{X_\varepsilon}} \{\Phi R_{t-\varepsilon}\}\}$$

et pour conclure il suffit de montrer que pour tout $\varepsilon > o$ et pour toute fonction mesurable bornée f, la fonction $x \longrightarrow E_{W_x}\{f(X_\varepsilon) R_\varepsilon\}$ est continue. Mais ce résultat est contenu dans [5, Proposition 3.3.]■

Théorème :

Si les conditions (a) *et* (b) *du paragraphe I sont satisfaites il existe une et une seule famille* $\{Q_x;\ x \in \mathbb{R}^n\}$ *de mesures de probabilité sur* $(\Omega, \mathcal{F})$ *qui satisfait :*

(i) - $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X_t, \Theta_t, Q_x)$ *est un processus de Markov fort.*

(ii) - pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ *nous avons :*

$$E_{Q_x}\{f(X_t)\} = f(x) - \int_o^t E_{Q_x}\{(Df)(X_s)\} ds \ . \qquad (7)$$

En fait le processus est fortement fellerien, récurrent, μ *est l'unique mesure invariante et la fonction* $x \longrightarrow Q_x$ *est continue pour la topologie de la convergence* *étroite*.

Démonstration :

ψ étant une fonction propre de H correspondant à la valeur propre o (en particulier ψ est dans le domaine de H), nous avons $-\frac{1}{2}\Delta\psi+V\psi = o$ au sens des distributions (voir [5. Proposition 4.1]) et donc :

$$V(x) = \frac{1}{2}(|\nabla h(x)|^2 - \Delta h(x))$$

pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$. (Rappelons que h est définie par $h=-\mathrm{Log}\ \psi$). Si nous reportons cette expression dans la définition de R_t nous obtenons :

$$R_t = \exp[-h(X_t) + h(X_o) - \frac{1}{2}\int_o^t |\nabla h(X_s)|^2 ds + \frac{1}{2}\int_o^t \Delta h(X_s)ds]$$

Des propriétés de ψ il suit que h est une fonction continue, que ses dérivées du premier ordre (au sens des distributions) sont dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}^n, dx)$ et que son laplacien (toujours au sens des distributions) est dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n, dx)$. Des résultats de G.Brosamler [4], récemment redécouverts par P.A.Meyer [13] et A.T.Wang [22], ou encore d'un travail récent de M.Fukushima [9], découle la possibilité d'appliquer la formule de Ito pour une telle fonction h. Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ nous avons :

$$R_t = \exp[-\int_o^t \langle\nabla h(X_s), dX_s\rangle - \frac{1}{2}\int_o^t |\nabla h(X_s)|^2 ds]$$

W_x-presque sûrement, ce qui implique par un argument devenu classique (voir par exemple [10], [20] ou encore [17]), que le processus $\{B_t; t \geq o\}$ défini par :

$$B_t = X_t - X_o + \int_o^t \nabla h(X_s)ds$$

est un $\{\mathcal{F}_t, Q_x\}$ -processus de mouvement brownien standard. Ainsi, $\{X_t; t \geq o\}$ considéré comme processus stochastique sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, Q_x)$, est solution de l'équation intégrale stochastique :

$$X_t = x + B_t - \int_o^t \nabla h(X_s)ds . \qquad (8)$$

Remarquons que dans la situation présente (8) n'est rien d'autre qu'une famille indexée par Ω d'équations intégrales ordinaires. De toute façon, pour toute $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ nous pouvons appliquer la formule de Ito classique qui nous donne Q_x-p.s.:

$$f(X_t)=f(X_o) + \frac{1}{2}\int_o^t \Delta f(X_s)ds - \int_o^t <\nabla f(X_s),dX_s> - \int_o^t \nabla h(X_s)\cdot\nabla f(X_s)\, ds$$

qui permet de prouver (7) en prenant l'espérance relativement à Q_x des deux membres. La propriété de Markov forte découle d'un argument classique (voir par exemple [15 p.425] pour le cas n=1) et l'unicité est une conséquence de la formule de Cameron-Martin [12].

μ est par construction invariante. μ est unique car sa densité est strictement positive. Le processus est récurrent car l'hypothèse a) faite sur V implique que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $t>o$, $-\infty < \int_o^t V(X_s)ds<+\infty$, ce qui implique que la densité R_t par rapport à la mesure de Wiener W_x est strictement positive, et parce que la mesure invariante μ est finie (voir par exemple [11]). Enfin la propiété de Feller forte est claire car si f est une fonction réelle sur $\mathbb{R}^n$, mesurable et bornée, nous avons déjà remarqué que, à cause de [5. Proposition 3.3], la quantité :

$$E_{Q_x}\{f(X_t)\} = E_{W_x}\{f(X_t)R_t\}$$

dépendait continuement de x. ∎

Par construction des mesures Q_x il est clair que le processus possède une densité de transition (par rapport à la mesure de Lebesgue) qui est définie par :

$$q_t(x,y) = \psi(y)\psi(x)^{-1}\, E_{W_x}\{\exp[-\int_o^t V(X_s)ds]\,|\,X_t = y\}p_t(x,y) \qquad (9)$$

où $p_t(x,y)$ est la fonction de transition du processus de mouvement brownien :

$$p_t(x,y) = (2\pi t)^{-n/2}\exp[-|x-y|^2/2t].$$

Vérifions que pour tout $t>o$ fixé, $q_t(x,y)$ est une fonction continue du couple (x,y). Pour ce faire il suffit de montrer que la fonction :

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ni (x,y) \longrightarrow E_{W_x}\{\exp[-\int_o^t V(X_s)ds]\,|X_t = y\}$$

est continue. La continuité étant une notion locale, nous pouvons supposer que x et y varient dans des bornés. La probabilité qu'une trajectoire partant de x, se trouvant en y à l'instant t, sorte, avant cet instant t d'une boule de rayon α, tend vers zéro lorsque α tend vers l'infini. Ainsi donc, nous pouvons (pour démontrer la continuité) supposer que $V \in L^p(\mathbb{R}^n, dx)$ pour un $p > \max\{1, n/2\}$. Il est alors facile de conclure en développant en série l'exponentielle et en vérifiant que la fonction:

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ni (x,y) \longrightarrow E_x\{(\int_0^t V(X_s)ds)^k | X_t = y\}$$

est continue et est majorée, uniformément en x et en y, par le terme général d'une série convergente. Cette majoration peut se faire par un calcul en tout point analogue à celui de [5.Theorem 2.1] . Ce calcul montre en outre qu'il existe deux constantes positives k_1 et k_2 vérifiant :

$$\forall t>0, \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall y \in \mathbb{R}^n, \quad q_t(x,y) \leqq k_1 e^{k_2 t} \psi(y)\psi(x)^{-1} p_t(x,y) \quad (10)$$

Non seulement l'estimation ponctuelle (10) montre que $q_t(x,y)$ est bornée si t et x restent dans des compacts, mais elle montre aussi que, toujours pour t et x variant dans des compacts, $q_t(x,y)$ est au pire majorée par la fonction de transition du mouvement brownien. Ceci donne directement des propriétés d'intégrabilité que l'on démontre usuellement avec un peu plus de travail (voir par exemple [16.Lemma 2]).

Si l'espace des états de notre processus était compact, la densité $q_t(x,y)$ convergerait quand t tend vers l'infini, uniformément en x et en y, vers la densité de la mesure invariante, à savoir $\psi(y)^2$, avec une vitesse exponentielle de convergence uniforme en x. Nous ne savons pas si ce résultat reste vrai dans notre cas.

Pour tout $t>0$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et pour toute fonction mesurable positive sur $\mathbb{R}^n$, posons :

$$[T_t f](x) = E_{W_x}\{f(X_t)\exp[-\int_0^t V(X_s)ds]\}$$

Cette formule définit en fait des opérateurs T_t qui envoient continuement $L^1(\mathbb{R}^n, dx)$ et $L^2(\mathbb{R}^n, dx)$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^n, dx)$ (voir [5. Proposition 3.1]), et considérés comme opérateurs sur $L^2(\mathbb{R}^n, dx)$, ces opérateurs constituent le semi-groupe dont le générateur infinitésimal est $-H$([5. Section 14.2]).

Soit $\{E_\lambda ;\ \lambda \geqq o\}$ la résolution de l'identité de H. Par le théorème spectral nous avons :

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}^n, dx),\quad \forall g \in L^2(\mathbb{R}^n, dx) \qquad \lim_{t\to\infty} (T_t f, g) = (f,\psi)(\psi,g)$$

où (,) désigne le produit scalaire dans $L^2(\mathbb{R}^n, dx)$. En effet :

$$(T_t f, g) = \int_o^{+\infty} e^{-\lambda t}\, dE_\lambda(f,g).$$

Si de plus o est isolé dans le spectre, il existe $\varepsilon > o$ pour lequel

$$(T_t f, g) - (f,\psi)(\psi,g) = \int_\varepsilon^{+\infty} e^{-\lambda t} dE_\lambda(f,g)$$

d'où l'on déduit :

$$|(T_t f, g) - (f,\psi)(\psi,g)| \leqq \|f\|_2 \|g\|_2 e^{-\varepsilon t}$$

où nous utilisons la notation $\|.\|_p$ pour désigner la norme de l'espace $L^p(\mathbb{R}^n, dx)$.

Si maintenant f et g sont des fonctions de $L^1(\mathbb{R}^n, dx)$, $T_1 f$ et $T_1 g$ sont dans $L^2(\mathbb{R}^n, dx)$ et donc, pour tout $t > o$ nous avons (en utilisant la même notation (,) pour désigner la dualité $\langle L^\infty(\mathbb{R}^n, dx),\ L^1(\mathbb{R}^n, dx)\rangle$) :

$$\begin{aligned}|(T_{t+2} f, g) - (f,\psi)(\psi,g)| &= |(T_t T_1 f, T_1 g) - (T_1 f,\psi)(\psi, T_1 g)| \\ &\leqq \|T_1\|_{1,2}^2\ e^{-\varepsilon t} \|f\|_1 \|g\|_1\end{aligned}$$

où $\|.\|_{p,q}$ désigne la norme des opérateurs de $L^p(\mathbb{R}^n, dx)$ dans $L^q(\mathbb{R}^n, dx)$. Ceci implique :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |[T_{t+2} f](x) - (f,\psi)\ \psi(x)| \leqq \|T_1\|_{1,2}^2\ e^{-\varepsilon t}\ \|f\|_1$$

Mais la quantité dont on prend le sup dans le premier membre est égale à :

$$E_{W_x}\{f(X_{t+2})\exp[-\int_o^{t+2} V(X_s)ds]\} - \psi(x) \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\psi(y)dy|$$

$$= |\int_{\mathbb{R}^n} f(y)[E_{W_x}\{\exp[-\int_o^{t+2} V(X_s)ds]\,|X_{t+2} = y\} p_{t+2}(x,y) - \psi(x)\psi(y)]dy|$$

ce qui montre que :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, y\in\mathbb{R}^n} \psi(x)|\psi(y)^{-1}\ q_{t+2}(x,y) - \psi(y)| \leqq \|T_1\|_{1,2}^2\ e^{-\varepsilon t},$$

et donc:
$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |q_{t+2}(x,y) - \psi^2(y)| \leqq \|\psi\|_\infty\ \psi(x)^{-1}\ \|T_1\|_{1,2}^2\ e^{-\varepsilon t}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $t > o$. Nous récapitulons les propriétés des densités de transition en une proposition.

Proposition:

Le processus possède une densité de transition $q_t(x,y)$ *qui, pour tout* $t>o$, *est une fonction continue en* (x,y). *Il existe deux constantes* k_1 *et* k_2 *qui vérifient*

$$\forall t>o,\quad \forall x\in R^n,\quad \forall y\in R^n,\qquad q_t(x,y) \leqq k_1 e^{k_2 t}\,\psi(y)\psi(x)^{-1}p_t(x,y).$$

Si de plus o *est isolé dans le spectre, il existe deux constantes strictement positives* ε *et* c *telles que:*

$$\sup_{y\in R^n} \left|q_t(x,y) - \psi(y)^2\right| \leqq c\psi(x)^{-1}e^{-\varepsilon t}$$

pour tout $t>o$ *et tout* $x\in R^n$. *Il y a donc convergence uniforme de la densité de transition vers la densité de la mesure invariante, la vitesse de convergence étant exponentielle uniformément en* x *sur tout borné.*

REFERENCES

[1] S.ALBEVERIO, R.HOEGH-KROHN and L.STREIT: Energy Forms,Hamiltonians and Distorted Brownian Paths. J.Math.Phys. 18 (1977) 907-917

[2] A.M.BERTHIER et B.GAVEAU: Critère de Convergence des Fonctionnelles de Kac et Application en Mécanique Quantique et en Géométrie. J.Funct.Analysis 29 (1978) 416-424.

[3] R.N.BHATTACHARYA: Criteria for Reccurence and Existence of Invariant Measures for Multidimensional Diffusions. Ann. Proba. 6 (1978) 541-553.

[4] G.BROSAMLER: Quadratic Variation of Potentials and Harmonic Functions. Trans. Amer. Math. Soc. 149 (1970) 243-257.

[5] R.CARMONA: Regularity Properties of Schrödinger and Dirichlet Semigroups. J. Funct. Analysis (à paraitre)

[6] W.G.FARIS: Self-Adjoint Operators. Lect. Notes in Math. # 433 (1975) Springer Verlag.

[7] M.FUKUSHIMA: On the Generation of Markov Processes by Symmetric Forms. Proc. 2nd Japan-USSR Symp. Proba. Theory. Lect. Notes in Math. # 330 (1973) 46-79 Springer Verlag.

[8] M.FUKUSHIMA: Local Properties of Dirichlet Forms and Continuity of Sample Paths. Z. Wahrscheinlich. verw. Gebiete 29 (1974) 1-6.

[9] M.FUKUSHIMA: Dirichlet Spaces and Additive Functionals of Finite Energy. Conf. Inter. Math. Helsinki (1978)

[10] I.V.GIRSANOV: On Transforming a Class of Stochastic Processes by Absolutely Continuous Substitution of Measures. Theor. Prob. Appl. 5 (1960) 285-301.

[11] R.Z.KHASMINSKII: Ergodic Properties of Reccurent Diffusion Processes and Stabilization of the Solution to the Cauchy Problem for Parabolic Equations. Theor. Prob. Appl. 5 (1960) 179-196.

[12] H.P.Mc KEAN: Stochastic Integrals. Academic Press (1969).

[13] P.A.MEYER: La Formule de Ito pour le Mouvement Brownien d'apres G.Brosamler. Sem. Proba. Strasbourg 1976-77 Lect.Notes in Math. # 649 (1978) 763-769 Springer Verlag.

[14] E.NELSON: Dynamical Theories of Brownian Motion. Princeton Univ. Press (1967)

[15] S.OREY: Conditions for the Absolute Continuity of two Diffusions. Trans. Amer. Math. Soc. 193 (1974) 413-426.

[16] N.I.PORTENKO: Diffusion Processes with Unbounded Drift Coefficient. Theor. Prob. Appl. 20 (1975) 27-37.

[17] P.PRIOURET et M.YOR: Processus de Diffusion à Valeurs dans $\mathbb{R}$ et Mesures Quasi -invariantes sur $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Astérisque 22-23 (1975) 247-290.

[18] B.SIMON: Quantum Mechanics for Hamiltonians Defined as Quadratic Forms. Princeton Series in Physics (1971) Priceton Univ. Press.

[19] B.SIMON: Functional Integration and Quantum Mechanics. Academic Press (livre à paraitre).

[20] D.W.STROOCK and S.R.S.VARADHAN: Diffusion Processes with Continuous Coefficients. Comm. Pure Appl. Math. 22 (1969) 345-400.

[21] C.TUDOR: Diffusions avec Explosion Construites à l'aide des Martingales Exponentielles. Rev. Roum. Math. Pures et Appl. 20 (1975) 1187-1199.

[22] A.T.WANG: Generalized Ito's Formula and Additive Functionals of Brownian Motion. Z.Wahrscheinlich. verw. Gebiete 41 (1977) 153-159.

René CARMONA

Département de Mathématiques
Université de Saint-Etienne
23 rue du Docteur P.Michelon
42100 SAINT ETIENNE