SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

ÉRIK LENGLART

Sur l'inégalité de Métivier-Pellaumail

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 14 (1980), p. 125-127

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1980__14__125_0>

SUR L'INEGALITE DE METIVIER-PELLAUMAIL

E. Lenglart

Métivier et Pellaumail ont démontré récemment le résultat suivant ([1]) :

Si M est une martingale bornée dans L^2, et T est un temps d'arrêt, on a

$$E[M^{*2}_{T-}] \leq 4\, E[\langle M,M\rangle_{T-} + [M,M]_{T-}]$$

Comme d'habitude, $M^*_t = \sup_{0\leq s\leq t}|M_s|$. Nous verrons plus loin la convention à faire pour X_{0-} .

Cette inégalité, importante dans la théorie des équations différentielles stochastiques, est établie,en [1] et [2] , en décomposant M en une suite de martingales élémentaires et en démontrant ce résultat pour chacune d'entre elles. Nous donnons ici une démonstration directe de cette inégalité, qui est assez proche de la démonstration originale, mais dégage un résultat (théorème 1) qui, nous semble-t-il, mérite d'être explicité.

PRELIMINAIRES. Nous nous plaçons sur un espace de probabilité filtré $(\Omega,\underline{\underline{F}},\underline{\underline{F}}_t,P)$ vérifiant les conditions habituelles, avec la convention que $\underline{\underline{F}}_{0-} = \underline{\underline{F}}_0$. Nous notons $\underline{\underline{P}}$ la tribu des prévisibles et $\underline{\underline{O}}$ celle des optionnels.

UN CALCUL D'ESPERANCE CONDITIONNELLE.

Le concept que nous introduisons ici est beaucoup trop général pour notre situation mais nous semble cependant très utile pour clarifier celle-ci.

Soit $\mathcal{a}$ une tribu située entre $\underline{\underline{P}}$ et $\underline{\underline{O}}$. Un temps d'arrêt T est appelé temps d'arrêt de $\mathcal{a}$ si son graphe appartient à $\mathcal{a}$. Si T est un temps d'arrêt (quelconque), nous désignons par $\underline{\underline{F}}_T^{\mathcal{a}}$ la tribu égale à

$$\left\{A\in \underline{\underline{F}}_\infty\ ,\ \exists X\ \mathcal{a}\text{ mesurable t.q. } X_T\, I_{\{T<\infty\}} = I_A\, I_{\{T<\infty\}}\ \text{p.s.}\right\}$$

Avec ces notations: $\underline{\underline{F}}_T^{\underline{\underline{P}}} = \underline{\underline{F}}_{T-}$, $\underline{\underline{F}}_T^{\underline{\underline{O}}} = \underline{\underline{F}}_T$, $\underline{\underline{F}}_{T-}\subset \underline{\underline{F}}_T^{\mathcal{a}} \subset \underline{\underline{F}}_T$.

On montre alors aisément que si S et T sont deux temps d'arrêt de $\mathcal{a}$ et X est une v.a. , $E[X|\underline{\underline{F}}_T^{\mathcal{a}}]\, I_{\{S=T\}} = E[X|\underline{\underline{F}}_S^{\mathcal{a}}]\, I_{\{S=T\}}$ p.s.

Considérons maintenant un temps d'arrêt T. Désignons par $\mathcal{a}$ la plus petite tribu ayant pour temps d'arrêt les temps d'arrêt prévisibles et T. On a $\mathcal{a} = \underline{\underline{P}} \vee \{[\![T]\!]\} = \underline{\underline{P}} \vee \{[\![0,T[\![\}$. Un processus X est $\mathcal{a}$ mesurable si et seulement si il peut s'écrire $X = Y\, I_{[\![0,T[\![} + Z\, I_{[\![T,+\infty[\![}$ avec Y et Z prévisibles. On en déduit que pour tout temps d'arrêt S, $\underline{\underline{F}}^{\mathfrak{a}}_S = \underline{\underline{F}}_{S-} \vee \{S<T\} = \underline{\underline{F}}_{S-} \vee \{S=T\}$.

En particulier si S est un temps d'arrêt prévisible et X un processus défini à l'infini et intégrable, $E[X_T \mid \underline{\underline{F}}_{T-}]\, I_{\{S=T\}} = E[X_S \mid \underline{\underline{F}}_{S-} \vee \{S<T\}]\, I_{\{S=T\}}$.

Remarquons que T, T_a, T_i sont des temps d'arrêt de $\mathfrak{a}$. (T_a (resp. T_i) désigne la partie accessible (resp. totalement inaccessible) de T) .

Rappelons enfin un lemme établi par METIVIER-PELLAUMAIL [1] .

LEMME. Soient $(\Omega, \underline{\underline{F}}, P)$ un espace de probabilité, $\underline{\underline{B}}$ une sous tribu de $\underline{\underline{F}}$, A un élément de $\underline{\underline{F}}$ et $\underline{\underline{C}}$ la tribu engendrée par $\underline{\underline{B}}$ et A . Si X est une v.a. appartenant à $L^2(\underline{\underline{C}}) \ominus L^2(\underline{\underline{B}})$, on a $E[I_{A^c} X^2] = E[I_A\, E[X^2 \mid \underline{\underline{B}}]]$.

CONVENTION. Afin de ne pas détruire la structure des martingales, nous posons $M_{0-} = M_0$ pour toute martingale M; par contre, pour tout processus croissant A, nous posons $A_{0-} = 0$ ($A_{t-} = \sup\{A_s\ ,\ s<t\}$ et $\sup \emptyset = 0$!). Si M est une martingale bornée dans L^2, nous appelons M^a sa partie martingale purement discontinue accessible (= à sauts accessibles) et M^i sa partie martingale quasi continue à gauche (= à sauts totalement inaccessibles) . On a $M = M^a + M^i$, M^a et M^i sont fortement orthogonales.

THEOREME 1. Soit M une martingale bornée dans L^2. Pour tout temps d'arrêt T on a :

$$E\Big[E[\Delta M_T \mid \underline{\underline{F}}_{T-}]^2\Big] \leq E\Big[\langle M,M\rangle_{T-}\Big] \quad .$$

DEMONSTRATION. Quitte à multiplier M par $I_{\{T>0\}}$, nous pouvons supposer que $M_0 = 0$ sur $\{T = 0\}$.

a) Si M est quasi continue à gauche.

$$E\Big[E[\Delta M_T \mid \underline{\underline{F}}_{T-}]^2\Big] \leq E\Big[\Delta M_T^{\ 2}\Big] \leq E\Big[[M,M]_T\Big] = E\Big[\langle M,M\rangle_T\Big] = E\Big[\langle M,M\rangle_{T-}\Big] \quad .$$

b) Si M est accessible.

Soit $(S_n)_n$ une suite de temps d'arrêt prévisibles à graphes disjoints recouvrant la partie accessible de $[\![T]\!]$. Quitte à remplacer S_n par $+\infty$ sur $\{S_n>T\}$, nous pouvons supposer que $S_n \leq T$ sur $\{S_n < +\infty\}$.
M n'ayant que des temps de saut accessibles, nous avons la suite d'égalités: $E[\Delta M_T \mid \underline{\underline{F}}_{T-}]^2 = E[\Delta M_T \mid \underline{\underline{F}}_{T-}]^2\, I_{\{T=T_a\}} = \sum_n E[\Delta M_T \mid \underline{\underline{F}}_{T-}]^2\, I_{\{T=S_n\}}$
$= \sum_n E\big[\Delta M_{S_n} \mid \underline{\underline{F}}_{S_n-} \vee \{S_n<T\}\big]^2\, I_{\{T=S_n\}}$.

Posons $X_n = E\big[\Delta M_{S_n} \mid \underline{\underline{F}}_{S_n-} \vee \{S_n<T\}\big]$; on a $X_n\, I_{\{T=S_n\}} = X_n\, I_{\{S_n \geq T\}}$ car $\Delta M_\infty = 0$.

Le lemme de METIVIER-PELLAUMAIL appliqué à X_n, $\underline{\underline{B}}_n = \underline{\underline{F}}_{S_n-}$, $A_n = \{S_n < T\}$ donne:

$E[X_n^2 I_{\{S_n \geq T\}}] = E[E[X_n^2 | \underline{\underline{F}}_{S_n-}] I_{\{S_n < T\}}] \leq E[E[\Delta M_{S_n}^2 | \underline{\underline{F}}_{S_n-}] I_{\{S_n < T\}}] = E[\Delta \langle M,M\rangle_{S_n} I_{\{S_n \leq T\}}]$

En sommant ces inégalités, on obtient:

$E[E\ \Delta M_T | \underline{\underline{F}}_{T-}]^2 \leq E[\sum_n \Delta\langle M,M\rangle_{S_n} I_{\{S_n < T\}}] \leq E[\langle M,M\rangle_{T-}]$.

c) Cas général.

De la suite d'égalités: $E[\Delta M_T | \underline{\underline{F}}_{T-}]^2 = E[\Delta M_T | \underline{\underline{F}}_{T-}]^2 I_{\{T=T_i\}} + E[\Delta M_T | \underline{\underline{F}}_{T-}]^2 I_{\{T=T_a\}}$

$= E[\Delta M_T^i | \underline{\underline{F}}_{T-}]^2 + E[\Delta M_T^a | \underline{\underline{F}}_{T-}]^2$, on déduit:

$E[E[\Delta M_T | \underline{\underline{F}}_{T-}]^2] \leq E[\langle M^i,M^i\rangle_{T-} + \langle M^a,M^a\rangle_{T-}] = E[\langle M,M\rangle_{T-}]$.

Ce théorème admet pour corollaire immédiat, l'inégalité de METIVIER-PELLAUMAIL.

COROLLAIRE. Soit M une martingale bornée dans L^2. Pour tout temps d'arrêt T on a: $E[M_{T-}^{*2}] \leq 4\ E[\langle M,M\rangle_{T-} + [M^a,M^a]_{T-}]$.

DEMONSTRATION. On peut encore supposer que $M_0 = 0$ sur $\{T = 0\}$. Soit $\hat{M}$ la martingale égale à $M - (\Delta M_T^a - E[\Delta M_T^a | \underline{\underline{F}}_{T-}]) I_{[T,+\infty[}$. M et $\hat{M}$ coïncident sur $[0,T[$. On a donc $E[M_{T-}^{*2}] = E[\hat{M}_{T-}^{*2}] \leq E[\hat{M}_T^{*2}] \leq 4\ E[\hat{M}_T^2]$, cette dernière inégalité étant l'inégalité de DOOB.

Un calcul simple montre alors que $E[\hat{M}_T^2] = E[M_T^2 - \Delta M_T^{a2} + E[\Delta M_T^a | \underline{\underline{F}}_{T-}]^2]$

(car $\Delta M_T \Delta M_T^a = \Delta M_T^{a\ 2} = \Delta M_{T_a}^{\ 2}$) $= E[M_T^{i2} + M_T^{a2} - \Delta M_T^{a\ 2} + E[\Delta M_T^a | \underline{\underline{F}}_{T-}]^2]$.

Cette dernière expression vaut $E[\langle M^i,M^i\rangle_{T-} + [M^a,M^a]_{T-} + E[\Delta M_T^a | \underline{\underline{F}}_{T-}]^2]$ et est majorée, d'après le théorème 1, par $E[\langle M^i,M^i\rangle_{T-} + [M^a,M^a]_{T-} + \langle M^a,M^a\rangle_{T-}]$, égale à $E[\langle M,M\rangle_{T-} + [M^a,M^a]_{T-}]$ $(\leq E[\langle M,M\rangle_{T-} + [M,M]_{T-}])$.

REMARQUE. Si l'on raisonne sur la martingale $\bar{M} = M - (\Delta M_T - E[\Delta M_T | \underline{\underline{F}}_{T-}]) I_{[T,+\infty[}$ à la place de $\hat{M}$, on aura seulement l'inégalité :

$E[M_{T-}^{*2}] \leq 4\ E[\langle M,M\rangle_{T-} + [M^d,M^d]_{T-}] = 4\ E[[M,M]_{T-} + \langle M^d,M^d\rangle_{T-}]$.

REFERENCES

1 M. METIVIER et J. PELLAUMAIL. On a stopped Doob's inequality and general stochastic equations. Rapport interne n°28, Ec. Poly. 1978

2 P.A. MEYER. Présentation de "l'inégalité de Doob" de Métivier-Pellaumail Séminaire de Proba. XIII, lecture notes in M. n°721, Springer 1979.

Erik Lenglart
Université de Rouen, dép^t de math.
76 130 Mont saint Aignan.