SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

MICHEL ÉMERY

Métrisabilité de quelques espaces de processus aléatoires

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 14 (1980), p. 140-147
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1980__14__140_0>

Séminaire de Probabilités

Volume XIV

METRISABILITE DE QUELQUES ESPACES DE PROCESSUS ALEATOIRES

par M. Emery

L'espace $(\Omega,\underline{\underline{F}},P,(\underline{\underline{F}}_t)_{t\geq 0})$ vérifiant les conditions habituelles, on note

$\underline{\underline{R}}$ l'espace des processus càdlàg adaptés (muni de la quasi-norme $\|X\|_{\underline{\underline{R}}} = \sum_n 2^{-n}E[X_n^* \wedge 1]$, c'est un espace vectoriel topologique métrisable complet) ;

$\underline{\underline{R}}^1$ l'espace de Banach des processus càdlàg adaptés avec limite à l'infini, tels que $\|X\|_{\underline{\underline{R}}^1} = \|X^*\|_{L^1}$ soit fini ;

$\underline{\underline{V}}^1$ l'espace de Banach des processus à variation intégrable (avec la norme $\|A\|_{\underline{\underline{V}}^1} = E[\int_0^\infty |dA_s|]$) ;

$\underline{\underline{A}}^1$ le sous-espace fermé de $\underline{\underline{V}}^1$ formé des processus prévisibles nuls en 0 ;

$\underline{\underline{M}}^1$ le sous-espace fermé de $\underline{\underline{R}}^1$ formé des martingales (c'est l'« espace $\underline{\underline{H}}^1$ des martingales») ;

$\underline{\underline{S}}^1$ l'espace $\underline{\underline{M}}^1 \oplus \underline{\underline{A}}^1$ (c'est l'« espace $\underline{\underline{H}}^1$ des semimartingales »).

On désigne par $\underline{\underline{R}}^1_{loc}$ l'ensemble des processus X tels qu'il existe des temps d'arrêt T_n croissant vers l'infini pour lesquels chaque $X^{T_n} I_{\{T_n>0\}}$ est dans $\underline{\underline{R}}^1$; on définit de même l'espace $\underline{\underline{V}}^1_{loc}$ des processus à variation localement intégrable, l'espace $\underline{\underline{M}}^1_{loc}$ des martingales locales et l'espace $\underline{\underline{S}}^1_{loc}$ des semimartingales spéciales.

Si $(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de processus de $\underline{\underline{R}}^1_{loc}$ (respectivement $\underline{\underline{V}}^1_{loc}$, $\underline{\underline{M}}^1_{loc}$, $\underline{\underline{S}}^1_{loc}$), Dellacherie a montré dans [2] qu'il existe une suite croissant vers l'infini de temps d'arrêt T_n tels que, pour chaque k , $(X^k)^{T_n} I_{\{T_n>0\}}$ soit dans $\underline{\underline{R}}^1$ (respectivement $\underline{\underline{V}}^1$, $\underline{\underline{M}}^1$, $\underline{\underline{S}}^1$). Si en outre X est dans $\underline{\underline{R}}^1_{loc}$ (resp. ...), on dit que X^k converge vers X localement dans $\underline{\underline{R}}^1$ (resp. ...) lorsqu'il existe des temps d'arrêt T_n croissant vers l'infini tels que, pour chaque n , tous les $(X^k)^{T_n} I_{\{T_n>0\}}$ sont dans $\underline{\underline{R}}^1$ (resp. ...) et convergent dans cet espace vers $X^{T_n} I_{\{T_n>0\}}$.

DEFINITIONS. 1) Pour A dans $\underline{\underline{V}}^1_{loc}$, on appelle $\hat{A}$ la projection duale prévisible du processus croissant $\int_0^t |dA_s|$, et on pose $\|A\|_{\underline{\underline{V}}^1_{loc}} = \|\hat{A}\|_{\underline{\underline{R}}}$.

2) Pour X dans $\underline{\underline{R}}^1_{loc}$, on pose $\|X\|_{\underline{\underline{R}}^1_{loc}} = \|X^*\|_{\underline{\underline{V}}^1_{loc}}$.

3) Pour M dans $\underline{\underline{M}}^1_{loc}$, on pose $\|M\|_{\underline{\underline{M}}^1_{loc}} = \|M\|_{\underline{\underline{R}}^1_{loc}}$.

4) Pour X dans $\underline{\underline{S}}^1_{loc}$, de décomposition canonique $M+A$, on pose $\|X\|_{\underline{\underline{S}}^1_{loc}} = \|M\|_{\underline{\underline{M}}^1_{loc}} + \|A\|_{\underline{\underline{V}}^1_{loc}}$.

On vérifie immédiatement, grâce à la propriété correspondante de $\underline{\underline{R}}$, que chacune de ces expressions est une quasi-norme, et fait donc de l'espace correspondant un espace vectoriel topologique (cela résulte aussi du théorème suivant).

THEOREME. <u>Désignons par $\underline{\underline{X}}$ l'un des quatre espaces $\underline{\underline{V}}^1$, $\underline{\underline{R}}^1$, $\underline{\underline{M}}^1$ et $\underline{\underline{S}}^1$, et par $\underline{\underline{X}}_{loc}$ l'espace « localisé » correspondant.</u>

1) <u>Toute suite dans $\underline{\underline{X}}_{loc}$ qui converge localement dans $\underline{\underline{X}}$ converge dans $\underline{\underline{X}}_{loc}$ (c'est-à-dire pour $\| \ \|_{\underline{\underline{X}}_{loc}}$) vers la même limite.</u>

2) <u>De toute suite convergente de $\underline{\underline{X}}_{loc}$, on peut extraire une sous-suite qui converge localement dans $\underline{\underline{X}}$ vers la même limite.</u>

3) <u>L'espace $\underline{\underline{X}}_{loc}$ est complet.</u>

Les points 1) et 2) du théorème peuvent être reformulés ainsi : <u>Une suite dans $\underline{\underline{X}}_{loc}$ converge dans cet espace vers une limite</u> X <u>ssi toute sous-suite contient une sous-sous-suite qui converge vers</u> X <u>localement dans</u> $\underline{\underline{X}}$. On rapprochera ceci des propriétés analogues de $\underline{\underline{R}}$ et de l'espace des semimartingales (proposition 1 et théorème 2 de [3]).

<u>Démonstration</u>. Nous commencerons par le cas $\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{V}}^1$, qui, par l'existence de projections duales prévisibles, constitue la clé du théorème. Les autres cas en découleront ensuite.

Pour les points 1) et 2), on se ramène par translation au cas où la limite est nulle. Comme, pour A dans $\underline{\underline{V}}^1_{loc}$, $\|A\|_{\underline{\underline{V}}^1_{loc}} = \|\hat{A}\|_{\underline{\underline{V}}^1_{loc}}$, et comme A^n tend vers zéro localement dans $\underline{\underline{V}}^1$ ssi $\hat{A}^n$ tend vers zéro localement dans $\underline{\underline{V}}^1$, on peut, dans la démonstration des points 1) et 2), ne s'intéresser qu'à des processus croissants prévisibles.

1) Si des processus croissants prévisibles A^n tendent vers zéro localement dans $\underline{\underline{V}}^1$, ils tendent vers zéro prélocalement dans $\underline{\underline{V}}^1$ (i.e. $\lim_n E[(A^n)^{T_k-}] = 0$ pour des temps d'arrêt T_k croissant vers l'infini), donc (voir [3]) ils tendent vers zéro dans $\underline{\underline{R}}$, et le résultat est établi.

2) Soit (A^n) une suite de processus croissants prévisibles qui tend vers zéro dans $\underline{\underline{V}}^1_{loc}$; il s'agit d'en extraire une sous-suite qui tend vers zéro localement dans $\underline{\underline{V}}^1$. Par arrêt, on peut, compte tenu du résultat de Dellacherie rappelé ci-dessus, supposer que tous les A^n sont dans $\underline{\underline{V}}^1$. L'hypothèse entraîne que pour chaque t entier A^n_t tend vers zéro en probabilité ; de la suite (A^n) on peut donc, en utilisant le procédé diagonal de Cantor, extraire une sous-suite (B^n) telle que B^n_t tende vers zéro p.s. pour chaque t.

Soit alors E_m l'ensemble prévisible $\{(t,\omega) : \exists n \geq m \quad B^n_t(\omega) > 1\}$. Son début D_m est un temps d'arrêt qui croît vers l'infini avec m. En utilisant le fait que E_m est prévisible, on peut, grâce à un lemme de Lépingle ([4]) construire des temps d'arrêt bornés $T_{m,k}$ qui croissent vers D_m quand k tend vers l'infini, et tels que $[\![0,T_{m,k}]\!] \cap \mathbb{R}_+ \times \{T_{m,k}>0\} \cap E_m$ soit, pour chaque k, évanescent. Pour $n \geq m$, les variables aléatoires $B^n_{T_{m,k}} I_{\{T_{m,k}>0\}}$ sont majorées par 1 ; elles tendent donc vers zéro non seulement p.s., mais aussi dans L^1 quand n tend vers l'infini. Puisque la famille des $T_{m,k}$ est dénombrable et d'enveloppe supérieure p.s. infinie, ceci entraîne que B^n tend vers zéro localement dans $\underline{\underline{V}}^1$.

3) Le fait que $\underline{\underline{V}}^1_{loc}$ est un e.v.t. se déduit immédiatement des points 1) et 2). Pour vérifier qu'il est complet, considérons une série A^n dans $\underline{\underline{V}}^1_{loc}$ telle que $\sum_n \|A^n\|_{\underline{\underline{V}}^1_{loc}} < \infty$; posons $B^n_t = \int_0^t |dA^n_s|$, et appelons $\hat{A}^n$ le compensa-

teur prévisible de B^n. Puisque $\sum_n \|\widehat{A^n}\|_{\underline{\underline{R}}} < \infty$, soit S le processus croissant prévisible $\Sigma_n \widehat{A}^n$ (où la série converge dans $\underline{\underline{R}}$). Un tel processus est localement intégrable, il existe donc des temps d'arrêt T arbitrairement grands tels que $S_T I_{\{T>0\}}$ soit dans L^1, donc que $\Sigma_n E[B_T^n I_{\{T>0\}}] < \infty$. On en déduit que la série $\Sigma_n (A^n)^T I_{\{T>0\}}$ converge, dans l'espace de Banach $\underline{\underline{V}}^1$, vers une somme ${}^TA \in \underline{\underline{V}}^1$; il ne reste qu'à remarquer que les ${}^TA$ se recollent en un processus $A \in \underline{\underline{V}}^1_{loc}$ vers lequel la série $\Sigma_n A^n$ converge localement dans $\underline{\underline{V}}^1$, donc dans $\underline{\underline{V}}^1_{loc}$.

Passons à $\underline{\underline{R}}^1_{loc}$. Les points 1) et 2) se déduisent immédiatement des points correspondants pour $\underline{\underline{V}}^1_{loc}$ et de la définition de $\|\ \|_{\underline{\underline{R}}^1_{loc}}$. Pour la complétude, soit X^n une série dans $\underline{\underline{R}}^1_{loc}$ telle que $\sum_n \|X^n\|_{\underline{\underline{R}}^1_{loc}} < \infty$. La série $\Sigma_n X^n$ converge, dans l'espace complet $\underline{\underline{R}}$, vers une limite X ; la série $\Sigma_n (X^n)^*$ converge, dans l'espace complet $\underline{\underline{V}}^1_{loc}$, vers une limite S. Il existe des temps d'arrêt arbitrairement grands T tels que $S_T I_{\{T>0\}}$ soit intégrable ; on peut les choisir bornés, de telle sorte que $\Sigma_n (X^n)^T$ converge uniformément en probabilité vers X^T ; comme la convergence est dominée, sur $\{T>0\}$, par S_T, elle a aussi lieu dans $\underline{\underline{R}}^1$, d'où le résultat.

Il résulte des points 1) et 2) pour $\underline{\underline{R}}^1_{loc}$ que $\underline{\underline{M}}^1_{loc}$ est fermé dans $\underline{\underline{R}}^1_{loc}$; le théorème pour $\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{M}}^1$ en découle facilement. Comme $\underline{\underline{A}}^1_{loc}$ est fermé dans $\underline{\underline{V}}^1_{loc}$, le cas $\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{S}}^1$ ne présente aucune difficulté. —

REMARQUES. 1) Il résulte immédiatement du théorème que la convergence dans $\underline{\underline{X}}_{loc}$ est, comme l'appartenance à $\underline{\underline{X}}_{loc}$, une notion locale : Pour qu'une suite (X^n) converge (resp. converge vers X) dans $\underline{\underline{X}}_{loc}$, il suffit qu'il existe des temps d'arrêt T croissant vers l'infini tels que les $(X^n)^T I_{\{T>0\}}$ convergent (resp. convergent vers $X^T I_{\{T>0\}}$) dans $\underline{\underline{X}}_{loc}$.

2) Sur l'espace $\underline{\underline{M}}^1_{loc}$, les quasi-normes $\|[M,M]^{\frac{1}{2}}\|_{\underline{\underline{V}}^1_{loc}}$,

$$\sup_{\substack{H \text{ prévisible} \\ |H| \leq 1}} \|H \cdot M\|_{\underline{\underline{R}}^1_{loc}} , \qquad \sup_{\substack{H \text{ optionnel} \\ |H| \leq 1}} \|H \cdot M\|_{\underline{\underline{R}}^1_{loc}}$$ (cette dernière étant définie à l'aide des intégrales stochastiques optionnelles compensées) sont

équivalentes à $\|M\|_{\underline{\underline{M}}^1_{loc}}$; cela se vérifie immédiatement en utilisant les résultats correspondants dans $\underline{\underline{M}}^1$. De même, sur $\underline{\underline{S}}^1_{loc}$, les quasi-normes $\inf_{X = M + A} (\|M\|_{\underline{\underline{M}}^1_{loc}} + \|A\|_{\underline{\underline{V}}^1_{loc}})$ et $\sup_{\substack{H \text{ prévisible} \\ |H| \leq 1}} \|H \cdot X\|_{\underline{\underline{R}}^1_{loc}}$ sont équivalentes à $\|X\|_{\underline{\underline{S}}^1_{loc}}$.

3) Si l'on identifie à L^1 l'espace des martingales uniformément intégrables, on sait ([6]) que toute suite convergeant dans L^1 contient une sous-suite qui converge localement dans $\underline{\underline{M}}^1$. Ceci permet de modifier l'énoncé du théorème pour les martingales : Une suite de martingales locales converge dans $\underline{\underline{M}}^1_{loc}$ vers une limite M ssi toute sous-suite contient une sous-sous-suite qui converge localement dans L^1 vers M.

4) Aucun des espaces $\underline{\underline{V}}^1_{loc}$, $\underline{\underline{R}}^1_{loc}$ et $\underline{\underline{S}}^1_{loc}$ n'est séparable. En effet, si l'un d'eux contenait une suite dense, on pourrait construire une suite de temps d'arrêt qui épuiserait les sauts des processus de la suite, donc aussi les sauts de tous les processus de cet espace. Mais comme cet espace contient tous les processus de la forme $I_{[\![s,\infty[\![}$, ceci est impossible. L'espace $\underline{\underline{M}}^1_{loc}$, en revanche, est parfois séparable ; par exemple lorsque la filtration est constante et égale à une tribu essentiellement séparable.

5) Que se passe-t-il si, dans ce qui précède, on remplace l'exposant 1 par $p \in]1,\infty[$? On peut encore définir une topologie sur $\underline{\underline{V}}^p_{loc}$ par $\|A\|_{\underline{\underline{V}}^p_{loc}} = \|C\|_{\underline{\underline{V}}^1_{loc}}$, où C est la projection duale prévisible du processus croissant $(\int_0^t |dA_s|)^p$; bien que $\| \ \|_{\underline{\underline{V}}^p_{loc}}$ ne soit pas une quasi-norme (au lieu de l'inégalité triangulaire, elle vérifie seulement $\|A+B\| \leq 2^{p-1} (\|A\| + \|B\|)$), elle fait quand même de $\underline{\underline{V}}^p_{loc}$ un e.v.t. métrisable, qui vérifie les points 1) et 2) du théorème, avec $\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{V}}^p$. Il en va de même pour $\underline{\underline{R}}^p_{loc}$, $\underline{\underline{M}}^p_{loc}$ et $\underline{\underline{S}}^p_{loc}$. Mais notre démonstration de la complétude ne semble pas s'adapter à ce cas.

La suite de cet exposé est consacrée à des énoncés qui, sans faire appel à des idées vraiment nouvelles, s'expriment naturellèment en termes de topologie des martingales locales et de topologie des semimartingales spéciales.

DEFINITION. Soit H un processus prévisible.

a) Pour X dans $\underline{\underline{M}}^1$ (resp. $\underline{\underline{M}}^1_{loc}$), on dira que H est X-intégrable au sens de $\underline{\underline{M}}^1$ (resp. $\underline{\underline{M}}^1_{loc}$) si le processus croissant $(\int_0^t H_s^2 d[X,X]_s)^{\frac{1}{2}}$ est dans $\underline{\underline{V}}^1$ (resp. $\underline{\underline{V}}^1_{loc}$).

b) Pour X dans $\underline{\underline{S}}^1$ (resp. $\underline{\underline{S}}^1_{loc}$), de décomposition canonique $M+A$, on dira que H est X-intégrable au sens de $\underline{\underline{S}}^1$ (resp. $\underline{\underline{S}}^1_{loc}$) si H est M-intégrable au sens de $\underline{\underline{M}}^1$ (resp. $\underline{\underline{M}}^1_{loc}$) et si l'intégrale $H \cdot A$ existe au sens de Stieltjes et est dans $\underline{\underline{V}}^1$ (resp. $\underline{\underline{V}}^1_{loc}$).

Dans chacun de ces cas, on sait définir l'intégrale stochastique $H \cdot X$; le lecteur connaissant l'intégration au sens de Jacod ([1]) remarquera que si X est dans l'un des quatre espaces évoqués ci-dessus, pour que H soit X-intégrable au sens de cet espace, il faut et il suffit qu'il le soit au sens des semimartingales et que l'intégrale $H \cdot X$ soit dans cet espace : c'est un théorème de Jeulin (théorème 2 de [1]).

Ceci permet d'énoncer un théorème de convergence dominée :

PROPOSITION 1. <u>Le processus</u> X <u>étant dans l'espace</u> $\underline{\underline{M}}^1$ (<u>resp.</u> $\underline{\underline{S}}^1$, $\underline{\underline{M}}^1_{loc}$, $\underline{\underline{S}}^1_{loc}$), <u>soit</u> H <u>un processus prévisible</u> X-<u>intégrable au sens de cet espace</u>. <u>Si</u> (K^n) <u>est une suite de processus prévisibles</u>, <u>tous dominés par</u> $|H|$, <u>qui converge simplement vers un processus</u> K, <u>les intégrales</u> $K^n \cdot X$ <u>convergent vers</u> $K \cdot X$ <u>dans cet espace</u>.

<u>Démonstration</u>. Comme $|K^n - K| \leq 2H$, on peut supposer que $K = 0$.

1) Pour établir le résultat dans $\underline{\underline{M}}^1$, il faut montrer que, quand n tend vers l'infini, la quantité $E[(\int_0^\infty (K_s^n)^2 \, d[X,X]_s)^{\frac{1}{2}}]$, équivalente à $\|K^n \cdot X\|_{\underline{\underline{M}}^1}$, tend vers zéro. Puisque les v.a. $(\int_0^\infty (K_s^n)^2 \, d[X,X]_s)^{\frac{1}{2}}$ sont dominées dans L^1 par $(\int_0^\infty H_s^2 \, d[X,X]_s)^{\frac{1}{2}}$, il suffit de démontrer qu'elles tendent p.s. vers zéro. Mais pour chaque ω tel que $\int_0^\infty H_s^2 \, d[X,X]_s$ soit fini, donc pour presque tout ω, le théorème de convergence dominée sur $(\mathbb{R}_+, d[X,X](\omega))$ entraîne que $\int_0^\infty (K_s^n)^2 \, d[X,X]_s$ tend vers zéro, d'où le résultat.

2) Comme $\underline{\underline{S}}^1 = \underline{\underline{M}}^1 \oplus \underline{\underline{A}}^1$, il suffit, pour avoir le théorème dans $\underline{\underline{S}}^1$, de démontrer un résultat analogue dans $\underline{\underline{A}}^1$. Mais les éléments de $\underline{\underline{A}}^1$ s'iden-

tifient à des mesures sur la tribu prévisible, auxquelles s'applique le théorème de convergence dominée usuel.

3) La démonstration du théorème pour $\underline{\underline{M}}^1_{loc}$ ou $\underline{\underline{S}}^1_{loc}$ se ramène aussitôt, par localisation, au cas déjà traité de $\underline{\underline{M}}^1$ ou $\underline{\underline{S}}^1$. On obtient un peu mieux que le résultat annoncé : La convergence de $K^n\cdot X$ vers $K\cdot X$ a lieu non seulement dans $\underline{\underline{M}}^1_{loc}$ ou $\underline{\underline{S}}^1_{loc}$, mais aussi localement dans $\underline{\underline{M}}^1$ ou $\underline{\underline{S}}^1$. ▬

La caractérisation de la topologie des semimartingales par des convergences ayant lieu prélocalement dans $\underline{\underline{S}}^1$ (voir [3]) montre que l'injection canonique de $\underline{\underline{M}}^1$ (resp. $\underline{\underline{S}}^1$, $\underline{\underline{M}}^1_{loc}$, $\underline{\underline{S}}^1_{loc}$) dans l'espace des semimartingales est continue. Le théorème de Mémin ([5]) selon lequel, pour X donné, l'ensemble des intégrales stochastiques $H\cdot X$ est fermé dans l'espace des semimartingales entraîne donc immédiatement que, <u>si</u> X <u>est dans l'espace</u> $\underline{\underline{M}}^1$ (<u>resp</u>. $\underline{\underline{S}}^1$, $\underline{\underline{M}}^1_{loc}$, $\underline{\underline{S}}^1_{loc}$), <u>l'ensemble</u> $\underline{\underline{I}}(X)$ <u>des processus prévisibles</u> X-<u>intégrables au sens de cet espace est fermé dans cet espace</u>. Plus généralement, on pourrait transcrire dans ce cadre le résultat u) de [1].

En plagiant Yor ([6], lemmes 2.2 et 2.3), on peut préciser ce résultat de fermeture par une description des sous-espaces stables. La proposition qui suit reste vraie, avec la même démonstration, dans l'espace des semimartingales, en y remplaçant $\underline{\underline{I}}(X)$ par l'ensemble de toutes les intégrales stochastiques par rapport à X.

PROPOSITION 2. a) <u>Pour</u> X <u>dans l'espace</u> $\underline{\underline{M}}^1$ (<u>resp</u>. $\underline{\underline{S}}^1$, $\underline{\underline{M}}^1_{loc}$, $\underline{\underline{S}}^1_{loc}$), $\underline{\underline{I}}(X)$ <u>est le plus petit sous-espace vectoriel fermé de cet espace qui contienne</u> X <u>et soit stable par les opérations d'arrêt</u> $Y \longmapsto Y^T I_{\{T>0\}}$.

b) <u>Si</u> $\underline{\underline{H}}$ <u>est une partie de l'espace</u> $\underline{\underline{M}}^1$ (<u>resp</u>. $\underline{\underline{S}}^1$, $\underline{\underline{M}}^1_{loc}$, $\underline{\underline{S}}^1_{loc}$), <u>le sous-espace vectoriel fermé</u> $\underline{\underline{I}}(\underline{\underline{H}})$ <u>engendré par</u> $\cup_{X\in \underline{\underline{H}}} \underline{\underline{I}}(X)$ <u>est le plus petit qui contienne</u> $\underline{\underline{H}}$ <u>et soit stable par les opérations d'arrêt</u>.

<u>Démonstration</u>. a) On vient de voir que $\underline{\underline{I}}(X)$ est fermé ; il est stable par arrêt car $(H\cdot X)^T I_{\{T>0\}} = (H I_{[\![0,T]\!]} I_{\{T>0\}})\cdot X$. Soit $\underline{\underline{J}}$ un sous-espace fermé stable

par arrêt contenant X . L'ensemble des processus prévisibles bornés H tels que $H\cdot X$ soit dans $\underline{\underline{J}}$ contient les intervalles stochastiques prévisibles $]\!]S,T]\!]$, et (proposition 1) est stable par convergence uniforme et convergence monotone bornée ; $\underline{\underline{J}}$ contient donc l'ensemble de toutes les intégrales $H\cdot X$, où H est prévisible borné ; mais l'adhérence de cet ensemble n'est autre que $\underline{\underline{I}}(X)$.

b) Le sous-espace vectoriel engendré par $\cup_{X\in\underline{\underline{H}}} \underline{\underline{I}}(X)$ étant stable par arrêt, et les opérations d'arrêt étant continues, $\underline{\underline{I}}(\underline{\underline{H}})$ est stable par arrêt, d'où le résultat. ▬

REFERENCES

[1] CHOU C.S., P.A. MEYER et C. STRICKER. Sur les intégrales stochastiques de processus prévisibles non bornés. Dans ce volume.

[2] C. DELLACHERIE. Quelques applications du lemme de Borel-Cantelli à la théorie des semimartingales. Séminaire de Probabilités XII, Lecture Notes N° 649, Springer-Verlag 1978.

[3] M. EMERY. Une topologie sur l'espace des semimartingales. Séminaire de Probabilités XIII, Lecture Notes N° 721, Springer-Verlag 1979.

[4] E. LENGLART, D. LEPINGLE et M. PRATELLI. Présentation unifiée de certaines inégalités de la théorie des martingales. Scuola Normale Superiore, Pisa (Preprint).

[5] J. MEMIN. Espaces de semimartingales et changements de probabilité. A paraître dans Z. Wahrscheinlichkeitstheorie.

[6] M. YOR. Sous-espaces denses dans L^1 ou H^1 et représentation des martingales. Séminaire de Probabilités XII, Lecture Notes N° 649, Springer-Verlag 1978.

IRMA (L.A. au C.N.R.S.)
7 rue René Descartes
67084 STRASBOURG-Cédex