SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

CHRISTOPHE STRICKER

Prolongement des semi-martingales

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 14 (1980), p. 104-111
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1980__14__104_0>

Séminaire de Probabilités XIV

1978-1979

PROLONGEMENT DES SEMIMARTINGALES

par C. Stricker

L'objet de ce travail est d'étudier le prolongement en 0 et $+\infty$ des semimartingales dans $]0,+\infty[$. Après avoir étudié ce cas particulier avec des méthodes probabilistes, nous donnerons un résultat général de prolongement qui a des applications intéressantes pour "les mesures semimartingales" (cf [8]). Pour cela nous utiliserons un théorème d'analyse fonctionnelle dû à Maurey et Pisier [5].
Nous remercions vivement P. A. Meyer pour ses nombreuses remarques et améliorations.

PROLONGEMENT DES SEMIMARTINGALES SUR $]0,+\infty[$.

Précisons d'abord les notations et faisons quelques rappels. Soit $(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t)P)$ un espace probabilisé filtré vérifiant les conditions habituelles de la théorie des processus. Soit X une semimartingale. On dit que X est une semimartingale jusqu'à l'infini s'il existe une suite (T_n) de temps d'arrêt tendant stationnairement vers $+\infty$, tels que pour tout n le processus X arrêté à l'instant T_n, noté X^{T_n}, soit une semimartingale appartenant à $\mathcal{H}^1$. Le théorème suivant qui améliore un résultat de Lenglart donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi.

THEOREME 1. Les assertions suivantes sont équivalentes :

a) X est une semimartingale jusqu'à l'infini,

b) il existe une loi de probabilité Q équivalente à P telle que X soit une Q-quasimartingale,

c) pour tout ensemble prévisible A , la suite $(1_A.X)_n$ converge en probabilité lorsque n tend vers $+\infty$.

Démonstration : Meyer a établi l'implication a) $\Longrightarrow$ b) dans l'article [7] . Réciproquement si X est une quasimartingale, il éxiste deux surmartingales positives X' et X'' telles que $X = X' - X''$. On remarque alors aisément que les temps d'arrêt $T_n = \inf\{t, X'_t \geq n$ ou $X''_t \geq n\}$ tendent stationnairement vers $+\infty$ et les surmartingales $(X')^{T_n}$ et $(X'')^{T_n}$ appartiennent à la classe D , donc à $\mathcal{H}^1$. L'implication a) $\Longrightarrow$ c) est bien connue. La démonstration de la réciproque est plus délicate et se fera en plusieurs étapes. Nous noterons X^n la semimartingale X arrêtée à l'instant n . D'après un résultat de Dellacherie [1] , il existe une loi Q équivalente à P telle que toutes les semimartingales X^n appartiennent à l'espace normé $\mathcal{M} \oplus \mathcal{A}$: autrement dit, pour la loi Q , X^n est spéciale de décomposition canonique $X^n = M^n + A^n$, M^n appartenant à l'espace vectoriel $\mathcal{M}$ des martingales de carré intégrable muni de la norme $\|M^n\|^2_{\mathcal{M}} = E[M^n,M^n]_\infty$, A^n appartenant à l'espace vectoriel $\mathcal{A}$ des processus à variation intégrable muni de la norme $\|A^n\|_{\mathcal{A}} = E[\int_0^\infty |dA^n|]$. $\tilde{\mathcal{P}}$ désigne la tribu quotient de la tribu prévisible $\mathcal{P}$ par la relation d'équivalence : $A \sim B$ si et seulement si pour tout n , $1_A.X^n = 1_B.X^n$. On pose :

$$\|X^n\| = \|M^n\|_{\mathcal{M}} + \|A^n\|_{\mathcal{A}}$$

$$d(A,B) = \sum_n \frac{\|(1_A-1_B).X^n\|}{2^n(1+\|X^n\|)} \quad \text{pour tout } A,B \in \tilde{\mathcal{P}}$$

$$J^n(A) = (1_A.X^n)_\infty \quad \text{pour tout } A \in \tilde{\mathcal{P}}$$

$$J(A) = \lim_{n\to\infty} J^n(A) \ , \quad \text{la limite étant prise en probabilité.}$$

On désigne par L^0 l'espace vectoriel topologique des variables aléatoires p.s. finies, muni de la topologie de la convergence en probabilité avec la quasinorme $\|U\|_{L^0} = E[1_\wedge|U|]$.

Le lemme suivant est analogue au lemme 1 d'Emery [3] avec une démonstration un peu différente.

<u>LEMME 1.</u> d est une distance sur $\tilde{\mathcal{P}}$ pour laquelle $\tilde{\mathcal{P}}$ est complet. Les applications J^n de $\tilde{\mathcal{P}}$ dans L^0 sont continues pour tout n et J est aussi continue.

<u>Démonstration</u> : d est évidemment une distance sur $\tilde{\mathcal{P}}$. Si (A_n) est une suite de Cauchy pour d, c'est aussi une suite de Cauchy dans

$$L^2\left(\mathcal{P}, \sum_n \frac{d[M^n,M^n]dQ}{2^n(1+\|X^n\|)}\right) \cap L^1\left(\mathcal{P}, \sum_n \frac{|dA^n|dQ}{2^n(1+\|X^n\|)}\right).$$

Donc (1_{A_n}) converge dans $L^2(\ldots) \cap L^1(\ldots)$ vers l'indicatrice d'un ensemble prévisible A. Par conséquent (A_n) converge aussi vers A dans $\tilde{\mathcal{P}}$. Les applications J^n sont lipschitziennes, donc continues. Il en résulte que J admet aussi un point de continuité. Comme J est additive, on vérifie aisément que J est continue partout.

Nous abordons maintenant la deuxième étape de notre démonstration.

<u>LEMME 2.</u> La variable aléatoire $X^* = \sup|X_s|$ est finie p.s.

<u>Démonstration</u> : Par hypothèse, les variables aléatoires $J^n(A)$ convergent dans L^0 vers $J(A)$. En prenant $A = \mathbb{R}^+ \times \Omega$, on constate que la suite $X^n_\infty = X_n$ converge en probabilité lorsque n $+\infty$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que la convergence a lieu p.s. Notons $T_n = \inf\{t \geq n, |X_t| \geq |X_n|+1\}$. Sur l'ensemble $T_n < +\infty$, $|J(]n,T_n])| \geq 1$. D'après le lemme 1 cette suite de variables aléatoires tend vers 0 dans L^0. Donc $P[T_n < +\infty]$ tend vers 0. Mais on a l'inclusion : $\{T_n < +\infty\} \supset \{X^* = +\infty\}$. Donc $P[X^* = +\infty] = 0$ et le

lemme est établi.

Notons que le résultat du lemme 2 subsiste si on remplace X par l'intégrale stochastique (sur $[0,+\infty[$) $1_A.X$ pour tout ensemble prévisible A. On peut alors invoquer un résultat de Lenglart [4] ou donner une démonstration directe pour la dernière étape. Rappelons que nous avons choisi pour le lemme 1 une loi Q équivalente à P telle que toutes les semimartingales X^n soient dans $\mathcal{M} \oplus \mathcal{A}$. Compte tenu du lemme 2, on peut exiger de plus que $E_Q[X] < +\infty$. Nous fixons désormais la loi Q et toutes les intégrales se rapporteront à cette loi. Comme la semimartingale X^n est dans $\mathcal{M} \oplus \mathcal{A}$, elle est spéciale, de décomposition canonique $X^n = M^n + A^n$. Il existe un processus prévisible ϵ à valeurs dans $\{-1,1\}$ tel que $\epsilon dA^n = |dA^n|$ pour tout n. Posons : $\sigma = 1_{\{\epsilon=1\}}$, $\sigma' = 1_{\{\epsilon=-1\}}$. Soit $T_p = \inf\{t, |(\sigma.X)_t| \vee |(\sigma'.X)_t| \geq p\}$. Les processus $\sigma.X$ et $\sigma'.X$ arrêtés à l'instant T_p sont bornés par $p + X^*$ car $\Delta(\sigma.X)_{T_p} = \sigma_{T_p} \Delta X_{T_p}$. Nous noterons encore $\sigma.X$ (resp. $\sigma'.X$) les processus arrêtés à l'instant T_p. D'après le lemme 2, $(\sigma.X)^*$ est aussi fini p.s. et la suite (T_p) tend stationnairement vers $+\infty$. Pour établir que X est une semimartingale jusqu'à l'infini, il suffit de montrer que les semimartingales arrêtées $\sigma.X$ et $\sigma'.X$ sont dans $\mathcal{H}^1$. Or $\sigma.A^n$ est un processus croissant intégrable et $\sigma.M^n$ est une martingale de carré intégrable que nous pouvons supposer nulle en 0. Dans ce cas $E[\sigma.A^n_\infty] = E[\sigma.X^n_\infty] \leq p + E[X^*]$. Grâce au lemme de Fatou, on en déduit que $E[\sigma.A_\infty] < +\infty$. Comme $(\sigma.M^n) \leq (\sigma.X)^* + \sigma.A_\infty$, on en déduit que la martingale $\sigma.M$ appartient à $\mathcal{H}^1$ et le théorème 1 est établi.

On a un théorème analogue pour le prolongement en 0 des semimartingales dans $]0,+\infty[$. Nous dirons d'après [6] et [8] qu'un processus X est une semimartingale dans $]0,+\infty[$ si pour tout n, $X1_{[\frac{1}{n},+\infty[}$ est une semimartingale au sens habituel.

THEOREME 2. Soit X une semimartingale dans $]0,+\infty[$. Alors X est la restriction à $]0,+\infty[$ d'une semimartingale si et seulement si pour tout ensemble prévisible A , les variables aléatoires $\int_{1/n}^{1} 1_A dX$ convergent dans L^0 .

Ce théorème est analogue au théorème 1 et on peut transcrire la démonstration précédente mais c'est beaucoup plus pénible... En particulier l'équivalent du lemme 2 utilise un résultat de Mertens explicité dans [9] et qui nous a été communiqué par Meyer.
C'est pourquoi nous allons établir un résultat plus général avec une méthode différente faisant appel à l'analyse fonctionnelle.

UN THEOREME GENERAL DE PROLONGEMENT.

Dans l'étude en 0 et $+\infty$ nous étions amenés à introduire les semimartingales jusqu'à l'infini $X^n = 1_{]1/n,1]}.X$ (resp. $X^n = 1_{[0,n]}.X$) . Voici le résultat général qui englobe les théorèmes 1 et 2 .

THEOREME 3. Soient (A_n) une suite croissante d'ensembles prévisibles de réunion A et (X^n) une suite de semimartingales jusqu'à l'infini telles que : $X^n = 1_{A_n}.X^{n+1}$ et pour tout ensemble prévisible K la suite $(1_K.X^n)_\infty$ converge dans L^0 vers une v.a. notée $J(K)$. Alors la suite (X^n) converge pour la topologie des semimartingales vers une semimartingale X telle que $1_{A^c}.X = 0$.

Démonstration : La démonstration se fait aussi en plusieurs étapes. Rappelons d'abord un très joli résultat dû à Maurey et Pisier [5] .

THEOREME 4. Pour tout $\alpha \in]0,1[$ il existe $\delta \in]0,1[$ tel que pour toute famille finie $Z_1,\dots,Z_n$ de v.a. et toute suite finie de réels $c_1,\dots,c_n$ bornés par 1 :

$$Q[|\sum_{i=1}^{n} c_i Z_i| \geq 1] \leq \alpha + K \sup_{\epsilon} Q[|\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i Z_i| \geq \delta]$$

où ϵ parcourt l'ensemble $\{-1,1\}^n$, K étant une constante universelle.

Soit I l'algèbre engendrée par les intervalles stochastiques dyadiques. Comme l'ensemble des v.a. de la forme $J[(A\setminus A_n) \cap B]$, B parcourant I, est dénombrable, on peut supposer que toutes ces v.a. appartiennent à $L^1(Q)$ (cf [1]). Notons que $J(A_n \cap B) = (1_B.X^n)_\infty$ est aussi intégrable pour tout n. Nous nous proposons de montrer maintenant que pour tout $\epsilon > 0$ il existe un réel $c \in R$ tel que $Q[|J(f)| \geq c] \leq \frac{\epsilon}{3}$ pour tout $f \in \bar{I}$, $\bar{I}$ désignant l'enveloppe convexe de I. Fixonx $\epsilon > 0$ et prenons $\alpha = \frac{\epsilon}{3}$. Il lui correspond d'après le théorème 4 un certain $\delta > 0$. Par ailleurs il existe $\eta > 0$ tel que $d(B,\emptyset) < \eta$ implique $Q[|J(B)| > \frac{\delta}{2}] < \frac{\epsilon}{3K}$. Rappelons que $A = \cup A_n$ et que la suite (A_n) est croissante. Ainsi il existe n_o tel que $d(A\setminus A_{n_o},\emptyset) < \eta$. Notons $\bar{J}$ la "restriction" de J à $A\setminus A_{n_o}$ c'est-à-dire : $\bar{J}(B) = J(B \cap (A\setminus A_{n_o}))$ pour tout $B \in \tilde{\mathcal{P}}$. Alors pour tout B prévisible $Q[|\bar{J}(B)| > \frac{\delta}{2}] < \frac{\epsilon}{3K}$. Tout élément f de $\bar{I}$ s'écrit sous la forme : $f = \sum_{p=1}^{n} \lambda_p 1_{D_p}$ où les (D_p) appartiennent à I, sont deux à deux disjoints et $0 \leq \lambda_p \leq 1$ pour tout p. Or $\sum_{p=1}^{n} \pm 1_{D_p} = 1_D - 1_{D'}$ avec $D,D' \in I$ car les (D_p) sont deux à deux disjoints. Donc $Q[|\bar{J}(\sum_{p=1}^{n} \pm 1_{D_p})| \geq \delta] \leq Q[|\bar{J}(D)| \geq \frac{\delta}{2}] + Q[|\bar{J}(D')| \geq \frac{\delta}{2}] \leq 2\frac{\epsilon}{3}$. Le théorème de Maurey et Pisier implique que $Q[|\bar{J}(f)| \geq 1] \leq \epsilon$ pour tout $f \in \bar{I}$. Comme $J(A_{n_o} \cap B) = (1_B.X^{n_o})_\infty$ pour tout $B \in \mathcal{P}$ et que la semimartingale X^{n_o} est une semimartingale jusqu'à l'infini, il existe $c' \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $f \in \bar{I}$, $Q[|J(A_{n_o} \cap f)| \geq c'] \leq \epsilon$. Or $J(.) = \bar{J}(.) + J(A_{n_o} \cap .)$. Donc il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $f \in \bar{I}$, $Q[|J(f)| > c] \leq 2\epsilon$. On sait d'après un résultat de Dellacherie - Mokobodski dont la démonstration a été améliorée par Yan [11] qu'il existe une loi Q' équivalente à Q telle que $\sup_{f\in\bar{I}} E_{Q'}[J(f)] < +\infty$.

Il en résulte que $X_T = J([0,T])$ est une Q'-quasimartingale dont on peut choisir une version càdlàg (il suffit de reprendre la démonstration du théorème 1.5 de [9]). Après le choix de la bonne version, $X_T = J[0,T])$ a encore lieu pour tout temps d'arrêt dyadique T. A l'aide du lemme 1 et du théorème de convergence domminée pour les intégrales stochastiques, on voit que l'ensemble des $B \in \mathcal{P}$ qui vérifient $J(B) = (1_B.X)_\infty$ est une classe monotone. Comme il contient l'algèbre engendrée pour les temps d'arrêt dyadiques, cette égalité a lieu pour tout B prévisible. Comme $X^n = 1_{A_n}.X$, on en déduit que la suite (X^n) converge pour la topologie des semimartingales vers X. Il en résulte aussi que $1_{A^c}.X = 0$ puisque $1_{A^c}.X^n = 0$ pour tout n.

Remarques :

a) La convergence pour la topologie des semimartingales entraîne en particulier le résultat suivant : si (H^n) est une suite de processus prévisibles uniformément bornés tendant simplement vers un processus (prévisible) H, alors $H^n.X^n$ converge pour la topologie des semimartingales vers $H.X$. Bien entendu, on ne peut pas remplacer la condition de borniture uniforme par la condition plus faible : $H^n \in L(X^n)$ pour tout n.

b) Les applications aux mesures semimartingales sont développées dans [8].

c) Une version plus faible du théorème 2 figure dans [3] et [10].

RECTIFICATION SUR LES EPREUVES. Dans l'énoncé du th.4, ajouter que les c_i sont bornés par 1 en valeur absolue, et remplacer la formule par

$$Q[|\sum_{i=1}^{n} c_i Z_i| \geqq 1] \leqq \alpha + K \sup_{\varepsilon} \left(\inf\{ \lambda : Q[|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i Z_i| \geqq \lambda] \leqq \delta \} \right)$$

Dans la démonstration, ligne 9, choisir η tel que $Q[|J(B)| \geqq \frac{\varepsilon}{6K}] \leqq \frac{\delta}{2}$. Ligne 13, pour B prévisible $Q[|\bar{J}(B)| \geqq \frac{\varepsilon}{6K}] \leqq \frac{\delta}{2}$. Enfin, lignes 16-17 $Q[|\bar{J}(\Sigma_p \pm 1_{D_p})| \geqq \frac{\varepsilon}{3K}] \leqq Q[|\bar{J}(D)| \geqq \frac{\varepsilon}{6K}] + Q[|\bar{J}(D')| \geqq \frac{\varepsilon}{6K}] \leqq \delta$. Sans changement ensuite.

REFERENCES
-:-:-:-:-:-

[1] DELLACHERIE C.: Quelques applications du lemme de Borel-Cantelli à la théorie des semimartingales. Séminaire de Probabilités XII, p. 742, L.N. 649, Springer Verlag 1978.

[2] DELLACHERIE C. et MEYER P.A.: Probabilités et Potentiels. Chapitre VI, n° 50b.

[3] EMERY M.: Un théorème de Vitali-Hahn-Saks pour les semimartingales. A paraître dans Z.W.

[4] LENGLART E.: Article à paraître.

[5] MAUREY et PISIER G.: Un théorème d'extrapolation et ses conséquences. CRAS Paris, T. 277, série A, 1973, p. 39-41.

[6] MEYER P.A.: Sur un résultat de Laurent Schwartz. Dans ce volume.

[7] MEYER P.A.: Sur un théorème de C. Stricker. Séminaire de Probabilités XI, p. 482-489, L.N. 581, Springer Verlag 1977.

[8] MEYER P.A. et STRICKER C.: Sur les semimartingales au sens de L. Schwartz. A paraître dans Advances in Mathematics.

[9] STRICKER C.: Mesure de Föllmer en théorie des quasimartingales. Séminaire de Probabilités IX, p. 408-420, L.N. 465, Springer Verlag 1975.

[10] STRICKER C.: Thèse de Doctorat 1979, page 114.

[11] YAN J.A.: Caractérisation d'une classe d'ensembles convexes dans L^1 ou $\mathcal{H}^1$, a paraître dans ce volume.

Laboratoire associé au C.N.R.S n° 1
7 rue René Descartes
67084 STRASBOURG CEDEX