JACQUES AZÉMA
MARC YOR

Le problème de Skorokhod : compléments à l'exposé précédent

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 13 (1979), p. 625-633
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1979__13__625_0>

LE PROBLEME DE SKOROKHOD : COMPLEMENTS A L'EXPOSE PRECEDENT *

par Jacques Azéma et Marc Yor

Dans l'exposé précédent, l'hypothèse "μ a un moment du second ordre" est inutile pour construire le temps d'arrêt $T = \inf\{t \; ; \; S_t \geq \psi_\mu(X_t)\}$ et pour montrer que X_T a pour loi μ. L'hypothèse plus faible "μ a un moment d'ordre 1 et est centrée" suffit. Dans ce cas on ne peut évidemment pas espérer conserver l'intégrabilité de T, mais on montre au premier paragraphe de cet article que la martingale $(X_{t \wedge T})$ reste uniformément intégrable, ce qui avait été conjecturé par N.Falkner.

Au second paragraphe, on montre que la variable aléatoire $S_T = \sup_s X_{s \wedge T}$ est intégrable si et seulement si $\int_0^\infty t \log^+ t \, d\mu(t) < \infty$.

Remarquons qu'il s'agit d'une équivalence "one-sided", c'est-à-dire ne portant que sur le processus $(X^+_{t \wedge T})$, et sur $\mu|_{[0,\infty[}$ (i.e : sur X^+_T). En outre, ce résultat permet de donner des exemples simples de martingales uniformément intégrables continues qui ne sont pas dans H^1. Le fait qu'une martingale uniformément intégrable puisse être "grande" ne doit donc rien aux sauts et apparaît déjà dans le mouvement brownien. A y réfléchir de près, le résultat signalé au début du second paragraphe est un peu étonnant ; on sait bien, en effet, que si l'on quitte le domaine des martingales continues positives, H^1 ne se réduit pas à $L \log L$. Cette contradiction apparente est éclairée par un résultat d'extrémalité concernant le temps d'arrêt T qui nous a été suggéré par la lecture d'un travail récent de Dubins et Gilat [2] . Parmi tous les temps d'arrêt τ tels que la martingale $(X_{t \wedge \tau})$ soit uniformément

---

* voire "Une solution simple au problème de Skorokhod", page 90

intégrable et ait pour loi terminale μ, le temps T maximise en loi la variable aléatoire S_τ . Ce résultat est énoncé précisément au paragraphe 3.

1) Sur l'intégrabilité uniforme de la martingale $(X_{t\wedge T})$

THEOREME 1.1. Supposons que μ admette un moment d'ordre 1 et soit centrée ; la martingale $(X_{t\wedge T})$ est alors uniformément intégrable.

Pour montrer ce théorème, nous aurons besoin de reprendre l'approximation faite dans la démonstration du théorème 3.4 de[1]. Rappelons que l'on a construit une suite (μ_n) de mesures à support compact vérifiant

$$\psi_{\mu_n}(x) = \psi_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq -n \\ \psi_\mu(x) \text{ si } -n<x\leq n \\ \psi_\mu(n) \text{ si } n<x\leq \psi_\mu(n) \\ x \text{ si } x > \psi_\mu(n) \end{cases}$$

On a de plus la relation $\bar{\mu}_n(x) = \dfrac{\bar{\mu}(x)}{\bar{\mu}(-n)}\left(\dfrac{n}{\psi_\mu(-n)+n}\right)$ si $-n < x \leq n$

On a alors le lemme suivant

LEMME 1.2. Soit $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction convexe, nulle à l'origine, telle que $\int h(|t|)d\mu(t) < \infty$;

Alors $\lim\limits_{n\to\infty} \int h(|t|)d\mu_n(t) = \int h(|t|)d\mu(t)$

Démonstration(*). On sait que μ_n vérifie l'équation différentielle $d\mu_n = \dfrac{\bar{\mu}_n(x)}{\psi_n(x_+)-x} d\psi_n(x)$ sur l'intervalle $]-\infty,\psi(n)[$; on peut donc écrire

---

(*) Dans tout cet article, on ne fera les démonstrations que dans le cas où $\mu[x,\infty[>0\ \forall x$; le cas où μ est à support compact, ne fait qu'ajouter quelques complications techniques sans intérêt.

$$\int h(|t|)d\mu_n(t) = \int_{[-\infty,\psi(n)]} h(|t|)\, \frac{\bar{\mu}_n(t)}{\psi_n(t_+)-t}\, d\psi_n(t) + h[\psi(n)]\mu_n[\psi(n)]$$

$$= h(n)\frac{\psi((-n)_+)}{\psi((-n)_+)+n} + \int_{]-n,+n]} h(|t|)\frac{n}{\bar{\mu}(-n)[\psi(-n)+n]}\, d\mu(t)$$

$$+ \; h[\psi(n)]\, \frac{\bar{\mu}(n)}{\bar{\mu}(-n)}\, \frac{n}{\psi(-n)+n}$$

Le premier terme du second membre est équivalent, quand $n \to +\infty$, à $\frac{h(n)}{n}\int_{]-\infty,-n]} t d\mu(t)$, expression que l'on peut majorer, compte tenu de la croissance de $\frac{h(x)}{x}$, par $\int_{]-\infty,-n]} \frac{h(|t|)}{|t|}\, |t| d\mu(t)$, qui tend vers zéro, lorsque $(n \to \infty)$.

Le second terme converge vers $\int h(|t|)d\mu(t)$, et le troisième est équivalent à $\bar{\mu}(n)\, h\left(\frac{1}{\bar{\mu}(n)} \int_{[n,\infty[} t d\mu(t)\right)$, expression que l'on majore, grâce à l'inégalité de Jensen par $\int_{[n,\infty[} h(t)d\mu(t)$, qui tend vers zéro.

Démonstration du théorème 1.1 : Les mesures (μ_n) étant à support compact, les temps d'arrêt $T_n = T_{\mu_n}$ (qui croissent vers T) réduisent la martingale $(X_{t \wedge T})$. Une condition nécessaire et suffisante pour que celle-ci soit uniformément intégrable est donc que les variables $(|X_{T_n}|, n \in \mathbb{N})$ soient uniformément intégrables.

Or, d'après le lemme précédent appliqué à la fonction $h(x)=|x|$, on a :

$\lim_{n\to\infty} E|X_{T_n}| = E|X_T|$. Les variables positives $(|X_{T_n}|, n \in \mathbb{N})$ convergeant

p.s vers $|X_T|$, il est alors classique qu'elles convergent également

dans L^1 vers $|X_T|$, et sont donc uniformément intégrables.

$(X_{t\wedge T})$ étant une martingale uniformément intégrable, on peut montrer le :

Corollaire 1.3. Si μ admet un moment d'ordre 1, et est centrée, alors:

1) pour tout $p < 1$, $E[\sup_t |X_{t\wedge T}|^p] \leq \frac{2}{1-p} \left(\int |x| d\mu(x)\right)^p$

2) $E[\sup_t |X_{t\wedge T}|] \leq \frac{e}{e-1} \left(1 + \int |x| \log^+ |x| d\mu(x)\right)$

3) pour tout $p > 1$, $\int |x|^p d\mu(x) \leq E[\sup_t |X_{t\wedge T}|^p] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int |x|^p d\mu(x)$

Démonstration :

1) D.Lépingle a montré en[4] que, pour toute surmartingale $Y \geq 0$, on a :
$E[\sup_t Y_t^p / \mathcal{F}_0] \leq \frac{1}{1-p} Y_0^p$, pour tout $p \in]0,1[$. On applique cela à
$(Y_t^{(1)} = E(X_T^+ | \mathcal{F}_t))$ et $(Y_t^{(2)} = E(X_T^- | \mathcal{F}_t))$.

2) et 3) découlent des inégalités de Doob dans L^p $(p \geq 1)$ appliquées à $(X_{t\wedge T})$.

D'après les inégalités de Burkholder-Davis-Gundy, on a aussi :
si $\mu \in L\log L$, alors $E(\sqrt{T})$ est fini ; de même, μ admet un moment d'ordre $p \in]1,\infty[$ si, et seulement si, T admet un moment d'ordre $(p/2)$. On retrouve le cas du problème de Skorokhod proprement dit pour $p=2$.

2) Sur l'intégrabilité de S_T.

On dispose de la loi de S_T grâce à la proposition 3.6 de [1]. Dans le lemme qui suit nous allons donner une autre caractérisation de cette loi.

Voici d'abord quelques définitions.

On pose $\hat{\mu} = 1 - \bar{\mu} = \mu\,]-\infty,x[$ ($\hat{\mu}$ est continue à gauche)

$f(u) = \inf\{s \;;\; \hat{\mu}(s) \geq u\}$ (f est l'"inverse" continue à gauche de $\hat{\mu}$; elle est définie sur $[0,1]$).

$$H(t) = \frac{1}{1-t}\int_t^1 f(s)ds \quad (0 \leq t < 1);$$ H est continue sur $[0,1[$.

Si enfin λ désigne la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$, on pose $\mu^* = H(\lambda)$, et l'on a le lemme suivant

LEMME 2.1. La loi de S_T est μ^*

Démonstration : On montre facilement que H majore f, est croissante, et vérifie $H(o) = o$. H et f sont liées par l'équation différentielle $dt\,[H(t) - f(t)] = (1-t)dH(t)$, de sorte que l'on peut écrire si $o \leq x \leq 1$

$$(1-x) = \exp\left(-\int_0^x \frac{dH(s)}{H(s)-f(s)}\right)$$

Posons $K(u) = \inf\{t \;;\; H(t) \geq u\}$. On a

$$\lambda\{t \;;\; H(t) \geq x\} = 1-K(x) = \exp\left(-\int_0^{K(x)} \frac{dH(s)}{H(s)-f(s)}\right) = \exp\left(-\int_0^x \frac{ds}{s-f(K(s))}\right)$$

Il reste alors à remarquer que $H \circ \hat{\mu} = \psi$, de sorte que $\Phi = f \circ K$; on a donc

$$\mu^*[x,\infty[= \exp\left(-\int_0^x \frac{ds}{s-\Phi(s)}\right) = P[S_T \geq x],$$ CQFD.

Une fois le lemme 2.1 établi, le théorème suivant apparaît comme une variation (minime) sur le thème des inégalités maximales de Hardy-Littlewood [3].

THEOREME 2.2.

1) S_T est intégrable si, et seulement si $\int_0^\infty t\log^+ t\, d\mu(t) < \infty$

2) Pour tout $p > 1$, S_T^p est intégrable si, et seulement si, $\int_0^\infty t^p d\mu(t) < \infty$

Démonstration : 1) Remarquons tout d'abord que, pour tout $\alpha \in]o,1[$ tel que $f(\alpha) \geq o$, on a l'équivalence :

$$\int_0^\infty t\log^+ t d\mu(t) < \infty \iff \int_\alpha^1 f(t)\log^+ f(t)dt < \infty$$

Calculons maintenant $E[S_T]$; on a d'après le lemme 2.1

$$E[S_T] = \int_0^\infty x\, d\mu^*(x) = \int_0^1 H(t)dt = \int_0^1 \frac{ds}{1-s} \int_s^1 f(u)du = \int_0^1 f(u)\log \frac{1}{1-u}\, du,$$

et l'on observe que le problème de la convergence de cette intégrale ne se pose qu'au voisinage de 1.

Supposons tout d'abord ES_T fini, ou encore $\int_0^1 dsf(s)\log \frac{1}{1-s} < \infty$; on peut écrire

$$\lim_{v\to\infty} v(1-\hat{\mu}(v)) \leq \lim_{v\to\infty} \int_{[v,\infty)} ud\mu(u) = o$$

On a donc $\overline{\lim_{t\to 1}} (1-t)f(t) \leq \overline{\lim_{t\to 1}} f(t)[1-\hat{\mu}(f(t)] = \lim_{v\to\infty} v(1-\hat{\mu}(v)) = o$

Pour t assez voisin de 1, $f(t)$ est donc majoré par $\frac{1}{1-t}$; il en résulte que l'intégrale $\int_\alpha^1 f(s)\log^+ f(s)ds$ est convergente.

Inversement, supposons $\int_\alpha^1 f(s)\log^+ f(s)ds < \infty$; de l'inégalité classique

$a\log b \leq a\log a + b/_e$ on tire l'inégalité $a\log b \leq 2a\log a + \frac{2\sqrt{b}}{e}$, et

l'on peut écrire

$$\int_\alpha^1 f(s)\log\frac{1}{1-s}\,ds \leq 2\int_\alpha^1 f(s)\log f(s)ds + \frac{2}{e}\int_\alpha^1 \frac{ds}{\sqrt{1-s}} < +\infty$$

2) Soit $p > 1$. La fonction f est positive sur un intervalle $[\alpha,1]$.

On en déduit l'équivalence : $E[S_T^p] < \infty \Longleftrightarrow \int_\alpha^1 dt\left(\frac{1}{1-t}\int_t^1 f(s)ds\right)^p < \infty$

- Supposons $E[S_T^p] < \infty$; La fonction f étant croissante, on a :

$\int_\alpha^1 dt\, f(t)^p < \infty$, ce qui, par changement de variable entraîne :

$$\int_0^\infty x^p d\mu(x) < \infty$$

- Inversement, on suppose $\int_0^\infty x^p d\mu(x) < \infty$, ce qui équivaut à :

$\int_\alpha^1 f(t)^p\, dt < \infty$, et le résultat cherché découle alors de l'inégalité de

Hardy-Littlewood dans L^p, appliquée à $\phi = f\, 1_{[\alpha,1]}$.

(L'inégalité en question est : pour tout $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}_+$,

$$(H.L)_p : \int_0^1 dt\left(\frac{1}{1-t}\int_t^1 \phi(s)ds\right)^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^1 dt\,\phi(t)^p)$$

3) Une propriété d'extrémalité.

Dubins et Gilat [2] viennent de montrer qu'il existe une relation entre l'application : $\mu \to \mu^*$ introduite au début du §2 et la théorie des martingales. Ils ont établi le résultat suivant : si on ordonne partiellement l'ensemble des probabilités sur $\mathbb{R}$ par la relation $\gamma \leq \gamma' \Longleftrightarrow \bar{\gamma} \leq \bar{\gamma}'$, alors, pour toute probabilité μ admettant un moment d'ordre 1, l'ensemble $M(\mu)$ des probabilités qui sont distribution du suprémum (essentiel) d'une martingale uniformément intégrable dont la variable aléatoire terminale a pour loi μ, admet μ^* pour borne supérieure. De plus ils exhibent une martingale (discontinue) qui permet de montrer que $\mu^* \in M(\mu)$.

Qu'apporte à ce théorème la construction que nous avons proposée ? Essentiellement que la borne supérieure μ^* de $M(\mu)$ peut être atteinte par une martingale continue. On peut alors, en suivant toujours [2], montrer que les inégalités de Doob sont "sharp", même si l'on s'astreint à rester dans le cadre des martingales continues.

Inversement, grâce au résultat de Dubins et Gilat, on peut énoncer la propriété suivante de notre solution du problème de Skorokhod : si μ est une mesure centrée admettant un moment d'ordre 1 et si τ est un autre temps d'arrêt tel que

a) $P[X_\tau \in dx] = \mu(dx)$

b) $(X_{\tau \wedge t})$ est uniformément intégrable

alors $P[S_T \geq x] \geq P[S_\tau \geq x]$

Commentaire final. Il nous semble important de souligner les conséquences de la Note de Dubins et Gilat [2] :

(i) L'appartenance de μ^* à $M(\mu)$ permet de déduire les inégalités de Hardy-Littlewood [3] de celles de Doob.

(ii) Savoir que μ^* est la borne supérieure de $M(\mu)$ permet de déduire les inégalités de Doob de celles de Hardy-Littlewood.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.AZEMA et M.YOR : Une solution simple au problème de Skorokhod (dans ce volume)

[2] L.E.DUBINS and D.GILAT : On the distribution of maxima of martingales. Proc. of the A.M.S. Vol 68,3, 337-338, 1978

[3] G.H.HARDY and J.E.LITTLEWOOD : A maximal theorem with function - theoretic applications, Acta Math. 54, 81-116, 1930.

[4] D.LEPINGLE : Quelques inégalités concernant les martingales. Studia Math. T LIX, p.63-83 (1976)