JEAN JACOD

Intégrales stochastiques par rapport à une semi-martingale vectorielle et changements de filtration

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 14 (1980), p. 161-172
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1980__14__161_0>

INTEGRALES STOCHASTIQUES PAR RAPPORT A UNE SEMIMARTINGALE VECTORIELLE ET CHANGEMENTS DE FILTRATION

par Jean JACOD

Nous avons introduit en [4] l'intégrale stochastique d'un processus prévisible non nécessairement localement borné par rapport à une semimartingale réelle. Nous proposons ci-dessous d'étendre cette construction au cas de l'intégrale d'un processus n-dimensionnel $\underline{H} = (H^i)_{i \leq n}$ par rapport à une semimartingale n-dimensionnelle $\underline{X} = (X^i)_{i \leq n}$, l'unique difficulté provenant de ce que l'intégrale de $\underline{H}$ par rapport à $\underline{X}$ peut parfois être définie "globalement", sans que les intégrales des H^i par rapport aux X^i existent.

Il s'agit à l'évidence d'une généralisation triviale (d'ailleurs, une bonne partie de cet article est consacrée à des rappels, la construction elle-même étant simple). Néanmoins il semble souhaitable de disposer d'une telle construction quand on veut étudier en toute généralité les équations différentielles stochastiques avec un processus directeur qui est une semimartingale vectorielle (à la manière de [2], [10], [12]), et nous l'avons utilisé dans l'article [7].

Nous profitons également de cet article pour rectifier une grave erreur qui s'est glissée dans [6], Théorème (9.26), et qui concerne les changements de filtration: soit X un processus qui est une semimartingale réelle relativement à deux filtrations $\underline{F} = (\underline{\underline{F}}_t)$ et $\underline{G} = (\underline{\underline{G}}_t)$, telles que $\underline{\underline{G}}_t \subset \underline{\underline{F}}_t$ pour tout $t \geq 0$. Dans [6] il est affirmé qu'un processus $\underline{G}$-prévisible réel est $\underline{G}$-intégrable par rapport à X si et seulement s'il est $\underline{F}$-intégrable. Or, seule la condition suffisante est vraie (un contre-exemple à la condition nécessaire, dû à Jeulin, est donné dans [1]). Nous montrons néanmoins que cette condition est nécessaire et suffisante lorsque X satisfait une hypothèse supplémentaire (ce résultat est aussi utilisé dans [7]).

<u>1 - L'INTEGRALE VECTORIELLE</u>. Soit $(\Omega, \underline{\underline{F}}, (\underline{\underline{F}}_t), P)$ un espace probabilisé filtré. Les notations et la terminologie sont celles de [6] et [9]. En particulier le "processus intégrale" (de Stieltjes ou stochastique) de H

par rapport à X sera toujours noté $H\bullet X$. On désigne par $\underline{\underline{V}}$, $\underline{\underline{A}}_{loc}$, $\underline{\underline{L}}$ respectivement les espaces de processus à variation finie, de processus à variation localement intégrable, de martingales locales nulles en 0. Enfin pour tout processus X, on pose $\Delta X_t = X_t - X_{t-}$ et $X_{0-} = 0$.

<u>a - Rappels: intégrales stochastiques par rapport à une martingale locale vectorielle</u> (d'après [5] et [6], ch. IV). Soit $\underline{M} = (M^i)_{i\leq n}$ une martingale locale vectorielle. Il existe un élément C de $\underline{\underline{V}}$, croissant, et un processus $\underline{\underline{c}} = (c^{ij})_{i,j\leq n}$ à valeurs dans l'espace des matrices symétriques non-négatives $n\times n$, tels que

$$(1) \qquad [M^i,M^j] = c^{ij}\bullet C.$$

Si $q\in[1,\infty[$ on note $L^q_{loc}(\underline{M})$ l'ensemble des processus prévisibles $\underline{H} = (H^i)_{i\leq n}$ tels que le processus croissant

$$[(\textstyle\sum_{i,j\leq n} H^i c^{ij} H^j)\bullet C]^{q/2}$$

soit dans $\underline{\underline{A}}_{loc}$. L'ensemble $L^q_{loc}(\underline{M})$ ne dépend pas du couple $(C,\underline{\underline{c}})$ choisi, pourvu qu'il satisfasse (1).

Si $\underline{H}\in L^1_{loc}(\underline{M})$, le processus intégrale stochastique ${}^t\underline{H}\bullet\underline{M}$ ("t" pour transposé) est l'unique martingale locale vérifiant

$$(2) \qquad \begin{cases} [{}^t\underline{H}\bullet\underline{M},N] = (\sum_{i\leq n} H^iK^i)\bullet C & \text{pour toute martingale locale } N, \\ \text{les } K^i \text{ étant des processus tels que } [M^i,N] = K^i\bullet C. \end{cases}$$

On sait que si $H^i\in L^1_{loc}(M^i)$ pour chaque $i\leq n$, alors $\underline{H}\in L^1_{loc}(\underline{M})$ et

$$(3) \qquad {}^t\underline{H}\bullet\underline{M} = \textstyle\sum_{i\leq n} H^i\bullet M^i.$$

Rappelons en outre le fait suivant ([3],[11]): supposons que $\underline{M}$ soit localement de carré intégrable. Il existe alors un élément $\tilde{C}$ de $\underline{\underline{V}}$, croissant et prévisible, et un processus prévisible $\tilde{\underline{\underline{c}}} = (\tilde{c}^{ij})_{i,j\leq n}$, tels que

$$\langle M^i,M^j\rangle = \tilde{c}^{ij}\bullet\tilde{C};$$

dans ce cas, $L^2_{loc}(\underline{M})$ est aussi l'ensemble des processus prévisibles

$\underline{H}$ tels que le processus croissant $(\sum_{i,j\leq n} H^i \tilde{c}^{ij} H^j)\bullet\tilde{C}$ soit dans $\underline{\underline{V}}$. En particulier si $\underline{M}$ est continue, on est dans ce cas, et de plus on a $L^q_{loc}(\underline{M}) = L^2_{loc}(\underline{M})$ pour tout $q \geq 1$.

<u>b - Intégrales de Stieltjes par rapport à un processus vectoriel</u>. Soit $\underline{A} = (A^i)_{i\leq n}$ un processus dont les composantes sont dans $\underline{\underline{V}}$, et $\underline{H} = (H^i)_{i\leq n}$ un processus vectoriel. Lorsque les intégrales de Stieltjes $H^i\bullet A^i$ existent, on pose naturellement

$$(4) \qquad {}^t\underline{H}\bullet\underline{A} = \sum_{i\leq n} H^i\bullet A^i .$$

Mais, de même que pour les martingales locales, on peut parfois donner un sens à ${}^t\underline{H}\bullet\underline{A}$ lorsque les $H^i\bullet A^i$ ne sont pas définis.

En effet, il existe un processus croissant $A \in \underline{\underline{V}}$ et un processus $a = (a^i)_{i\leq n}$ optionnel, tels que

$$(5) \qquad A^i = a^i\bullet A$$

(si $\underline{A}$ est prévisible, on peut choisir A et a prévisibles). On note alors $L_s(\underline{A})$ l'ensemble des processus prévisibles $\underline{H} = (H^i)_{i\leq n}$ tels que le processus croissant $|\sum_{i\leq n} H^i a^i|\bullet A$ soit dans $\underline{\underline{V}}$, et on pose

$$(6) \qquad {}^t\underline{H}\bullet\underline{A} = (\sum_{i\leq n} H^i a^i)\bullet A .$$

On obtient à l'évidence une généralisation de (4). L'espace $L_s(\underline{A})$ et l'intégrale ${}^t\underline{H}\bullet\underline{A}$ ne dépendent pas du couple (A,a) choisi, pourvu qu'il satisfasse (5). L'indise "s" est pour <u>S</u>tieltjes.

Le lemme suivant montre que la notation ${}^t\underline{H}\bullet\underline{A}$ n'est pas ambigue.

LEMME 1 : <u>Soit $\underline{A}$ un processus vectoriel dont les composantes sont dans $\underline{\underline{L}} \cap \underline{\underline{V}}$. Soit $\underline{H} \in L^1_{loc}(\underline{A}) \cap L_s(\underline{A})$. Le processus intégrale stochastique de $\underline{H}$ par rapport à $\underline{A}$</u> (considéré comme martingale locale) <u>coïncide avec le processus intégrale de Stieltjes (6)</u>.

<u>Démonstration</u>. Notons N et M respectivement les processus intégrales stochastique et de Stieltjes. Soit $F(m) = \{|\underline{H}| \leq m\}$ et $\underline{H}(m) = \underline{H}\, I_{F(m)}$. Comme $\underline{H}(m)$ est borné, on peut considérer $H(m)^i\bullet A^i$ indifféremment comme intégrale stochastique ou de Stieltjes, tandis que si $X(m) =$

$\sum_{i\leq n} H(m)^i \cdot A^i$ on a $X(m) = I_{F(m)} \cdot N$ (intégrale stochastique) et $X(m) = I_{F(m)} \cdot M$ (intégrale de Stieltjes).

La suite $F(m)$ croît vers $\Omega \times \mathbb{R}_+$. Donc $I_{F(m)} \cdot N$ tend vers N en probabilité uniformément sur tout compact d'après le théorème de convergence dominée pour les martingales locales, et $I_{F(m)} \cdot M$ tend vers M partout d'après le théorème de convergence dominée appliqué pour chaque ω à $dM_t(\omega)$: donc $M = N$. ∎

<u>c - Rappels: intégrales stochastiques par rapport à une semimartingale réelle</u>. Soit X une semimartingale. D'après [6], (2.71), l'espace des intégrands prévisibles par rapport à X est l'ensemble $L(X)$ des processus prévisibles H tels qu'il existe une décomposition $X = M + A$ avec

$$(7) \qquad \begin{cases} M \in \underline{\underline{L}}, & H \in L^1_{loc}(M) \\ A \in \underline{\underline{V}}, & H \in L_s(A) \end{cases}$$

(noter que cette décomposition $X = M + A$ dépend de H). Dans ce cas, l'intégrale stochastique est définie par

$$H \cdot X = H \cdot M + H \cdot A,$$

cette expression ne dépendant pas de la décomposition $X = M + A$ de type (7) choisie. On a les propriétés suivantes:

(8) Si K est prévisible borné et si $H \in L(X)$, alors $KH \in L(X)$, $K \in L(H \cdot X)$, et $(KH) \cdot X = K \cdot (H \cdot X)$.

(9) Si X est une martingale locale, $L^1_{loc}(X) \subset L(X)$.

(10) Si $X \in \underline{\underline{V}}$, alors $L_s(X) \subset L(X)$.

(11) $L(X) \cap L(Y) \subset L(X+Y)$ et $H \cdot X + H \cdot Y = H \cdot (X+Y)$.

(12) $L(X)$ est un espace vectoriel, et $H \cdot X + K \cdot X = (H+K) \cdot X$.

Les quatre premières propriétés sont évidentes (les inclusions dans (9) et (10) sont en général strictes). Par contre la propriété (12) est loin d'être triviale; elle sera redémontrée plus bas dans le cas vectoriel.

Enfin, le fait que $L(X)$ soit l'espace "maximal" d'intégrands prévisibles ayant les propriétés (8) à (12) est discuté dans [6]: c'est une application de la caractérisation des sauts des semimartingales, obtenue en [4]. Le caractère maximal de $L(X)$ est confirmé par le résultat suivant, dû à Mémin [8]: l'espace $\{H\bullet X : H \in L(X)\}$ est fermé dans l'espace des semimartingales, pour la topologie d'Emery.

d - Intégrale stochastique par rapport à une semimartingale vectorielle.
Soit $\underline{X} = (X^i)_{i\leq n}$ une semimartingale vectorielle. Par analogie avec ce qui précède, il est naturel de noter $L(\underline{X})$ l'ensemble des processus prévisibles $\underline{H} = (H^i)_{i\leq n}$ tels qu'il existe une décomposition $\underline{X} = \underline{M} + \underline{A}$ avec

$$(13) \qquad \begin{cases} \underline{M} = (M^i)_{i\leq n} \text{ avec } M^i \in \underline{\underline{L}}, \text{ et } \underline{H} \in L^1_{loc}(\underline{M}) \\ \underline{A} = (A^i)_{i\leq n} \text{ avec } A^i \in \underline{\underline{V}}, \text{ et } \underline{H} \in L_s(\underline{A}), \end{cases}$$

et on définit alors l'intégrale stochastique ${}^t\underline{H}\bullet\underline{X}$ par

$$(14) \qquad {}^t\underline{H}\bullet\underline{X} = {}^t\underline{H}\bullet\underline{M} + {}^t\underline{H}\bullet\underline{A}.$$

D'après le lemme 1, cette expression ne dépend pas de la décomposition de type (13) choisie. Il est également évident qu'on a les propriétés (8), (9), (10), (11), ainsi que

(15) Si $H^i \in L(X^i)$ pour tout i, alors $\underline{H} \in L(\underline{X})$ et ${}^t\underline{H}\bullet\underline{X} = \sum_{i\leq n} H^i\bullet X^i$.

Afin de démontrer la propriété (12), nous commençons par un résultat intéressant en lui-même (dans le cas uni-dimensionnel, il découle de [6], (2.69,b), en prenant $D = \emptyset$; il est aussi démontré dans [1] par une méthode différente).

PROPOSITION 2 : <u>On suppose que $\underline{X}$ est spéciale et admet la décomposition canonique $\underline{X} = \underline{M} + \underline{A}$. Soit $\underline{H} \in L(\underline{X})$. Alors ${}^t\underline{H}\bullet\underline{X}$ est une semimartingale spéciale si et seulement si $\underline{H}$ appartient à $L^1_{loc}(\underline{M})$ et à $L_s(\underline{A})$, et dans ce cas sa décomposition canonique est</u>

$$(16) \qquad {}^t\underline{H}\bullet\underline{X} = {}^t\underline{H}\bullet\underline{M} + {}^t\underline{H}\bullet\underline{A}.$$

<u>Démonstration</u>. La condition suffisante est évidente. Inversement, supposons que $Y = {}^t\underline{H}\cdot\underline{X}$ soit spéciale, de décomposition canonique $Y = N + B$. Soit $F(m) = \{|\underline{H}| \leq m\}$ et $\underline{H}(m) = \underline{H}\, I_{F(m)}$. On peut intégrer $\underline{H}(m)$ composante par composante, et la semimartingale $Y(m) = I_{F(m)}\cdot Y = {}^t\underline{H}(m)\cdot\underline{X}$ est spéciale, de décomposition canonique $Y(m) = N(m) + B(m)$, avec

$$N(m) = I_{F(m)}\cdot N = {}^t\underline{H}(m)\cdot\underline{M}\,, \qquad B(m) = I_{F(m)}\cdot B = {}^t\underline{H}(m)\cdot\underline{A}\,.$$

Considérons un couple $(C,\underline{\underline{c}})$ associé à $\underline{M}$ par (1). On a

$$I_{F(m)}\cdot[N,N] = [N(m),N(m)] = \left(\sum_{i,j\leq n} H(m)^i c^{ij} H(m)^j\right)\cdot C$$
$$= \left[I_{F(m)}\left(\sum_{i,j\leq n} H^i c^{ij} H^j\right)\right]\cdot C\,,$$

et comme $F(m)$ croît vers $\Omega\times\mathbb{R}_+$ on en déduit que

$$\left[\left(\sum_{i,j\leq n} H^i c^{ij} H^j\right)\cdot C\right]^{1/2} = [N,N]^{1/2}$$

est dans $\underline{\underline{A}}_{loc}$. Donc $\underline{H}\in L^1_{loc}(\underline{M})$. De même si le couple (A,a) est associé à $\underline{A}$ par (5), et si $B'_t = \int_0^t |dB_s|$, on a:

$$I_{F(m)}\cdot B' = \left|\sum_{i\leq n} H(m)^i a^i\right|\cdot A = \left[I_{F(m)}\left|\sum_{i\leq n} H^i a^i\right|\right]\cdot A\,,$$

donc $\left|\sum_{i\leq n} H^i a^i\right|\cdot A = B' \in \underline{\underline{V}}$ et $\underline{H}\in L_s(\underline{A})$. Enfin, le fait que (16) donne la décomposition canonique de Y est évident. ∎

On dit qu'un ensemble aléatoire D est <u>discret</u> si ses coupes $\{t : (\omega,t)\in D,\ t\leq s\}$ sont finies pour tout $s<\infty$ et presque tout $\omega\in\Omega$. Par exemple, l'ensemble aléatoire $\{|\Delta\underline{X}|>1\}$ est discret. Si D est un ensemble aléatoire discret optionnel, on pose

$$(18) \qquad \underline{\tilde{X}}^D = \underline{X}_0 + \sum_{0<s\leq\cdot} \Delta\underline{X}_s\, I_D(s)\,, \qquad \underline{X}^D = \underline{X} - \underline{\tilde{X}}^D\,.$$

Remarquons que $\underline{\tilde{X}}^D$ est bien défini (ses composantes sont dans $\underline{\underline{V}}$) et, lorsque $\{|\Delta\underline{X}|>1\}\subset D$, la semimartingale $\underline{X}^D$ est spéciale puisque ses sauts sont d'amplitude inférieure ou égale à 1.

La proposition suivante permet, lorsque $\underline{H}\in L(\underline{X})$, de construire une décomposition $\underline{X} = \underline{M} + \underline{A}$ de type (13) de manière intrinsèque

PROPOSITION 3 : Soit $\underline{H} \in L(\underline{X})$.

(a) L'ensemble aléatoire $D_o = \{|\Delta\underline{X}| > 1\} \cup \{|{}^t\underline{H}\Delta\underline{X}| > 1\}$ est discret (avec la notation ${}^t\underline{H}\Delta\underline{X} = \sum_{i\leq n} H^i \Delta X^i$).

(b) Soit D un ensemble discret optionnel contenant D_o . Soit $\underline{X}^D = \underline{N} + \tilde{\underline{B}}$ la décomposition canonique de $\underline{X}^D$, et $\underline{B} = \tilde{\underline{X}}^D + \tilde{\underline{B}}$. Alors $\underline{H}$ appartient à $L^1_{loc}(\underline{N})$ et à $L_s(\underline{B})$ (en d'autres termes, la décomposition $\underline{X} = \underline{N} + \underline{B}$ vérifie (13) relativement à $\underline{H}$).

Démonstration. Soit $\underline{X} = \underline{M} + \underline{A}$ une décomposition de type (13) relativement à $\underline{H}$, et $Y = {}^t\underline{H}\bullet\underline{X}$.

(a) C'est immédiat, puisque $\Delta Y = {}^t\underline{H}\Delta\underline{X}$ d'après (14).

(b) Définissons $\tilde{Y}^D$ et Y^D à partir de Y par les formules (18). Comme D est discret, on a à l'évidence $\underline{H} \in L_s(\tilde{\underline{X}}^D)$ et $\tilde{Y}^D = {}^t\underline{H}\bullet\tilde{\underline{X}}^D$. D'après (11) il vient alors $\underline{H} \in L(\underline{X}^D)$ et $Y^D = {}^t\underline{H}\bullet\underline{X}^D$. Comme $\underline{X}^D$ et Y^D sont spéciales, le résultat découle de la proposition 2. ∎

COROLLAIRE 4 : $L(\underline{X})$ est un espace vectoriel, et si $\underline{H}, \underline{K} \in L(\underline{X})$ on a ${}^t\underline{H}\bullet\underline{X} + {}^t\underline{K}\bullet\underline{X} = {}^t(\underline{H}+\underline{K})\bullet\underline{X}$.

Démonstration. Soit $\underline{H}, \underline{K} \in L(\underline{X})$. L'ensemble $D = \{|\Delta\underline{X}| > 1\} \cup \{|{}^t\underline{H}\Delta\underline{X}| > 1\} \cup \{|{}^t\underline{K}\Delta\underline{X}| > 1\}$ est optionnel, discret, et vérifie la condition (b) de la proposition 3 relativement à $\underline{H}$ et à $\underline{K}$. Les processus $\underline{H}$ et $\underline{K}$ sont donc dans $L^1_{loc}(\underline{N})$ $L_s(\underline{B})$, et le résultat en découle. ∎

REMARQUE 5 : Dans la proposition 3 on a $|\Delta\underline{N}| \leq 2$ et $|{}^t\underline{H}\Delta\underline{N}| \leq 2$, de sorte que $\underline{N}$ est localement de carré intégrable et que $\underline{H} \in L^2_{loc}(\underline{N})$. ∎

REMARQUE 6 : Mémin [8] a montré que l'espace $\{{}^t\underline{H}\bullet\underline{X} : \underline{H} \in L(\underline{X})\}$ est fermé pour la topologie d'Emery dans l'espace des semimartingales réelles. Ce fait exprime que $L(\underline{X})$ est le plus grand espace raisonnable d'intégrands. ∎

2 - CHANGEMENT DE FILTRATION ET SEMIMARTINGALES

Dans cette partie on note $\underline{F}$ la filtration $(\underline{\underline{F}}_t)$, et on considère une autre filtration $\underline{G} = (\underline{\underline{G}}_t)$ telle que $\underline{\underline{G}}_t \subset \underline{\underline{F}}_t$ pour tout $t \geq 0$. On sait que la $\underline{F}$-semimartingale $\underline{X}$ est une $\underline{G}$-semimartingale si et seulement le processus $\underline{X}$ est $\underline{G}$-adapté (théorème de Stricker).

Dans toute la suite, on suppose que $\underline{X}$ est une semimartingale vectorielle, relativement à $\underline{F}$ et à $\underline{G}$. On note $L(\underline{X},\underline{F})$ et $L(\underline{X},\underline{G})$, respectivement, les espaces de processus $\underline{F}$ (resp. $\underline{G}$) prévisibles qui sont intégrables par rapport à $\underline{X}$, considéré comme une semimartingale relativement à $\underline{F}$ (resp. $\underline{G}$).

Nous avons affirmé dans le Théorème (9.26) de [6] que, dans le cas unidimensionnel, un processus $\underline{G}$-prévisible réel est dans $L(X,\underline{G})$ si et seulement s'il est dans $L(X,\underline{F})$. Or la démonstration est fausse (l'affirmation "$H\bullet A \in \underline{\underline{A}}(\underline{F})$", l.3 de la p.291, est erronée) et Jeulin a donné un contre-exemple à la "condition nécessaire": voir [1]. La condition suffisante est vraie (la démonstration de [6] est apparemment juste dans ce cas, une autre démonstration est donnée en [1]) pour le cas uni-dimensionnel, et également dans le cas vectoriel comme nous le montrons ci-dessous:

THEOREME 7 : <u>Tout processus $\underline{G}$-prévisible $\underline{H}$ appartenant à $L(\underline{X},\underline{F})$ est dans $L(\underline{X},\underline{G})$, et l'intégrale stochastique de $\underline{H}$ par rapport à $\underline{X}$ est la même, relativement aux deux filtrations $\underline{F}$ et $\underline{G}$.</u>

<u>Démonstration</u>. (i) Supposons d'abord $\underline{H}$ borné. On a $\underline{H} \in L(\underline{X},\underline{G})$ et on paut calculer l'intégrale stochastique composante par composante: ${}^t\underline{H}\bullet\underline{X} = \sum_{i\leq n} H^i\bullet X^i$. On sait que les intégrales $H^i\bullet X^i$ sont les mêmes relativement aux deux filtrations (voir [6], (9.19,c); l'argument est très simple: la propriété est évidente si $H^i = I_{[\![0,T]\!]}$, T $\underline{G}$-temps d'arrêt, ou si $H^i = I_A I_{[\![0]\!]}$, $A \in \underline{\underline{G}}_0$; on utilise ensuite un argument de classe monotone, basé sur le théorème de convergence dominée pour les intégrales stochastiques uni-dimensionnelles).

(ii) Soit ensuite $\underline{H}$ quelconque. Soit $D = \{|\Delta\underline{X}|>1\} \cup \{|{}^t\underline{H}\Delta\underline{X}|>1\}$ et $Y = {}^t\underline{H}\bullet\underline{X}$ (relativement à $\underline{F}$). Avec les notations (18), on a $\tilde{Y}^D = {}^t\underline{H}\bullet\tilde{\underline{X}}^D$ et cette intégrale de Stieltjes ne dépend pas de la filtration, tandis que $\tilde{Y}^D$ est clairement dans $\underline{\underline{V}}(\underline{G})$ et que $\underline{H} \in L(\tilde{\underline{X}}^D,\underline{G})$. Quitte à remplacer $\underline{X}$ par $\underline{X}^D$ et Y par $\underline{\underline{Y}}^D$, on peut donc supposer que $D=\emptyset$, c'est-à-dire que $|\Delta\underline{X}|\leq 1$ et $|\Delta Y|\leq 1$.

(iii) Posons $F(m) = \{|\underline{H}|\leq m\}$, $\underline{H}(m) = \underline{H}\, I_{F(m)}$, et $Y(m) = {}^t\underline{H}(m)\bullet\underline{X}$ (relativement à $\underline{F}$ et à $\underline{G}$, d'après (i)). On a $Y(m) = I_{F(m)}\bullet Y$ d'après (8), l'intégrale étant prise relativement à $\underline{F}$ (on ne sait pas encore que Y est une $\underline{G}$-semimartingale !). D'après le théorème de convergence dominée, $Y(m)$ converge vers Y en probabilité uniformément sur tout compact. Comme $Y(m)$ est $\underline{G}$-adapté, il en est de même de Y, qui est donc une semimartingale relativement à $\underline{G}$.

(iv) $\underline{X}$ et Y sont des $\underline{G}$-semimartingales spéciales (leurs sauts sont ≤ 1), et on note $\underline{X}=\underline{M}+\underline{A}$ et $Y=N+B$ leurs $\underline{G}$-décompositions canoniques. La $\underline{G}$-décomposition canonique de $Y(m)$ est $Y(m) = {}^t\underline{H}(m)\bullet\underline{M} + {}^t\underline{H}(m)\bullet\underline{A}$, donc

$$I_{F(m)}\bullet N = {}^t\underline{H}(m)\bullet\underline{M}, \quad I_{F(m)}\bullet B = {}^t\underline{H}(m)\bullet\underline{A}.$$

On démontre alors exactement comme dans la proposition 2 que $\underline{H}\in L^1_{loc}(\underline{M},\underline{G})$ et $\underline{H}\in L_s(\underline{A},\underline{G})$, donc $\underline{H}\in L(\underline{X},\underline{G})$. Enfin si $Y' = {}^t\underline{H}\bullet\underline{X}$ est la $\underline{G}$-intégrale stochastique, le théorème de convergence dominée appliqué à $Y(m) = I_{F(m)}\bullet Y'$ implique que $Y(m)$ converge vers Y', en probabilité uniformément sur tout compact: donc Y et Y' sont indistinguables. ∎

Voici maintenant une "réciproque" partielle, à peu près évidente.

PROPOSITION 8 : <u>On suppose que pour tout ensemble optionnel discret de la forme</u> $D=\{|\Delta\underline{X}|>1\}\bigcup\{|{}^t\underline{H}\Delta\underline{X}|>1\}$, <u>où</u> $\underline{H}$ <u>est un processus n-dimensionnel</u> $\underline{G}$<u>-prévisible quelconque, la semimartingale spéciale</u> $\underline{X}^D$ <u>admet la même décomposition canonique relativement à</u> $\underline{F}$ <u>et à</u> $\underline{G}$. <u>On a alors</u> $L(\underline{X},\underline{G})\subset L(\underline{X},\underline{F})$.

<u>Démonstration</u>. Soit $\underline{H}\in L(\underline{X},\underline{G})$ et $D=\{|\Delta\underline{X}|>1\}\bigcup\{|{}^t\underline{H}\Delta\underline{X}|>1\}$. D'après la proposition 3-b, et avec les notations de cette proposition, on a $\underline{H}\in L^1_{loc}(\underline{N},\underline{G})\bigcap L_s(\underline{B},\underline{G})$. Mais par hypothèse $\underline{N}$ est une $\underline{F}$-martingale locale et d'après le contenu du §1-a il est évident que $\underline{H}\in L^1_{loc}(\underline{N},\underline{F})$. De même d'après le contenu du §1-b il est évident que $\underline{H}\in L_s(\underline{B},\underline{F})$, et il s'ensuit que $\underline{H}\in L(\underline{X},\underline{F})$. ∎

La condition de la proposition ci-dessus paraitra sans doute extrêmement restrictive et difficile à vérifier (sauf bien-sûr dans le cas où toute $\underline{G}$-martingale est une $\underline{F}$-martingale). C'est pourquoi nous allons donner un exemple, dans le paragraphe suivant.

3 - CHANGEMENT DE FILTRATION ET MESURES ALEATOIRES

Nous avons omis dans le ch. IX de [6] de présenter ce qui se passe pour les mesures aléatoires lorsqu'on change de filtration. C'est très simple, mais c'est aussi utile, et nous allons combler cette lacune ici.

On considère toujours deux filtrations $\underline{F}$ et $\underline{G}$ avec $\underline{\underline{G}}_t \subset \underline{\underline{F}}_t$. Soit $\underline{\underline{P}}(\underline{F})$ et $\underline{\underline{P}}(\underline{G})$ les tribus $\underline{F}$- et $\underline{G}$-prévisibles. Soit $(E,\underline{\underline{E}})$ un espace lusinien et $\tilde{\Omega} = \Omega \times \mathbb{R}_+ \times E$, $\tilde{\underline{\underline{P}}}(\underline{F}) = \underline{\underline{P}}(\underline{F}) \otimes \underline{\underline{E}}$, $\tilde{\underline{\underline{P}}}(\underline{G}) = \underline{\underline{P}}(\underline{G}) \otimes \underline{\underline{E}}$. Pour toute mesure aléatoire μ sur $\mathbb{R}_+ \times E$ et toute fonction W sur $\tilde{\Omega}$ on pose

$$W * \mu_t(\omega) = \int_0^t \int_E \mu(\omega; ds, dy) W(\omega, s, y)$$

dès que cette expression a un sens.

On suppose fixée une mesure aléatoire à valeurs entières μ (voir [6], ch. III, pour toutes les notions qui vont suivre), qui est $\tilde{\underline{\underline{P}}}(\underline{G})$-$\sigma$-finie, c'est-à-dire qu'il existe une partition $\tilde{\underline{\underline{P}}}(\underline{G})$-mesurable $(A(m))$ de $\tilde{\Omega}$ telle que $E(I_{A(m)} * \mu_\infty) < \infty$ pour tout n. On note ν la $\underline{F}$-projection prévisible duale de μ, caractérisée par le fait que pour toute $W \in \tilde{\underline{\underline{P}}}(\underline{F})^+$, $W * \nu$ est $\underline{F}$-prévisible et $E(W * \nu_\infty) = E(W * \mu_\infty)$. Si $W \in \tilde{\underline{\underline{P}}}(\underline{F})$, on pose

$$\tilde{W}_t = \int_E \mu(\{t\}, dy) W(t,y) - \int_E \nu(\{t\}, dy) W(t,y)$$

($= +\infty$ si cette expression n'a pas de sens). Enfin notons $G^1_{loc}(\mu, \underline{F})$ l'ensemble des $W \in \tilde{\underline{\underline{P}}}(\underline{F})$ telles que le processus $(\sum_{s \leq .} (\tilde{W}_s)^2)^{1/2}$ soit dans $\underline{\underline{A}}_{loc}(\underline{F})$; dans ce cas on peut définir l'intégrale stochastique $W * (\mu - \nu)$ comme l'unique $\underline{F}$-martingale locale somme compensée de sauts dont le processus des sauts égale $\tilde{W}$. On définit évidemment les mêmes notions relativement à la filtration $\underline{G}$.

THEOREME 9 : <u>Pour que la $\underline{F}$-projection prévisible duale ν de μ soit aussi sa $\underline{G}$-projection prévisible duale, il faut et il suffit qu'elle soit $\underline{G}$-prévisible</u> (i.e., $W * \nu \in \underline{\underline{P}}(\underline{G})$ pour toute $W \in \tilde{\underline{\underline{P}}}(\underline{G})^+$). <u>Dans ce cas toute $W \in G^1_{loc}(\mu, \underline{G})$ est dans $G^1_{loc}(\mu, \underline{F})$, et l'intégrale stochastique</u> $W * (\mu - \nu)$ <u>est la même relativement à $\underline{F}$ et à $\underline{G}$</u>.

<u>Démonstration</u>. La première assertion découle immédiatement des rappels ci-dessus, de même que l'inclusion $G^1_{loc}(\mu, \underline{G}) \subset G^1_{loc}(\mu, \underline{F})$.

Soit $W \in G^1_{loc}(\mu, \underline{G})$. Soit $(A(m))$ une partition $\tilde{\underline{\underline{P}}}(\underline{G})$-mesurable de telle que $E(I_{A(m)} * \mu_\infty) < \infty$ et soit

$$W^m = W \, I_{\{|W| \leq m\}} (\sum_{q \leq m} I_{A(q)}) .$$

Les intégrales ordinaires $W^m * \mu$ et $W^m * \nu$ existent, et leur différence égale l'intégrale "stochastique" $M^m = W^m * (\mu - \nu)$, pour chacune des filtrations $\underline{F}$ et $\underline{G}$. Si M et M' désignent les intérgales stochastiques de W par rapport à $(\mu - \nu)$, relativement à $\underline{F}$ et $\underline{G}$ respectivement, on a

$$[M - M^m, M - M^m] = \sum_{s \leq .} (\tilde{W} - \tilde{W}^m)^2 = [M' - M^m, M' - M^m],$$

processus qui tendent vers 0, en probabilité uniformément sur tout compact. On en déduit que $M' = M$. ∎

REMARQUE 10 : On notera que $G^1_{loc}(\mu, \underline{G}) \subset G^1_{loc}(\mu, \underline{F})$ lorsque μ admet la même projection prévisible duale pour $\underline{F}$ et $\underline{G}$, et cette inclusion est en général stricte: la situation est donc inverse de celle des semimartingales, où $\underline{\underline{P}}(\underline{G}) \cap L(\underline{X}, \underline{F}) \subset L(\underline{X}, \underline{G})$, l'inclusion étant en général stricte. La situation pour les mesures aléatoires est similaire à celle des martingales: si M est une martingale locale pour $\underline{F}$ et pour $\underline{G}$, alors $L^1_{loc}(M, \underline{G}) \subset L^1_{loc}(M, \underline{F})$, inclusion en général stricte. ∎

Revenons maintenant aux semimartingales. Soit $\underline{X} = (X^i)_{i \leq n}$ une semimartingale, relativement à $\underline{F}$ et à $\underline{G}$. Soit μ la mesure de ses sauts:

$$\mu(\omega; dt, d\underline{x}) = \sum_{s > 0} I_{\{\Delta \underline{X}_s(\omega) \neq 0\}} \varepsilon_{(s, \Delta \underline{X}_s(\omega))}(dt, d\underline{x})$$

sur $E = \mathbb{R}^n$. μ est $\tilde{\underline{\underline{P}}}(\underline{G})$-$\sigma$-finie et on note ν sa $\underline{F}$-projection prévisible duale. Soit $\underline{X}^c$ la partie martingale locale continue de $\underline{X}$ pour $\underline{F}$, et $\underline{\underline{C}} = (C^{ij})$ le processus défini par $C^{ij} = [(X^i)^c, (X^j)^c]$. Soit enfin $D = \{|\Delta \underline{X}| > 1\}$ et $\underline{X}^D = \underline{M} + \underline{B}$ la $\underline{F}$-décomposition canonique de $\underline{X}^D$. On rappelle que $(\underline{B}, \underline{\underline{C}}, \nu)$ constitue le triplet des $\underline{F}$-caractéristiques locales de $\underline{X}$, et que

$$\underline{X}^D = \underline{B} + \underline{M}^d + \underline{X}^c, \tag{19}$$

où $\underline{M}^d$, la "partie totalement discontinue" de $\underline{M}$, s'écrit

$$\underline{M}^d = (\underline{x} I_{\{|\underline{x}| \leq 1\}}) * (\mu - \nu). \tag{20}$$

PROPOSITION 11 : <u>Supposons que</u> $\underline{X}$ <u>admette les mêmes caractéristiques locales</u> $(\underline{B}, \underline{\underline{C}}, \nu)$ <u>pour</u> $\underline{F}$ <u>et</u> $\underline{G}$. <u>Alors</u>

(i) $\underline{X}^D$ admet la même décomposition (19) pour $\underline{F}$ et $\underline{G}$ (en particulier, la partie martingale locale continue $\underline{X}^c$ est la même).

(ii) On a $L(\underline{X},\underline{G}) \subset L(\underline{X},\underline{F})$.

Démonstration. Soit $W(\omega,t,\underline{x}) = \underline{x}I_{\{|\underline{x}| \leq 1\}}$. On sait que $W \in G^1_{loc}(\mu,\underline{G})$ et d'après le théorème 9, l'intégrale stochastique $\underline{M}^d = W*(\mu - \nu)$ est la même relativement à $\underline{F}$ et à $\underline{G}$, d'où (i).

Soit $\underline{H}$ un processus n-dimensionnel $\underline{G}$-prévisible, tel que l'ensemble $D' = D \bigcup \{|{}^t\underline{H}\Delta\underline{X}| > 1\}$ soit discret. Si $W(\omega,t,\underline{x}) = \underline{x}I_{\{|\underline{x}| \leq 1 < |{}^t\underline{H}_s(\omega)\underline{x}|\}}$, un calcul élémentaire montre que $\underline{X}^{D'} = \underline{X}^D - W*\mu$. De plus $|W|*\mu$ est $\underline{G}$- et $\underline{F}$-localement intégrable, donc si $\underline{M} = \underline{M}^d + \underline{X}^c$ on a

$$\underline{X}^{D'} = \underline{B} + \underline{M} - W*(\mu - \nu) - W*\nu,$$

de sorte que si $\underline{B}' = \underline{B} - W*\nu$ et $\underline{M}' = \underline{M} - W*(\mu - \nu)$, la décomposition canonique de $\underline{X}^{D'}$ est $\underline{X}^{D'} = \underline{M}' + \underline{B}'$ pour $\underline{F}$ et $\underline{G}$. Il suffit alors d'appliquer la proposition 8 pour obtenir (ii).■

BIBLIOGRAPHIE

1 C.S. CHOU, P.A. MEYER, et C. STRICKER: Sur les intégrales stochastiques de processus prévisibles non bornés (dans ce volume).

2 C. DOLEANS-DADE: On the existence and unicity of solution of stochastic integral equations. Z. Wahr. 34, 93-101, 1976.

3 L. GALTCHOUK: The structure of a class of martingales. Proc. School-seminar (Druskininkai), Vilnius, part I, 7-32, 1975.

4 J. JACOD: Sur la construction des intégrales stochastiques et les sous-espaces stables de martingales. Sém. Proba. XI, 1977.

5 J. JACOD: Sous-espaces stables de martingales. Z.W. 44, 103-115, 1978.

6 J. JACOD: Calcul stochastique et problèmes de martingales. Lect. Notes in Math. 714, Springer, 1979.

7 J. JACOD: Weak and strong solutions of stochastic differential equations. A paraitre dans "Stochastics".

8 J. MEMIN: Espaces de semimartingales et changements de probabilité. A paraitre.

9 P.A. MEYER: Un cours sur les intégrales stochastiques. Sém. X, 1976

10 M. METIVIER, J. PELLAUMAIL: Stochastic integration. A paraitre.

11 M. METIVIER, G. PISTONE: Une formule d'isométrie pour l'intégrale stochastique hilbertienne, et équations d'évolution stochastique. Z. W. 33, 1-18, 1975.

12 P. PROTTER: On the existence, uniqueness, convergence and explosionn of solutions of systems of stochastic differential equations. Ann. Proba. 5, 243-261, 1977.