SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

MARC YOR

Application d'un lemme de Jeulin au grossissement de la filtration brownienne

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 14 (1980), p. 189-199
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1980__14__189_0>

APPLICATION D'UN LEMME DE T.JEULIN AU GROSSISSEMENT DE LA FILTRATION BROWNIENNE.

M.YOR

1. INTRODUCTION ET POSITION DU PROBLEME :

$(\Omega,\mathcal{A},P)$ désigne l'espace de probabilité de référence. Soient $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ et $(\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$ deux filtrations (1) composées de sous-tribus de $\mathcal{A}$, et vérifiant : $\forall t, \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{G}_t$. L'espace $\mathcal{L}$ des $\mathcal{F}$-martingales de carré intégrable qui sont également des $\mathcal{G}$-martingales est un $\mathcal{F}$-espace stable (i.e : stable, relativement à la filtration $\mathcal{F}$). Il découle de cette remarque que, pour que l'hypothèse : (H) toute $\mathcal{F}$-martingale est une $\mathcal{G}$-martingale soit réalisée, il suffit (et il est évidemment nécessaire) qu'elle soit vérifiée par une famille génératrice de l'espace des $\mathcal{F}$-martingales de carré intégrable (considéré comme $\mathcal{F}$-espace stable).

Il n'en est pas de même (voir ci-dessous) lorsque l'on s'intéresse à l'hypothèse : (H') toute $\mathcal{F}$-martingale est une $\mathcal{G}$-martingale.

Dans la suite, - μ est une probabilité sur $[0,\infty[$, telle que $\int_0^\infty \mu(dx)x < \infty$, qui est supposée, dans tout l'exposé, différente de ε_0 (le cas $\mu = \varepsilon_0$ est trivial). - $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est une filtration donnée, et $(B_t)_{t\geq 0}$ un $(\mathcal{F}_t)$ mouvement brownien réel, nul en 0.

- $(\mathcal{F}^\mu_t)_{t\geq 0}$ est la plus petite filtration contenant $\mathcal{F}$ et telle que le processus $(I^\mu_t = \int_{]t,\infty]} B_s d\mu(s), t\geq 0)$ soit $\mathcal{F}^\mu$-adapté.

---

(1) toutes les filtrations considérées ici satisfont -sauf mention contraire- les conditions habituelles.

L'objet de cette Note est d'étudier la propriété (H') pour le couple $(\mathcal{F},\mathcal{F}^{\mu})$ et, plus précisément, de caractériser les $\mathcal{F}$-martingales locales qui sont des $\mathcal{F}^{\mu}$-semi-martingales.

En [2], K.Ito a montré que $(B_t)_{t\geq 0}$ est une $\mathcal{F}^{\mu}$-semi-martingale lorsque $\mu = \varepsilon_1$ (voir aussi [4]), et $\mu(ds)=1_{[0,1]}(s)\,ds$, et a posé -sous une forme légèrement différente- la question de savoir si (H') est vérifiée pour le couple $(\mathcal{F},\mathcal{F}^{\mu})$. D'après [4], la réponse est négative pour $\mu = \varepsilon_1$; de façon générale, il résulte de la suite de l'article que (H') est vérifiée -dans ce cadre- si, et seulement si, $\mu(\neq \varepsilon_0 !)$ n'est pas à support compact.

Signalons enfin que la méthode de démonstration employée ci-dessous est tout à fait différente de celle faite en [4], qui reposait essentiellement sur l'inégalité de Hardy dans L^2. Ici, c'est un lemme dû à T.Jeulin [3] qui joue le rôle essentiel (voir le paragraphe 3).

2. LE CAS OU μ EST A SUPPORT COMPACT.

Enonçons tout d'abord un lemme préliminaire qui nous permettra de nous restreindre dans la suite à l'étude des $(\mathcal{F}_t)$ martingales locales qui sont intégrales stochastiques par rapport au mouvement brownien B.

Lemme 1. Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un $(\mathcal{F}_t)$ mouvement brownien réel issu de 0, et $(U_t)_{t\geq 0}$ une $(\mathcal{F}_t)$ martingale locale. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) U et B sont orthogonales, ie : UB est une $(\mathcal{F}_t)$ martingale locale.

ii) U est une martingale locale -réduite à l'aide de $(\mathcal{F}_t)$ de temps d'arrêt- par rapport à la filtration $(\mathcal{F}'_t = \bigcap_{(\varepsilon>0)} (\mathcal{F}_{t+\varepsilon} \vee \mathcal{B}_{\infty}))$, où $\mathcal{B}_{\infty}=\sigma\{ B_s, s\in \mathbb{R}_+ \}$.

Si l'une de ces conditions est réalisée, U est a fortiori une martingale locale par rapport à toute filtration $(\mathcal{G}_t)$ telle que : $\forall\, t,\ \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{G}_t \subseteq \mathcal{F}'_t$.

Démonstration : Par arrêt (à l'aide de $(\mathcal{F}_t)$ temps d'arrêt), on peut supposer que U est une $(\mathcal{F}_t)$ martingale uniformément intégrable.

i) $\Longrightarrow$ ii) Grâce à la continuité à droite (dans L^1) du processus U, il suffit de montrer : $\forall\, s < t$, $\forall\, f_s \in b(\mathcal{F}_s)$, $\forall M_\infty \in b(\mathcal{B}_\infty)$,

$$E[U_t M_\infty f_s] = E[U_s M_\infty f_s].$$

Notons $(\mathcal{B}_t)$ la filtration naturelle de $\mathcal{B}$. La $(\mathcal{B}_t)$ martingale $M_t \overset{\text{def}}{=} E[M_\infty | \mathcal{B}_t]$ est la somme d'une constante et d'une intégrale stochastique par rapport à $\mathcal{B}$: c'est donc une $(\mathcal{F}_t)$ martingale, égale à $E[M_\infty | \mathcal{F}_t]$, et qui est, de plus, orthogonale à U.

On a donc :

$$E[U_t M_\infty f_s] = E[U_t M_t f_s] = E[U_s M_s f_s] = E[U_s M_\infty f_s].$$

ii) $\Longrightarrow$ i) Par hypothèse, on a :

$\forall s < t$, $\forall f_s \in b(\mathcal{F}_s)$, $\forall M_\infty \in b(\mathcal{B}_\infty)$,

$E[U_t M_\infty f_s] = E[U_s M_\infty f_s]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $T_n = \inf\{t \geq 0 \,/\, |B_t| \geq n\}$, et posons :

$M_\infty = B_{t \wedge T_n}$. Il vient alors :

$E[U_t B_{t\wedge T_n} f_s] = E[U_s B_{t\wedge T_n} f_s]$, et donc : $E[(UB)_{t\wedge T_n} f_s] = E[(UB)_{s\wedge T_n} f_s]$, ie : (UB) est une $(\mathcal{F}_t)$ martingale locale. La fin du lemme est évidente.

Revenons à l'étude du couple $(\mathcal{F}, \mathcal{G}^\mu)$; notons $a (\leq \infty)$ la borne supérieure du support de μ, et $\bar{\mu}(u) = \mu(]u,\infty[)$, pour tout $u \in \mathbb{R}_+$.

Théorème 1. Si X est une $(\mathcal{F}_t)$ martingale locale qui se décompose en : $X = \int_0^{\cdot} \phi_s dB_s + U$, avec ϕ processus $(\mathcal{F}_t)$ prévisible tel que : $\forall t, \int_0^t \phi^2(s)ds < \infty$ Pp.s, et U $(\mathcal{F}_t)$ martingale locale orthogonale à B, alors, X est une $\mathcal{G}^\mu$-semi-martingale si, et seulement si,

$$(1) \quad \int_0^a ds |\phi_s| \bar{\mu}(s) \left\{\int_s^a du (\bar{\mu}(u))^2\right\}^{-1/2} < \infty \text{ , Pp.s.}$$

De plus, si cette condition est réalisée, l'intégrale

(2) $\int_0^a ds|\phi_s| \frac{\bar{\mu}(s)}{\int_s^a du(\bar{\mu}(u))^2} \left| \int_{]s,a]} (B_u - B_s)d\mu(u) \right|$ est finie Pp.s, et

(3) $X_t - \int_0^{t\wedge a} ds\phi_s \frac{\bar{\mu}(s)}{\int_s^a du(\bar{\mu}(u))^2} \{\int_{]s,a]} (B_u - B_s)d\mu(u)\}$

est une $\mathcal{F}^\mu$-martingale locale.

Avant de poursuivre, il est aisé de remarquer que, pour $0 \leq s \leq a$, la variable $J_s^\mu = \int_{]s,a]} (B_u - B_s)d\mu(u)$ est gaussienne, centrée, et a pour variance

$\gamma_s^\mu = \int_s^a du(\bar{\mu}(u))^2.$

Enonçons les principales conséquences du théorème 1, que l'on démontrera au paragraphe 3.

Corollaire 1.1 : Le $(\mathcal{F}_t)$-mouvement brownien B est une $\mathcal{F}^\mu$-semi-martingale si, et seulement si : $A_\mu \overset{\text{def}}{=} \int_0^a ds\ \bar{\mu}(s)(\gamma_s^\mu)^{-1/2} < \infty$.

La condition : $A_\mu < \infty$ est réalisée dès qu'il existe une constante $c > 0$ et α, avec $0<\alpha<a$, tels que :

$\forall s \in [\alpha,a],\quad \bar{\mu}(\frac{s+a}{2}) \geq c\bar{\mu}(s)$

Enfin il existe des probabilités μ à support compact telles que : $A_\mu = \infty$.

Démonstration : La première assertion découle immédiatement du théorème 1, appliqué à $X = B$. Pour la seconde, on minore, pour $s \in [\alpha,a]$, l'intégrale $\int_s^a du(\bar{\mu}(u))^2$ par $\int_s^{\frac{s+a}{2}} du(\bar{\mu}(u))^2 \geq c^2(\frac{a-s}{2})(\bar{\mu}(s))^2$, et, finalement, au voisinage de a, l'intégrand qui figure dans la définition de A_μ est majoré par $\frac{\sqrt{2}}{c(a-s)^{1/2}}$, ce qui entraîne : $A_\mu < \infty$.

Enfin, la question de l'existence de μ à support compact telle que $A_\mu = \infty$ est résolue si l'on exhibe une fonction f continue, décroissante sur $[1/2,1]$, avec $f(1) = 0$, et $\displaystyle\int_{1/2}^{1} du \frac{\sqrt{f(u)}}{\left(\int_u^1 f(v)dv\right)^{1/2}} = \infty$.

Or, la fonction $f(u) = e^{-1/(1-u)} \dfrac{1}{(1-u)^2}$ satisfait ces conditions.

Corollaire 1.2 : Soit $\mu(\neq\varepsilon_0)$ une probabilité sur $[0,\infty[$, à support compact. L'hypothèse (H') n'est pas vérifiée pour le couple $(\mathcal{F},\mathcal{F}^\mu)$.

Démonstration : Si l'hypothèse (H') était vérifiée, on aurait, pour toute fonction (déterministe) $f \in L^2[0,a]$:

$$\int_0^a ds|f(s)|\frac{\bar{\mu}(s)}{\sqrt{\gamma_s^\mu}} < \infty$$

ce qui équivaut à :

$$\int_0^a ds(\bar{\mu}(s))^2(\gamma_s^\mu)^{-1} < \infty$$. Or ceci, n'est pas puisque :

$$\frac{(\bar{\mu}(s))^2}{\gamma_s^\mu} \geq \frac{1}{(a-s)}$$

3. DEMONSTRATION DU THEOREME 1.

Nous procédons par étapes.

Etape 1. Notons $f^\mu(s) = \sqrt{\gamma_s^\mu}$, et $Y_t = \int_0^t f^\mu(s)dB_s$ $(t\geq 0)$.

Montrons tout d'abord que $(Y_t, t\leq a)$ est une $(\mathcal{G}_t^\mu, t\leq a)$ quasi-martingale, ce qui entraînera que $(Y_t, t\geq 0)$ est une $(\mathcal{F}_t^\mu, t\geq 0)$ semi-martingale. Pour cela, posons : $\mathcal{G}_t^\mu = \mathcal{F}_t \vee \sigma\{I_s^\mu, s\leq t\}$

$= \mathcal{F}_t \vee \sigma\{I_t^\mu\} = \mathcal{F}_t \vee \sigma\{\int_{]t,a]} (B_u - B_t)d\mu(u)\}$, et remarquons que

$\mathcal{F}_t^\mu = \mathcal{G}_{t+}^\mu$.

Soient s et t deux nombres réels tels que : $0 < s < t < a$. Le processus de Wiener $(B_{u+s} - B_s,\ u \geq 0)$ étant indépendant de $\mathcal{F}_s$, on a :

$$E[Y_t - Y_s | \mathcal{G}_s^\mu] = E[Y_t - Y_s |\ J_s^\mu]$$

$$= \alpha_{s,t}\ J_s^\mu$$

où $\alpha_{s,t}$ désigne le nombre réel déterminé par l'égalité suivante :

$$\alpha_{s,t}\ \gamma_s^\mu = E[(Y_t - Y_s)\int_{]s,a]} (B_u - B_s) d\mu(u)]$$

(4) $$= \int_{]s,t]} d\mu(u) \int_s^u f^\mu(v) dv + (\int_s^t f^\mu(v) dv) \bar{\mu}(t).$$

En remplaçant $\mathcal{G}_s^\mu$ par $\mathcal{G}_{s+\varepsilon}^\mu$, et en faisant tendre ε vers 0, il vient :

$$E[Y_t - Y_s | \mathcal{F}_s^\mu] = \alpha_{s,t}\ J_s^\mu,$$

soit encore, si l'on note, pour $h > 0$, $p_h Y$ la projection $\mathcal{F}^\mu$-optionnelle de $(Y_{s+h}, s \geq 0)$:

$$(p_h Y)_s - Y_s = \alpha_{s,s+h}\ J_s^\mu \qquad (s < a).$$

D'après Stricker [6], une condition nécessaire et suffisante pour que $(Y_t, t \leq a)$ soit une $(\mathcal{F}_t^\mu)_{t \leq a}$ quasi-martingale est que $\sup_{a>h>0} C_h^\mu < \infty$,
où

$$C_h^\mu = \frac{1}{h} E(\int_0^{a-h} |(p_h Y)_s - Y_s| ds).$$

Or,

$$C_h^\mu = \frac{1}{h}\int_0^{a-h} ds \alpha_{s,s+h}\ E|J_s^\mu|$$

$$= \frac{c}{h}\int_0^{a-h} ds (\alpha_{s,s+h}) \sqrt{\gamma_s^\mu} \qquad (c = \sqrt{2/\pi}).$$

Il découle alors de (4) que $C_h^\mu \leq c \int_0^a ds \bar{\mu}(s) < \infty$, d'où le résultat.

Etape 2. Notons A l'unique processus continu, nul en 0, à variation finie sur tout compact, et adapté à $(\mathcal{F}^\mu_t)$ tel que Y - A soit une $(\mathcal{F}^\mu_t)$ martingale locale. Le but de cette étape est d'expliciter A.

On a bien sûr : $A_t = A_{t\wedge a}$. D'autre part, le processus $(Y_t, t\leq a)$ étant une $(\mathcal{F}^\mu_t)$ quasi-martingale, et vérifiant : $E[\sup_{t\leq a}|Y_t|]<\infty$, une légère modification du théorème 54, p121 et 122, de Dellacherie [1], ou de celui de Meyer [5],p.157, permet d'écrire : $A_t = L^1.\lim_{(h\to 0)} A^h_t$ $(t<a)$, où :

$$A^h_t = \frac{1}{h}\int_0^t [(p_h Y)_s - Y_s]ds = \int_0^t \frac{\alpha_{s,s+h}}{h} J^\mu_s ds.$$

Or, $\frac{1}{h}\alpha_{s,s+h} \xrightarrow[(h\to 0)]{} \frac{\bar{\mu}(s)}{f^\mu(s)}$, et l'on peut appliquer le théorème de convergence dominée relativement à la mesure $1_{[0,t]}(s)\, ds$, puis à P, à l'aide de la majoration :

$\left|\frac{1}{h}\alpha_{s,s+h} J^\mu_s\right| \leq \frac{|J^\mu_s|}{f^\mu(s)}$, la variable $\left(\frac{J^\mu_s}{f^\mu(s)}\right)$ étant normale réduite centrée.

Finalement, on obtient : $A_t = \int_0^{t\wedge a} ds\, \frac{\bar{\mu}(s)}{f^\mu(s)} J^\mu_s.$

(Dans la suite, on note N= Y-A).

Etape 3. Soit $X_t = \int_0^t \phi_s dB_s$, avec ϕ processus $\mathcal{F}$-prévisible tel que :

$\forall t, \int_0^t \phi^2(s)ds<\infty$ Pp.s. (d'après le lemme 1, il suffit de considérer ces $\mathcal{F}$-martingales locales). On veut montrer ici que :

i) X est une $\mathcal{F}^\mu$-semi-martingale si, et seulement si, l'intégrale figurant en (2), soit : $\int_0^a ds|\phi_s|\frac{\bar{\mu}(s)}{\gamma^\mu_s}|J^\mu_s|$, est finie Pp.s.

ii) si cette condition est réalisée, $X_t - \int_0^{t\wedge a} ds\phi_s \frac{\bar{\mu}(s)}{\gamma^\mu(s)} J^\mu_s$ est une $(\mathcal{F}^\mu_t)$ martingale locale.

On peut clairement prendre pour intervalle de temps $T = [0,a]$.

Si $X_t = \int_0^t \phi_s \, dB_s$, on a aussi, en posant $\psi_s = \phi_s / f^\mu(s) 1_{(s<a)}$, $X_t = \int_0^t \psi_s dY_s$, pour tout $t \leq a$.

- Si ψ est borné, l'intégrale stochastique de ψ par rapport à Y ne dépend pas de la filtration par rapport à laquelle Y est une semi-martingale. On peut donc écrire, avec les notations de l'étape 2 :

$$(*) \quad X_t = \int_0^t \psi_s \, dN_s + \int_0^t \psi_s \, dA_s \qquad (t \geq 0).$$

- Si on suppose seulement que, pour tout t, $\int_0^t \psi_s^2 \, d\langle Y, Y\rangle_s < \infty$ Pp.s, un passage à la limite (portant sur ψ , pour la convergence en probabilité) permet de montrer que la formule (*) est encore valide pour tout $t < a$.

- Supposons maintenant que X est une $(\mathcal{F}_t^\mu)$ semi-martingale. D'après (*), l'unique processus C continu, nul en 0, à variation finie, tel que :

X - C soit une $(\mathcal{F}_t^\mu)$ martingale locale vérifie :

$$\forall t < a, \quad C_t = \int_0^t \psi_s \, dA_s.$$

Cette égalité se prolonge par continuité à $(t = a)$; en particulier,

$$\int_0^a |dC_s| = \int_0^a |\psi_s| |dA_s| < \infty \text{ Pp.s,}$$

i.e : l'intégrale figurant en (2) est finie Pp.s.

De même, le processus défini par (3) est une $(\mathcal{F}_t^\mu)$ martingale locale.

- Inversement, si $\int_0^a |\psi_s| |dA_s| < \infty$ Pp.s, le processus $(\int_0^a \psi_s dA_s, \, t \geq 0)$ est à variation finie sur tout compact, et l'égalité (*) se prolonge par continuité à tout $t \leq a$. En conséquence, X est une $(\mathcal{F}_t^\mu)$ semi-martingale, et $(X_t - \int_0^t \psi_s dA_s, \, t \geq 0)$ une $(\mathcal{F}_t^\mu)$ martingale locale.

Etape 4. Il nous reste à montrer que : $\int_0^a ds|\phi_s|\frac{\bar{\mu}(s)}{\sqrt{\gamma_s^\mu}} < \infty$ Pp.s, si et seulement si : $\int_0^a ds|\phi_s|\,|\frac{\bar{\mu}(s)}{\gamma_s^\mu}|\,|J_s^\mu| < \infty$ Pp.s.

Comme cela a été annoncé dans l'introduction, c'est le résultat suivant, dû à T.Jeulin [3], qui sert ici, ainsi que pour d'autres exemples de grossissement (cf [3]) d'outil fondamental.

Lemme 2 : $(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t),P)$ désigne un espace de probabilité filtré usuel, et $(K_t)_{t\geq 0}$ un processus croissant $(\mathcal{F}_t)$ prévisible.

Soit $(R_t, t\geq 0)$ un processus mesurable positif qui vérifie la propriété suivante :

Il existe une probabilité λ sur $[0,\infty[$ telle que :

$\int \lambda(dx)x < \infty$; $\lambda\{0\} = 0$; et :

pour toute fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, borélienne, bornée :

(5) $\quad {}^{(p)}(f(R))_t = \int \lambda(dx)f(x)$, pour $t \in \operatorname{supp}(K)$

Alors, $(\int_0^\infty R_s dK_s < \infty) = (K_\infty < \infty)$ Pp.s.

Quitte à faire le changement de temps : $t \to \frac{at}{(1+t)}$, on peut évidemment prendre pour intervalle de temps $T = [0,a[$. Le résultat cherché découle alors du lemme de Jeulin appliqué au processus croissant

$K_t = \int_0^t ds|\phi_s|\frac{\bar{\mu}(s)}{\sqrt{\gamma_s^\mu}}$, et au processus $R_t = \frac{1}{\sqrt{\gamma_t^\mu}}|J_t^\mu|$, qui vérifie (5), avec

$\lambda(dx) = \sqrt{2/\pi}\ dx\ e^{-x^2/2}$

4. LE CAS OU μ N'EST PAS A SUPPORT COMPACT.

Dans ce cas, la fonction continue (γ_s^μ) est strictement positive, et donc bornée inférieurement par un réel positif, non nul, sur tout compact de $\mathbb{R}_+$.

Aussi, les difficultés rencontrées au paragraphe 3 disparaissent, et, reprenant la démonstration précédente avec $a = \infty$, on obtient le :

Théorème 2 : Si μ n'est pas à support compact, la propriété (H') est vérifiée pour le couple $(\mathcal{F},\mathcal{F}^{\mu})$.

De plus, si X est une $(\mathcal{F}_t)$ martingale locale qui se décompose en : $X=\phi.B+U$, avec ϕ processus $(\mathcal{F}_t)$ prévisible, et $U(\mathcal{F}_t)$ martingale locale orthogonale à B, le processus :

$$X_t - \int_0^t ds\phi_s \frac{\bar{\mu}(s)}{\int_s^{\infty} du(\bar{\mu}(u))^2} \left\{\int_{]s,\infty[} (B_u - B_s)d\mu(u)\right\}$$ est une $(\mathcal{F}^{\mu}_t)_{t\geq 0}$ martingale locale.

Remarque : Là encore, le lemme de Jeulin permet d'obtenir des précisions intéressantes.

Si X est une $(\mathcal{F}_t)$ martingale locale, on note $X = M + C$ sa $\mathcal{F}^{\mu}$-décomposition canonique (M est une $\mathcal{F}^{\mu}$-martingale locale ; C un processus à variation finie, continu, nul en 0).

Si l'on reprend la démonstration du corollaire 1.2, il apparaît que pour que toute $(\mathcal{F}_t)$ martingale de carré intégrable $X = M + C$ vérifie $\int_0^{\infty} |dC_s| < \infty$ Pp.s, il est nécessaire que $\int_0^{\infty} ds \frac{(\bar{\mu}(s))^2}{\int_s^{\infty} du(\bar{\mu}(u))^2} < \infty$.

Or, ceci n'est pas possible, cette dernière intégrale de Riemann étant égale à $+\infty = -\log F(\infty) + \log F(0)$, si $F(u) \overset{def}{=} \int_u^{\infty} dv(\bar{\mu}(v))^2$. A fortiori, il n'est pas vrai que toute $(\mathcal{F}_t)$ martingale de carré intégrable soit une $(\mathcal{F}^{\mu}_t)$ semi-martingale de H^1.

REFERENCES :

[1] C.Dellacherie : Capacités et processus stochastiques.
Springer-Verlag (1972)

[2] K.Ito : Extension of stochastic integrals.
Proc. of Intern. Symp. SDE. Kyoto (1976), p.95-109.

[3] T.Jeulin : Conditions nécessaires et suffisantes pour le grossissement d'une filtration (à paraître).

[4] T.Jeulin et M.Yor : Inégalité de Hardy, semi-martingales et faux-amis.
Sém. Proba. Strasbourg XIII, Lect. Notes in Maths. 721
Springer (1979).

[5] P.A.Meyer : Probabilités et potentiel.
Hermann, Paris (1966).

[6] C.Stricker : Une caractérisation des quasi-martingales.
Sém. Proba. Strasbourg IX, Lect. Notes in Maths 465,
Springer (1975).

Note ajoutée au texte initial (Décembre 1979) :

La bonne présentation - selon la terminologie de D. Williams - est de grossir la filtration $(\mathcal{F}_t)$ avec une variable générique (que l'on peut supposer centrée) de l'espace gaussien engendré par le mouvement Brownien (B_t), soit $\int_0^\infty f(s)dB_s$ $(f \in L^2(\mathbb{R}_+,ds))$.

J'espère présenter, aussitôt que possible, cette généralisation des résultats qui figurent dans le présent article, en indiquant dès maintenant que la version "générale" est très voisine de la version "restreinte".