

# SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

PAUL-ANDRÉ MEYER

## Caractérisation des semimartingales, d'après Dellacherie

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 13 (1979), p. 620-623

[http://www.numdam.org/item?id=SPS\\_1979\\_\\_13\\_\\_620\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SPS_1979__13__620_0)

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

CARACTERISATION DES SEMIMARTINGALES, D'APRES DELLACHERIE  
par P.A. Meyer

Soit  $(\Omega, \underline{\mathbb{F}}, P, (\underline{\mathbb{F}}_t))$  un espace probabilisé filtré satisfaisant aux conditions habituelles. Nous désignons par  $\underline{\mathbb{B}}$  l'espace des processus prévisibles élémentaires : un processus  $(H_t)_{t \geq 0}$  appartient à  $\underline{\mathbb{B}}$  si et seulement s'il peut s'écrire

$$(1) \quad H = H_0 I_{]0, t_1]} + H_1 I_{]t_1, t_2]} + \dots + H_{n-1} I_{]t_{n-1}, t_n]}$$

avec  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < +\infty$ , les  $t_i$  étant des rationnels dyadiques, et  $H_i$  étant pour tout  $i$  une v.a.  $\underline{\mathbb{F}}_{t_i}$ -mesurable bornée.

Soit  $X$  un processus adapté<sup>1</sup>, continu à droite et nul en 0. Etant donné  $H \in \underline{\mathbb{B}}$ , la variable aléatoire

$$(2) \quad J(H) = H_0 X_{t_1} + H_1 (X_{t_2} - X_{t_1}) + \dots + H_{n-1} (X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$$

i.e. l'intégrale stochastique évidente  $\int_0^\infty H_s dX_s$ , ne dépend pas de la représentation (1) choisie pour  $H$ , et  $J$  définit évidemment une application linéaire de  $\underline{\mathbb{B}}$  dans l'espace  $L^0$  de toutes les v.a. p.s. finies sur  $\Omega$ , muni de la topologie de la convergence en probabilité ( $L^0$  est un e.v.t. métrisable complet, non localement convexe). Notre but est de démontrer le théorème suivant, dû à Dellacherie (avec l'aide de Mokobodzki pour une étape essentielle).

THEOREME 1. Supposons que  $J$  possède la propriété suivante

$$(a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour toute suite } (H^n) \text{ d'éléments de } \underline{\mathbb{B}}, \text{ nuls hors d'un intervalle} \\ [0, N] \text{ fixe de } \mathbb{R}_+, \text{ et convergeant uniformément vers } 0, \text{ on a} \\ \lim_n J(H^n) = 0 \text{ dans } L^0. \end{array} \right.$$

Alors  $X$  est une semimartingale.

Avant de démontrer ce théorème, nous allons le commenter. Tout d'abord, il justifie a posteriori la définition des semimartingales, et suggère une nouvelle approche <<pédagogique>> de toute la théorie de l'intégrale stochastique. Dellacherie a fait un premier essai dans cette direction dans l'article qu'il a envoyé aux Actes du Congrès d'Helsinki.

Ensuite, ce théorème caractérise les semimartingales : on a en effet, dans l'autre sens, le résultat suivant :

(b) Pour toute suite  $(H^n)$  d'éléments de  $\underline{B}$ , majorés en valeur absolue par une même constante, nuls hors d'un intervalle fixe  $[0, N]$ , et convergeant simplement vers 0, on a  $\lim_n J(H^n) = 0$  dans  $L^0$ .

On notera que (b) est une propriété du type de Daniell, tandis que (a) est plutôt du type de Riesz. Rappelons rapidement comment on établit (b) : cette propriété est invariante lorsqu'on remplace  $P$  par une loi équivalente  $Q$ . D'après un théorème de Stricker ([3]), on peut choisir  $Q$  de telle sorte que  $X$  soit, sur  $[0, N]$ , la somme d'une martingale de carré intégrable et d'un processus croissant intégrable, pour lesquels la propriété (b) est alors évidente.

Enfin, disons que le théorème 1 a été suggéré à Dellacherie par la lecture de l'article [2] de Métivier-Pellaumail, le premier sans doute à considérer l'« horrible » espace  $L^0$  comme un objet digne d'intérêt dans la théorie de l'intégrale stochastique. La première version du théorème utilisait une propriété du type (b) ; c'est la discussion au séminaire qui a montré que (a) suffisait, et que la démonstration était même plus simple ! On trouvera cette démonstration ci-dessous. Un peu plus tard, G. Letta lui a apporté quelques simplifications importantes. Dellacherie devait rédiger cette démonstration « définitive », mais cela n'a pas été fait, car elle figure en détails dans le Lecture Notes à paraître de Jacod « Calcul stochastique et problèmes de martingales ». Il nous a semblé à tous deux que la première démonstration possède quelque intérêt propre, et mérite d'être publiée<sup>1</sup>.

#### DEMONSTRATION DU THEOREME 1.

1) Il nous suffit de montrer que, pour tout  $N$  fini, le processus arrêté  $X^N$  est une semimartingale. Sans changer de notation, nous remplaçons donc  $X$  par  $X^N$ . L'application  $J$  est alors continue de  $\underline{B}$ , muni de la norme de la convergence uniforme, dans  $L^0$ . Nous désignons par  $B$  la boule unité de  $\underline{B}$ , par  $A$  l'image  $J(B)$ .

2) L'énoncé du théorème 1 est invariant par changement de loi dans la classe d'équivalence de  $P$ . Sans changer de notation, nous remplaçons donc  $P$  par une loi équivalente, telle que toutes les v.a.  $X_t$  ( $t$  dyadique) soient intégrables [ la possibilité d'un tel choix est facile à établir ; voir par exemple [1] ]. Nous avons alors  $A \subset L^1$ .

Nous prenons comme système fondamental de voisinages de 0 dans  $L^0$  les ensembles

$$(3) \quad V_\varepsilon = \{ f : \|f\|_0 < \varepsilon \} \quad \text{où} \quad \|f\|_0 = E[|f| \wedge 1]$$

1. Par exemple, afin de mieux faire connaître le lemme de Cartier.

3) Nous allons construire une loi  $Q$ , équivalente à  $P$ , majorée par un multiple de  $P$  ( de sorte que  $A \subset L^1(Q)$  ), et telle que

$$(4) \quad \sup_{f \in A} \int f Q = \alpha < +\infty \quad (\text{prenant } f=0, \text{ on voit que } \alpha \geq 0)$$

Cela suffira. En effet, prenons dans l'expression (1)

$$H_i = \text{signe de } E_Q[X_{t_{i+1}} - X_{t_i} | \mathbb{F}_{t_i}]$$

et prenons  $f=J(H)$ . Alors

$$\int f Q = E_Q \left[ \sum_i |E_Q[X_{t_{i+1}} - X_{t_i} | \mathbb{F}_{t_i}]| \right] \leq \alpha \quad (\text{indépendant de la subdivision } (t_i))$$

et l'on voit que  $X$  est une quasimartingale pour la loi  $Q$ , donc une semimartingale pour  $Q$ , et finalement une semimartingale pour  $P$  [ Plus précisément, le processus  $(X_t)$  pour  $t$  dyadique est une quasimartingale, et il faut un petit argument pour étendre cela aux  $t$  réels, grâce à la continuité à droite de  $X$  ].

4) En fait, nous allons construire une version approchée de (4) : pour tout  $\varepsilon > 0$ , une mesure  $Q = Q_\varepsilon$ , majorée par  $P$ , telle que  $Q(\Omega) \geq 1 - \varepsilon$  et que

$$(5) \quad \sup_{f \in A} \int f Q = \alpha_\varepsilon < +\infty$$

Nous en déduirons (4) en prenant  $Q = \sum_n \lambda_n Q_{1/n}$ , où les constantes  $\lambda_n > 0$  sont telles que  $\sum \lambda_n Q_{1/n}$  soit une loi de probabilité ( comme  $Q_{1/n}(\Omega) > 1 - 1/n$ ,  $\sum \lambda_n = \lambda < \infty$ , et  $Q$  est majorée par  $\lambda P$  ) et que  $\sum \lambda_n \alpha_{1/n} = \alpha < \infty$ .  $Q$  est équivalente à  $P$  : en effet, écrivons  $Q_{1/n} = g_n \cdot P$ ,  $Q = g \cdot P$  ; la condition  $Q_{1/n}(\Omega) \geq 1 - 1/n$  entraîne  $P\{g_n = 0\} \leq 1/n$  puisque  $g_n \leq 1$ , et enfin  $P\{g = 0\} = 0$ . Enfin, on a pour  $f \in A$ , par convergence dominée relativement à  $P$

$$\int f Q = \int f g P = \sum \lambda_n \int f g_n P \leq \sum \lambda_n \alpha_{1/n} = \alpha$$

5) Nous fixons donc  $\varepsilon > 0$ , et désignons par  $K$  l'ensemble des mesures positives  $Q$ , majorées par  $P$  et telles que  $Q(\Omega) \geq 1 - \varepsilon$ . Si nous considérons  $K$  comme une partie de  $L^\infty$  munie de la topologie faible  $\sigma(L^\infty, L^1)$ ,  $K$  est convexe et compacte.

L'application  $J$  étant continue de  $\underline{B}$  dans  $L^0$ , il existe un voisinage de  $0$  dans  $\underline{B}$  dont l'image est contenue dans  $V_\varepsilon$ . Autrement dit, si  $\alpha > 0$  est assez grand,  $\frac{1}{\alpha} A \subset V_\varepsilon$ , soit

$$\text{pour } f \in A, \text{ on a } E \left[ \frac{1}{\alpha} |f| \wedge 1 \right] \leq \varepsilon, \text{ donc } P\{|f| > \alpha\} \leq \varepsilon$$

Prenons alors  $Q_f = I_{\{|f| \leq \alpha\}} P$ . Nous avons  $Q_f \in K$ , et  $\int f Q_f \leq \alpha$ . Identifions  $f \in A$  à la fonction ( affine ) continue  $Q \mapsto \int f Q$  sur  $K$ , et utilisons le lemme de Cartier que voici :

LEMME. Soit K un espace compact, et soit A un ensemble convexe de fonctions continues sur K. Supposons que

(6) pour tout  $f \in A$  il existe  $Q \in K$  tel que  $f(Q) \leq \alpha$

Alors il existe une loi de probabilité  $\mu$  sur K telle que

pour tout  $f \in A$ ,  $\int f(Q) \mu(dQ) \leq \alpha$ .

La démonstration est donnée plus loin. Ici, K est convexe compact, et toute  $f \in A$  est affine continue, donc si Q est la résultante de  $\mu$ , on a  $f(Q) \leq \alpha$  pour tout  $f \in A$ , et le théorème 1 est établi.

DEMONSTRATION DU LEMME. Nous prenons  $\alpha=1$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . D'après (6), la fonction constante  $1+\varepsilon$  n'appartient pas à l'adhérence de l'ensemble convexe  $A - \underline{C}^+(K)$ . D'après le théorème de Hahn-Banach, il existe une mesure (signée)  $\mu_\varepsilon$  sur K telle que

(7)  $\sup_{f \in A, g \in \underline{C}^+(K)} \mu_\varepsilon(f-g) \leq (1+\varepsilon) \mu_\varepsilon(1)$

Remplaçant g par  $tg$  ( $t \in \mathbb{R}_+$ ) et faisant tendre t vers  $+\infty$ , on voit que  $\mu_\varepsilon(g) \geq 0$ ; donc  $\mu_\varepsilon$  est positive. Nous pouvons alors supposer que  $\mu_\varepsilon(1)=1$ , et (7) nous donne, lorsque  $g=0$

$$\sup_{f \in A} \mu_\varepsilon(f) \leq 1+\varepsilon$$

Il ne reste plus qu'à prendre pour  $\mu$  une valeur d'adhérence vague de  $\mu_\varepsilon$  lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

#### REFERENCES.

- [1]. C. DELLACHERIE. Quelques applications du lemme de Borel-Cantelli à la théorie des semimartingales. Sémin. Prob. XII, p. 742-745, Lect. Notes 649, Springer 1978.
- [2]. M. METIVIER et J. PELLAUMAIL. Mesures stochastiques à valeurs dans les espaces  $L^0$ . ZfW 40, 1977, p. 101-114.
- [3]. C. STRICKER. Quasimartingales, martingales locales, semimartingales et filtration naturelle. ZfW 39, 1977, p. 55-64.