SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

NICOLE EL KAROUI

À propos de la formule d'Azéma-Yor

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 13 (1979), p. 634-641

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1979__13__634_0>

Université de Strabourg
Séminaire de Probabilités 1977/78

A PROPOS DE LA FORMULE D'AZEMA-YOR

par Nicole El-Karoui

Cette note, rédigée après la lecture des résultats de Stricker, Yor, Meyer-Stricker-Yor contenus dans ce volume, donne une nouvelle démonstration du résultat obtenu par Stricker dans le cas progressif, et une décomposition complète des semi-martingales considérées. Elle contient aussi une interprétation un peu différente de la formule principale.

Les notations sont celles de l'exposé de ce volume <u>temps local et balayage des semimartingales</u> (référence [1] de la bibliographie), à une exception près : nous donnons aux notations τ_t, ℓ_t la même signification que chez Stricker, Yor, Meyer... Rappelons les rapidement.

H est un ensemble aléatoire optionnel fermé ; $D_t = \inf\{s>t : s\in H\}$; $\tau_t = \sup\{s<t : s\in H\}$. X est une semi-martingale appartenant à $\underline{\underline{H}}^1$, de décomposition canonique X=M+V, telle que $X_{D_t}=0$ pour tout t, sur $\{D_t<\infty\}$.

On peut supprimer toutes les difficultés relatives à 0 en faisant les conventions suivantes[1]: $X_t=0$, $\underline{\underline{F}}_t=\underline{\underline{F}}_0$ pour $t<0$ (alors $M_t=0$ pour $t\leq 0$, $V_t=0$ pour $t<0$), et que $]-\infty,0]$ est contenu dans H . Les intégrales stochastiques notées $\int^t$ sont relatives à un intervalle $]a,t]$ avec $t\geq 0$, $a<0$ (le choix de a est indifférent).

Il est bien connu que pour $X\in\underline{\underline{H}}^1$, la variable aléatoire

$$\Sigma_s \, 1_{\{X_{s-}=0\}}|X_s|$$

est intégrable. On en déduit sans peine (cf. [1]) que les v.a.

$$\Sigma_{g\in H^{\rightarrow}} |X_{D_g}-X_g| \quad , \quad \Sigma_{g\in H^{\rightarrow}} |M_{D_g}-M_g|$$

sont intégrables. Nous désignons par K le processus à variation intégrable non adapté

$$(1) \qquad K_t = \Sigma_{g\in H^{\rightarrow},\ g\leq t} (M_{D_g}-M_g)$$

et l'on montre dans [1] (corollaire 4) que la projection duale optionnelle de K est $\frac{1}{2}\int^t 1_{\{\tau_s=s\}}(dL_s^0(X)-dL_s^0(-X))$.

Ces rappels étant faits, on a le lemme suivant :

LEMME. Soit Z un processus progressif borné, et soit Z*K l'intégrale de Stieltjes de Z par rapport à K.

---

1. Comme $X\in\underline{\underline{H}}^1$, X a une limite à l'infini, que nous notons X_∞ .

1) $(Z*K)^{o}$ est un processus à variation intégrable continu porté par $\{ s : \tau_s = s\}$.

2) Le processus $\widetilde{(Z*K)}^{o} = Z*K - (Z*K)^{o}$ est une $\underline{\underline{F}}_{D_t}$-martingale égale à Y_{D_t}, où

(2) $$Y_t = \int^t Z_{\tau_s} 1_{\{\tau_s < s\}} dM_s$$

cette dernière expression ayant un sens, car le processus $Z_{\tau_s} 1_{\{\tau_s<s\}}$ est prévisible.

Preuve. Il est clair que $Z*K$ est à variation intégrable. Si T est un temps d'arrêt de la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$, l'événement $\{T\in H^{\rightarrow}\}$ appartient à $\underline{\underline{F}}_T$ et l'on a, M étant une martingale, et Z_T étant $\underline{\underline{F}}_T$-mesurable

$$E[\Sigma_{g\in H^{\rightarrow}} 1_{\{g=T\}} Z_g(M_{D_g}-M_g)] = E[1_{\{T\in H^{\rightarrow}\}} Z_T(M_{D_T}-M_T)1_{\{T<\infty\}}]=0$$

Remplaçant T par T_A ($A\in\underline{\underline{F}}_T$) on voit que la mesure associée à $(Z*K)^{o}$ ne charge pas le graphe $[T]$, donc $(Z*K)^{o}$ est continu en T. L'ensemble optionnel H portant $Z*K$ porte aussi $(Z*K)^{o}$; comme $(Z*K)^{o}$ est continu d'après ce qui précède, il est porté par $\{\tau_s=s\}$, qui ne diffère de H que par un ensemble à coupes dénombrables.

Soit $A\in\underline{\underline{F}}_{D_s}$; le processus $1_A 1_{\{D_s \leq t\}}$ étant optionnel, et les v.a. $(Z*K)^{o}_s$ et $(Z*K)^{o}_{D_s}$ étant égales, on peut écrire

$$\begin{aligned} E[1_A((Z*K)_\infty-(Z*K)_s)] &= E[\Sigma_{g\in H^{\rightarrow}} 1_A 1_{\{s<g\}} Z_g(M_{D_g}-M_g)] \\ &= E[\Sigma_{g\in H^{\rightarrow}} 1_A 1_{\{D_s\leq g\}} Z_g(M_{D_g}-M_g)] \\ &= E[\int^\infty 1_A 1_{[D_s,\infty[} d(Z*K)^{o}_s] \\ &= E[1_A((Z*K)^{o}_\infty-(Z*K)^{o}_s)] \end{aligned}$$

Autrement dit, le processus à variation intégrable continu $(Z*K)^{o}$ est aussi projection duale prévisible par rapport à $(\underline{\underline{F}}_{D_t})$ du processus à variation intégrable optionnel $Z*K$. Le processus $\widetilde{(Z*K)}^{o}$ est donc une martingale à variation intégrable par rapport à $(\underline{\underline{F}}_{D_t})$.

Il nous reste donc à montrer que (Y_t) a un sens, que Y_{D_t} est une somme compensée de sauts, et que ses sauts sont les mêmes que les sauts de la martingale précédente.

Notons L^ε_n et T^ε_n les extrémités gauche et droite du n-ième intervalle contigu à H de longueur $>\varepsilon$; il est bien connu que $L^\varepsilon_n+\varepsilon$ est un temps d'arrêt. Nous avons alors

$$Z_{\tau_s} 1_{\{\tau_s<s\}} = \lim_{\varepsilon\to 0} Z_{\tau_s} 1_{\{\tau_s+\varepsilon<s\}} = \lim_\varepsilon \Sigma_n Z_{L^\varepsilon_n} 1_{]L^\varepsilon_n+\varepsilon, T^\varepsilon_n]}(s)$$

Notons J_s le processus $Z_{\tau_s} 1_{\{\tau_s<s\}}$, J^ε le processus le plus à droite. Comme J^ε est prévisible, il en est de même de J, et les martingales

$Y^{\varepsilon}=J^{\varepsilon}\cdot M$ convergent dans $\underline{\underline{H}}^1$ vers $Y=J\cdot M$. Il en résulte que les martingales $(Y^{\varepsilon}_{D_t})$ de la famille $(\underline{\underline{F}}_{D_t})$ convergent dans $\underline{\underline{H}}^1$ vers (Y_{D_t}). Or soit $H^{\rightarrow}_{\varepsilon}$ la réunion des graphes des variables aléatoires L^{ε}_n ; on vérifie que

$$Y^{\varepsilon}_{D_t} = \Sigma_{g\in H^{\rightarrow}_{\varepsilon},\, g\leqq t}\; Z_g(M_{D_g}-M_{g+\varepsilon})$$

Donc $(Y^{\varepsilon}_{D_t})$ est une somme compensée de sauts, qui ne saute que sur $H^{\rightarrow}$, avec pour saut en $g\in H^{\rightarrow}$ $Z_g 1_{\{g+\varepsilon<D_g\}}(M_{D_g}-M_{g+\varepsilon})$. Il en résulte que Y_{D_t} est une somme compensée de sauts, qui ne saute que sur $H^{\rightarrow}$, avec un saut en g égal à $Z_g(M_{D_g}-M_g)$. Ces sauts étant égaux aux sauts de $Z*K$, le lemme est établi. ▯

Nous transformons maintenant l'égalité obtenue en 2), en l'écrivant

$$(3)\qquad (Z*K)_t = (Z*K)^{\circ}_t + \int^{D_t} Z_{\tau_s} 1_{\{\tau_s<s\}} dM_s$$

Cette formule ne contient que M : nous y reviendrons plus loin. Cela s'écrit explicitement

$$\Sigma_{\substack{g\in H^{\rightarrow}\\ g\leqq t}} Z_g(M_{D_g}-M_g) = (Z*K)^{\circ}_t + \int^{D_t} Z_{\tau_s} 1_{\{\tau_s<s\}} dM_s$$

On a d'autre part la formule évidente

$$\Sigma_{\substack{g\in H^{\rightarrow}\\ g\leqq t}} Z_g(V_{D_g}-V_g) = \int^{D_t} Z_{\tau_s} 1_{\{\tau_s<s\}} dV_s$$

d'où en ajoutant

$$\Sigma_{\substack{g\in H^{\rightarrow}\\ g\leqq t}} Z_g(X_{D_g}-X_g) = (Z*K)^{\circ}_t + \int^{D_t} Z_{\tau_s} 1_{\{\tau_s<s\}} dX_s$$

et en tenant compte de la relation $X_{D_g}=0$ si $D_g<\infty$

$$(4)\qquad X_{\infty} Z_{\tau_{\infty}} 1_{\{\tau_{\infty}\leqq t\}} = \int_0^{D_t} Z_{\tau_s} 1_{\{\tau_s<s\}} dX_s + (Z*K)^{\circ}_t + \Sigma_{\substack{g\in H^{\rightarrow}\\ g\leqq t}} Z_g X_g$$

Dans cette dernière somme, les points isolés de H ont une contribution nulle, car X y est nul, donc on peut insérer $1_{\{\tau_g=g\}} 1_{\{X_{g-}=0\}}$. Rappelons que $\int^t 1_{\{X_{s-}=0\}} dX_s = \frac{1}{2}(L^{\circ}_t(X)-L^{\circ}_t(-X)) + \Sigma_{s\leqq t} 1_{\{X_{s-}=0\}} X_s$

([1], formule (4)). On en déduit

$$\Sigma_{\substack{g\in H^{\rightarrow}\\ g\leqq t}} Z_g X_g = \int^t Z_s 1_{\{\tau_s=s\}} (1_{\{X_{s-}=0\}} dX_s) - \frac{1}{2}\int^t Z_s 1_{\{\tau_s=s\}} d(L^{\circ}_s(X)-L^{\circ}_s(-X))$$

Au second membre, nous nous permettrons de noter la première intégrale $\int^t Z_{\tau_s} 1_{\{\tau_s=s\}} dX_s$, mais il s'agit d'une fausse intégrale stochastique : elle n'a de sens avec Z progressif que parce que $1_{\{\tau_s=s\}} dX_s$ provient d'un processus à variation finie. Son écriture correcte s'obtient ainsi : tout d'abord, on peut remplacer Z par ${}^{\circ}Z$, car l'ensemble $\{Z\neq{}^{\circ}Z\}$ est négligeable pour toute mesure aléatoire optionnelle. Alors

$$\int^t {}^oZ_s 1_{\{\tau_s=s\}}dX_s = \int^t {}^pZ_s 1_{\{\tau_s=s\}}dX_s + \int^t ({}^oZ_s-{}^pZ_s)1_{\{\tau_s=s\}}dX_s$$

$$= \int^t {}^pZ_s 1_{\{\tau_s=s\}}dX_s + \Sigma_{s\leqq t}\ ({}^oZ_s-{}^pZ_s)1_{\{\tau_s=s\}}X_s$$

$$= \int^t {}^pZ_s 1_{\{\tau_s=s\}}dX_s + \Sigma_{s\leqq t}\ (Z_s-{}^pZ_s)1_{\{\tau_s=s\}}X_s$$

car l'ensemble $\{s : X_s\neq 0,\ \tau_s=s\}$ est réunion dénombrable de graphes de temps d'arrêt, de sorte que Z et ${}^oZ$ sont indistinguables sur cet ensemble.

Enfin, dans la toute dernière intégrale, nous remplacerons Z par ${}^oZ$, et nous rappellerons la projection duale optionnelle de K, citée juste après la formule (1) : ce dernier terme s'écrit donc $({}^oZ*K)^o$.

Pour finir, nous avons établi le théorème suivant :

THEOREME 1. <u>On a pour tout</u> t

$$(5)\qquad X_\infty Z_{\tau_\infty} 1_{\{\tau_\infty\leqq t\}} = \int^{D_t} Z_{\tau_s} 1_{\{\tau_s<s\}}dX_s + \int^t Z_{\tau_s}(1_{\{\tau_s=s\}}dX_s) + (Z*K)^o_t - ({}^oZ*K)^o_t$$

REMARQUE. La première intégrale au second membre est une vraie intégrale stochastique prévisible (on pourrait y remplacer Z par ${}^pZ$, d'ailleurs). La seconde est une intégrale de Stieltjes : on pourrait y remplacer t par D_t, car la mesure $1_{\{\tau_s=s\}}dX_s$ ne charge pas $]t,D_t]$, mais la tentation serait trop grande de regrouper le tout sous la forme $\int^{D_t} Z_{\tau_s}dX_s$, intégrale dépourvue de tout sens apparent (voir commentaire à la fin).

Maintenant, nous remplaçons $+\infty$ par t fini ; le théorème suivant donne une autre démonstration du résultat de Stricker, suivant lequel $(Z_{\tau_t}X_t)$ est une semi-martingale. Il en donne aussi une représentation explicite, et l'on retrouve le résultat de Meyer-Stricker-Yor suivant lequel le terme complémentaire est nul lorsque Z est optionnel. Mais il faut noter que la représentation obtenue pour le terme complémentaire exige que X appartienne à $\underline{\underline{H}}^1$, et dépend de la loi de probabilité utilisée.

THEOREME 2. <u>On a pour tout</u> u

$$(6)\qquad X_u Z_{\tau_u} = \int^u Z_{\tau_s} 1_{\{\tau_s<s\}}dX_s + \int^u Z_{\tau_s}(1_{\{\tau_s=s\}}dX_s) + (Z*K)^o_u - ({}^oZ*K)^o_u .$$

<u>Démonstration</u> : Nous appliquons la formule (5), avec $t=+\infty$, à la semi-martingale $X^u_t=X_{t\wedge u}$ et à l'ensemble $H^u=H\cap]-\infty,u\,]$. Nous avons alors $X^u_\infty Z_{\tau^u_\infty} = X_u Z_{\tau_u}$; les intégrales stochastiques ne posent pas de problème. Il faut seulement évaluer les termes complémentaires $(Z*K^u)^o_\infty - ({}^oZ*K^u)_\infty$.

Or nous avons

$$K_t^u = \Sigma_{g\in H^{\rightarrow}, g\leq t} (M_{D_g\wedge u} - M_{g\wedge u}) = \Sigma_{g\in H^{\rightarrow}, g\leq t\wedge u} (M_{D_g\wedge u} - M_g)$$

$$K_{t\wedge u} = \Sigma_{g\in H^{\rightarrow}, g\leq t\wedge u} (M_{D_g} - M_g)$$

Donc pour H optionnel, ou même simplement progressif

$$E[\int^{\infty} H_s(dK_s^u - dK_{s\wedge u})] = E[\Sigma_{g\in H^{\rightarrow}, g\leq u} H_g(M_{D_g\wedge u} - M_{D_g})]$$

$$= E[\Sigma_{g\in H^{\rightarrow}} 1_{\{g\leq u, D_g>u\}} H_g(M_u - M_{D_g})]$$

$$= E[-H_{\ell_u} 1_{\{D_u>u\}}(M_{D_u} - M_u)] = 0$$

Les processus (K_s^u) et $(K_{s\wedge u})$, ou encore $(Z*K^u)_s$ et $(Z*K)_{s\wedge u}$ ont donc même projection optionnelle, ce qui nous donne

$$(Z*K^u)_{\infty}^o = (Z*K)_u^o \quad , \quad ({}^oZ*K^u)_{\infty}^o = ({}^oZ*K)_u^o$$

et la formule (6) est établie. ▯

Revenons maintenant à la formule (3) : on a fait remarquer qu'elle ne contient que la martingale M et l'ensemble H . Peut on exprimer les hypothèses en fonction de M et de H seulement ?

THEOREME 3 . Soient H un ensemble aléatoire fermé, M une martingale de $\underline{\underline{H}}^1$, nulle en 0 . On suppose que le processus (M_{D_t}) est à variation intégrable. Alors

1) La variation totale de M sur H est intégrable

2) Pour tout processus progressif Z borné, on a la formule (3). En particulier, si l'on pose $N_t = \int_0^t Z_{\tau_s} 1_{\{\tau_s<s\}} dM_s$, le processus (N_{D_t}) est lui aussi à variation intégrable.

Démonstration. Définissons pour tout point de $H\setminus H^{\rightarrow}$ (i.e. tout point t tel que $D_t=t$)

$$W_t = M_t$$

Aux points isolés de H, nous posons aussi $W_t=M_t$. Aux points de H^* (isolés à droite mais non à gauche) nous posons $W_t=M_{t-}$. Enfin, sur le complémentaire de H, nous posons

$$W_t = W_{\tau_t} \qquad (W_t=0 \text{ sur } [0,D_0[\ )$$

Il est facile de voir que la variation totale de W sur $[0,\infty[$ est égale à celle du processus (M_{D_t}), et que W est adapté et continu à droite, nul en 0 . Le processus X-W est alors une semi-martingale de $\underline{\underline{H}}^1$, à laquelle on peut appliquer la théorie précédente, car $X_{D_t}=0$ pour tout t. Il est toutefois important de remarquer que V=-W n'est pas nécessairement prévisible : cela ne fait rien, car la prévisibilité de V n'a jamais été utilisée plus haut.

La première conséquence, c'est l'intégrabilité de la variable aléatoire

$$\int_H |dW_s| + \Sigma_{g\in H^{\rightarrow}} |M_{D_g} - M_g|$$

(Ici, comme dans la première partie de l'exposé, nous convenons que $0\in H$, de sorte que cette somme comprend $|M_{D_0}|$). De plus, nous savons que $\Sigma_s 1_{\{X_{s-}=0\}}|X_s|$ est intégrable. Si l'on réduit cette somme aux points de H^*, on trouve $\Sigma_{g\in H^*} |M_g - M_{g-}|$, qui est donc aussi intégrable. Finalement, la variation totale de M sur H, c'est à dire

$$\int_H |dM_s| + \Sigma_{g\in H^{\rightarrow}} |M_{D_g} - M_g|$$

est intégrable. Le reste n'exige aucun commentaire.

Cet énoncé contient des restrictions d'intégrabilité. Mais on peut en déduire, par changement de loi, l'énoncé suivant : si X est une <u>semi-martingale</u> , et si le processus (X_{D_t}) est à variation finie, alors X est à variation finie <u>sur</u> H <u>entier</u>. Il suffit de changer de loi pour faire entrer X dans $\underline{\underline{H}}^1$ sur tout intervalle compact, et d'appliquer le résultat précédent à la partie martingale de X.

REFERENCES.

Voir dans ce volume les exposés sur le balayage :

[1] Temps local et balayage des semi-martingales (N. El Karoui)

[2] Sur le balayage des semi-martingales continues (M. Yor)

[3] Semimartingales et valeur absolue (C. Stricker)

[4] Sur une formule de la théorie du balayage (P.A. Meyer, C. Stricker et M. Yor).

COMMENTAIRES DU SEMINAIRE

(P.A. Meyer) Dans cet article, Nicole El Karoui a (entre autres choses) trouvé une nouvelle généralisation de l'intégrale stochastique, voisine de la « définition naturelle de l'intégrale stochastique optionnelle » de Yor.

Soient X une semimartingale, Z un processus <u>progressif</u>, qu'on supposera borné pour simplifier. Nous dirons que Z est <u>soumis</u> à X s'il existe un ensemble <u>prévisible</u> H tel que

$$I_H \cdot X \text{ est à variation finie }, \quad I_{H^c} Z \text{ est prévisible}$$

(nous dirons que H <u>soumet</u> Z à X). Par exemple, dans l'exposé, (Z_{τ_s}) est soumis à X par $\{ s : \tau_s < s \}$.

Nous posons alors

$$Z\underset{H}{\cdot}X = (ZI_{H^c})\cdot X + Z*(I_H\cdot X)$$

où les $\cdot$ du côté droit sont des intégrales stochastiques, et $*$ une intégrale de Stieltjes. Si H et $\overline{H}$ soumettent Z à X, il en est de même de $K=H\cap\overline{H}$ et de $L=H\cup\overline{H}$. En effet

$I_K\cdot X$ est évidemment à variation finie, et $I_L\cdot X = (I_H+I_{\overline{H}} -I_K)\cdot X$ aussi ;

$I_{L^c}Z$ est évidemment prévisible, et $I_{K^c}Z = (I_{H^c} + I_{\overline{H}^c} - I_{L^c})Z$ aussi .

Montrons alors que $Z\underset{H}{\cdot}X = Z\underset{\overline{H}}{\cdot}X$, ce qui nous permettra de supprimer la mention de l'ensemble prévisible soumettant Z à X. Par symétrie, il suffit de montrer que $Z\underset{H}{\cdot}X = Z\underset{K}{\cdot}X$, ce qui s'écrit

$$(ZI_{K^c\setminus H^c})\cdot X = Z*(I_{H\setminus K}\cdot X)$$

Posons $J=I_{H\setminus K} = I_{K^c\setminus H^c}$; J est prévisible, JZ est prévisible, $J\cdot X$ est à variation finie. On a alors, en utilisant à plusieurs reprises l'égalité de $\cdot$ et de $*$ pour les semimartingales à variation finie et les intégrands prévisibles, et l'associativité de l'i.s. dans le cas prévisible

$$(ZJ)\cdot X = (ZJJ)\cdot X = (ZJ)\cdot(J\cdot X)= (ZJ)*(J\cdot X)= Z*(J*(J\cdot X))=Z*(J\cdot(J\cdot X))$$
$$= Z*(JJ\cdot X) = Z*(J\cdot X) \qquad \text{(ce qu'on voulait).}$$

Dans cette intégrale stochastique, on peut remplacer Z par sa projection optionnelle ^oZ . En effet, on a $ZI_{H^c} = {}^oZI_{H^c} = {}^pZI_{H^c}$ puisque ZI_{H^c} est prévisible, et d'autre part on sait que $Z*V = {}^oZ*V$ pour tout processus à variation finie (adapté) V . D'autre part, lorsque Z est optionnel, cette intégrale est un cas particulier de l'intégrale optionnelle non compensée de Yor . En effet, Z et ^pZ ne diffèrent que sur un ensemble mince <u>contenu dans</u> H , donc le processus $\sum_{s\le t}|Z_s-{}^pZ_s||\Delta X_s|$ est majoré par un multiple de $\sum_{s\le t, s\in H}|\Delta X_s|$, qui est à variation finie, et il est immédiat que les deux intégrales stochastiques, au sens de Yor ou de N. El Karoui, sont égales.

On peut aussi remarquer que si deux processus Z et $\overline{Z}$ sont soumis à X par H et $\overline{H}$ respectivement, ils sont tous deux soumis à X par $H\cup\overline{H}$, et l'on a $(Z+\overline{Z})\cdot X = Z\cdot X + \overline{Z}\cdot X$. Cette propriété d'additivité est un avantage sur la définition de Yor.

(C.Stricker) Dans la théorie présentée plus haut, la restriction $X\in\underline{\underline{H}}^1$ est sérieuse. En effet

- dans la définition du processus K , la sommation sur les $g\in H^{\rightarrow}$ peut faire intervenir une excursion infinie. On utilise donc la propriété de martingale de M à l'infini ;

- même si X est une semimartingale sur $[0,\infty]$, on ne peut utiliser un changement de loi pour faire entrer X dans $\underline{\underline{H}}^1$, car les formules de N. El Karoui ne sont pas invariantes par changement de loi.

Le problème se pose donc de trouver, sans cette hypothèse, une forme explicite du terme complémentaire de la ≪ formule d'Azéma-Yor ≫

$$Z_{\tau_u} X_u = \int^u Z_{\tau_s} dX_s + \mathfrak{R}_u$$

où l'intégrale stochastique est prise au sens du commentaire précédent, et $\mathfrak{R}_u$ est un processus à variation finie continu, porté par H. On peut procéder par localisation de la manière suivante.

X=M+V étant une décomposition de X, nous choisissons un temps d'arrêt T fini tel que

$$M^T \in \underline{\underline{H}}^1 \quad , \quad \int^{T-} |dV_s| \in L^1$$

Alors la semimartingale $\overline{X}_t = X_t I_{\{t<T\}}$ appartient à $\underline{\underline{H}}^1$, avec la décomposition $\overline{X}=\overline{M}+\overline{V}$, où

$$\overline{M}_t = M_{t\wedge T} \quad , \quad \overline{V}_t = V_t I_{\{t<T\}} - M_T I_{\{t\geqq T\}}$$

et nous appliquons les résultats de N. El Karoui à $\overline{X}$ et à l'ensemble $\overline{H}=H\cup[T,\infty[$. Nous voyons que

1) La variable aléatoire $\sum_{g\in H^{\to}} |M_{D_g\wedge T} - M_{g\wedge T}|$ est intégrable, et le processus $K_t^T = \sum_{g\in H^{\to}, g\leqq t} (M_{D_g\wedge T} - M_{g\wedge T})$ est à variation intégrable . On remarquera que la sommation ne porte en fait que sur les g<T.

2) $(Z*K^T)_t^o - ({}^oZ*K^T)_t^o = \int^{D_t\wedge T} Z_{\tau_s} I_{\{\tau_s<s\}} dM_s$

3) Le terme complémentaire $\mathfrak{R}_u$ de la formule d'Azéma-Yor est égal, sur $[0,T[$, à $(Z*K^T)^o - ({}^oZ*K^T)^o$.

Nous laisserons au lecteur les détails de démonstration. Comme dans l'exposé principal, les assertions 1) et 2) peuvent s'énoncer simplement en termes de martingales locales : si M est une martingale locale telle que (M_{D_t}) soit un processus à variation finie, alors M est à variation finie sur $H\cap[0,t]$ pour tout t fini , et la martingale locale $N_t = \int^t Z_{\tau_s} I_{\{\tau_s<s\}} dM_s$ est, elle aussi, à variation finie sur H (cf. le théorème 3). Cependant, ces résultats ne sont pas vraiment des améliorations de ceux de l'exposé principal, car ils sont aussi valables sous cette forme pour les <u>semi</u>martingales, et se ramènent alors à l'exposé principal (cas $\underline{\underline{H}}^1$) par changement de loi. C'est le calcul du terme complémentaire que l'on voulait souligner ici.

ERRATUM. A la 5e page de l'exposé [1], ligne 2 (démonstration de la proposition 3) il manque $1_{\{\ell_s<s\}}$ dans la première intégrale au second membre de la formule.