RENZO CAIROLI

Sur l'extension de la définition d'intégrale stochastique

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 14 (1980), p. 18-25
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1980__14__18_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1978/79

SUR L'EXTENSION DE LA DEFINITION D'INTEGRALE STOCHASTIQUE

par R. Cairoli

En s'inspirant d'un résultat que Wong et Zakai ont établi dans [10], en vue d'étendre la définition des deux types d'intégrale stochastique

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} \varphi \, dW \qquad \text{et} \qquad \iint_{\mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+^2} \psi \, dWdW$$

aux processus φ et ψ qui ne satisfont qu'à la condition d'intégrabilité faible

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} \varphi^2 dz < \infty \text{ p.s.,} \qquad \text{resp.} \quad \iint_{\mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+^2} \psi^2 dzdz < \infty \text{ p.s.,}$$

Walsh a démontré dans [7] une proposition qui peut être transposée dans un cadre permettant d'effectuer la même extension lorsque les intégrales stochastiques sont prises relativement à une martingale de carré intégrable, resp. martingale forte de puissance 4 intégrable, ou à des processus qui sont localement de ce type.

Le but de la présente note est de mettre en lumière cette possibilité et, par la même occasion, de montrer que l'extension par localisation peut se faire sans l'emploi de théorèmes de projection bidimensionnels.

Parmi les travaux déjà parus, consacrés à l'étude du problème qui nous concerne, il faut citer principalement les deux articles [9] et [10] de Wong et Zakai. Le premier traite de l'extension de l'intégrale stochastique du premier type, prise relativement à une martingale forte de carré intégrable, et de celle du second type, prise relativement à une martingale forte de puissance 4 intégrable et dont les 1- et 2-processus croissants associés sont dominés par une mesure déterministe. La méthode employée s'inspire de celle de Ito. Le deuxième article traite de l'extension par localisation, mais dans le cas du processus de Wiener W seulement. Les auteurs remarquent toutefois que leur lemme de base s'étendrait au cas d'une martingale de carré intégrable quelconque, si l'analogue bidimensionnel du théorème de projection prévisible était disponible. Dans un article non encore publié [5], Merzbach traite du problème de l'extension de l'intégrale du premier type dans le cas d'une martingale de carré intégrable. Malheureusement, la méthode qu'emploie l'auteur repose sur un théorème de projection prévisible non encore établi correctement (voir à ce sujet l'article de Doléans-Dade et Meyer [4]).

Pour la notation et les notions non définies, nous renvoyons le lecteur à [2]. Tout au long de la note, nous supposerons donnés un espace probabilisé complet $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et une famille $\{\mathcal{F}_z : z \in \mathbb{R}_+^2\}$ de sous-tribus de $\mathcal{F}$ satisfaisant aux conditions F1 — F4 de [1].

Nous désignerons par z_k le point (k,k) à coordonnées entières positives; R_z tiendra place de $[0,z]$. Si $\sigma = (u_i)$ et $\tau = (v_j)$ sont des subdivisions dyadiques finies de $[0,k]$ et $\{X_{st} : (s,t) \in R_{z_k}\}$ est un processus, nous poserons (suivant Doléans -Dade et Meyer [4]), pour tout $(s,t) \in R_{z_k}$,

$$X_{st}^{\sigma\tau} = \sum_{i,j} X_{u_i v_j} I_{\{(u_i,v_j) \ll (s,t) \prec (u_{i+1},v_{j+1})\}}.$$

Nous désignerons par $\lim_\sigma$ ou $\lim_\tau$ la limite quand σ ou τ parcourent une suite de subdivisions dyadiques finies de $[0,k]$ dont le pas tend vers 0. Même interprétation lorsque lim est remplacé par lim sup ou lim inf.

Nous commencerons par un lemme, essentiellement déjà démontré par Doléans-Dade et Meyer dans [4], démonstration de la proposition 5.

<u>Lemme</u>. Supposons que le processus croissant $\{A_z : z \in \mathbb{R}_+^2\}$ vérifie la condition suivante: il existe une suite de processus croissants prévisibles intégrables [1] $\{A_z^n : z \in \mathbb{R}_+^2\}$ telle que

a) $\{A_z^{n+1} - A_z^n : z \in \mathbb{R}_+^2\}$ est un processus croissant pour tout n;

b) $\lim_{n\to\infty} A_z^n = A_z$, pour tout $z \in \mathbb{R}_+^2$.

Supposons, en outre, que M est une v.a. bornée $\mathcal{F}_{z_k}$-mesurable et posons, pour tout $z \in R_{z_k}$, $M_z = E\{M | \mathcal{F}_z\}$. Nous avons alors l'inégalité

$$E\{MA_{z_k}\} \geqslant E\{\int_{R_{z_k}} \liminf_\sigma \liminf_\tau M_z^{\sigma\tau} dA_z\}.$$

<u>Démonstration</u>. Fixons k et désignons par $\{M_{\underline{s}k} : s \in (0,k]\}$ le processus des limites à gauche d'une version càdlàg de la martingale ordinaire $\{M_{sk}, \mathcal{F}_{sk} : s \in [0,k]\}$. Puisque $\{A_{sk}^n : s \in \mathbb{R}_+\}$ est un processus croissant, prévisible par rapport à $\{\mathcal{F}_{sk} : s \in \mathbb{R}_+\}$, en raison d'un théorème de Doléans-Dade [3],

$$E\{MA_{z_k}^n\} = E\{\int_{(0,k]} M_{\underline{s}k} dA_{sk}^n\} = \lim_\sigma E\{\sum_i M_{u_ik}(A_{u_{i+1}k}^n - A_{u_ik}^n)\}.$$

---

[1]) "Intégrable" signifie pour nous que chaque v.a. du processus est intégrable.

Le même raisonnement appliqué, pour chaque i, à la martingale $\{M_{u_i t}, \mathcal{F}_{kt}: t \in [0,k]\}$ et au processus croissant $\{A^n_{u_{i+1}t} - A^n_{u_i t}: t \in \mathbb{R}_+\}$, prévisible par rapport à $\{\mathcal{F}_{kt}: t \in \mathbb{R}_+\}$, nous montre que le dernier membre est égal à

$$\lim_\sigma E\{\sum_i \int_{(0,k]} M_{u_i \underline{t}}\, d(A^n_{u_{i+1}t} - A^n_{u_i t})\} =$$

$$\lim_\sigma \lim_\tau E\{\sum_{i,j} M_{u_i v_j}(A^n_{u_{i+1}v_{j+1}} - A^n_{u_{i+1}v_j} - A^n_{u_i v_{j+1}} + A^n_{u_i v_j})\} =$$

$$\lim_\sigma \lim_\tau E\{\int_{R_{z_k}} M^{\sigma\tau}_z dA^n_z\}.$$

En appliquant le lemme de Fatou au dernier membre, il résulte que l'inégalité de l'énoncé vaut pour A^n à la place de A. Il ne reste alors plus qu'à faire tendre n vers l'infini.

Nous dirons qu'un processus croissant $\{A_z: z \in \mathbb{R}^2_+\}$ est localement intégrable, s'il existe une suite (D_n) de voisinages d'arrêt bornés de l'origine telle que

α) $D_n \subset D_{n+1}$ p.s., pour tout n;

β) $\bigcup_n D_n = \mathbb{R}^2_+$ p.s.;

γ) $E\{\int_{\mathbb{R}^2_+} I_{D_n}(z)dA_z\} < \infty$, pour tout n.

Le résultat de Walsh annoncé au début de cette note peut s'énoncer ainsi:

Théorème. Tout processus croissant qui vérifie la condition du lemme est localement intégrable.

Démonstration. Nous suivons de près le procédé indiqué par Walsh. Soit $\{A_z: z \in \mathbb{R}^2_+\}$ un processus croissant vérifiant la condition du lemme. Désignons par $\mathbb{D}$ l'ensemble des points de $\mathbb{R}^2_+$ dont les deux coordonnées sont dyadiques. Posons

$$M^{kn}_z = P\{A_{z_k} > n | \mathcal{F}_z\},$$

$$D^o_{kn} = \bigcup\{[0,z): M^{kn}_\zeta \leqslant \tfrac{1}{2} \text{ pour tout } \zeta \in \mathbb{D} \cap [0,z)\}, \quad D_{kn} = \overline{D^o_{kn}}.$$

Il est clair que D_{kn} est un voisinage d'arrêt de l'origine et que $D_{kn} \subset D_{k,n+1}$ p.s.. De plus, par l'inégalité maximale des martingales, nous avons

$$E\{\sup_{\zeta \in \mathbb{D}} (M^{kn}_\zeta)^2\} \leqslant 16\; P\{A_{z_k} > n\},$$

ce qui entraîne que, pour k fixé, M^{kn}_ζ décroît vers 0 p.s., uniformément en $\zeta \in \mathbb{D}$, quand $n \to \infty$, et donc que $\bigcup_n D_{kn} = \mathbb{R}^2_+$ p.s. D'autre part, en utilisant le lemme, nous pouvons écrire

$$n \geqslant E\{A_{z_k} ; A_{z_k} \leqslant n\} \geqslant E\{\int_{R_{z_k}} \liminf_{\sigma} \liminf_{\tau} (1 - M_z^{kn})^{\sigma\tau} dA_z\} =$$

$$E\{\int_{R_{z_k}} (1 - \limsup_{\sigma} \limsup_{\tau} (M_z^{kn})^{\sigma\tau}) dA_z\}.$$

Mais si $z \in D_{kn}$,

$$\limsup_{\sigma} \limsup_{\tau} (M_z^{kn})^{\sigma\tau} \leqslant \sup_{\zeta \in \mathbb{D} \cap [0,z)} M_\zeta^{kn} \leqslant \tfrac{1}{2},$$

ce qui nous permet de conclure que le dernier membre majore

$$\tfrac{1}{2} E\{\int_{R_{z_k}} I_{D_{kn}}(z) dA_z\}$$

et donc que cette espérance est majorée par 2n. Pour avoir le voisinage d'arrêt D_n de la suite cherchée, il ne nous reste alors plus qu'à poser $D_n = \bigcup_{k=1}^{n} (D_{kn} \cap R_{z_k})$.

Nous pouvons maintenant aborder le problème de l'extension de la définition des deux types d'intégrale stochastique.

Nous commencerons par le premier type et supposerons donc qu'une martingale de carré intégrable $M = \{M_z, \mathcal{F}_z : z \in \mathbb{R}_+^2\}$ est donnée. Nous désignerons par $\langle M \rangle = \{\langle M \rangle_z : z \in \mathbb{R}_+^2\}$ l'unique processus croissant prévisible intégrable tel que $\{M_z - \langle M \rangle_z, \mathcal{F}_z : z \in \mathbb{R}_+^2\}$ est une martingale faible. L'existence de ce processus découle d'un résultat récent de Meyer [6], selon lequel le processus croissant construit dans [1], p. 117, est prévisible. Merzbach nous a fait observer qu'en utilisant une des deux projections prévisibles itérées considérées dans [4], l'unicité se démontre exactement comme dans le cas uni-dimensionnel.

Soit $\varphi = \{\varphi(\zeta) : \zeta \in \mathbb{R}_+^2\}$ un processus prévisible tel que

$$\int_{R_z} \varphi^2(\zeta) d\langle M \rangle_\zeta < \infty \quad \text{p.s., pour tout } z \in \mathbb{R}_+^2.$$

En désignant l'intégrale au premier membre par A_z, nous définissons un processus croissant $\{A_z : z \in \mathbb{R}_+^2\}$ qui vérifie la condition du lemme. En effet, une suite $\{A_z^n : z \in \mathbb{R}_+^2\}$ satisfaisant à a) et b) de ce lemme s'obtient, par exemple, en posant

$$A_z^n = \int_{R_z} \varphi^2(\zeta) \wedge n \; d\langle M \rangle_\zeta .$$

Le théorème nous permet donc de conclure qu'il existe une suite (D_n) de voisinages d'arrêt bornés de l'origine vérifiant α) et β) et telle que, pour tout n,

$$E\{\int_{\mathbb{R}_+^2} I_{D_n}(\zeta) dA_\zeta\} = E\{\int_{\mathbb{R}_+^2} (\varphi^2 I_{D_n})(\zeta) d\langle M \rangle_\zeta\} < \infty.$$

Il est dans ce cas possible de ramener la définition de l'intégrale stochastique de φ par rapport à M au cas déjà traité dans [1]. Il suffit pour cela de poser, pour tout $z \in \mathbb{R}_+^2$,

$$\int_{R_z} \varphi(\zeta)dM_\zeta = \lim_{n\to\infty} \int_{R_z} (\varphi I_{D_n})(\zeta)dM_\zeta .$$

Cette limite existe p.s. et ne dépend pas du choix de la suite (D_n). Pour établir cette assertion, il suffit de démontrer que si D et D' sont deux voisinages d'arrêt bornés de l'origine tels que $D \subset D'$ et que

$$E\{\int_{\mathbb{R}_+^2} (\varphi^2 I_{D'})(\zeta)d\langle M\rangle_\zeta\} < \infty,$$

alors

$$\int_{R_z} (\varphi I_{D'})(\zeta)dM_\zeta = \int_{R_z} (\varphi I_D)(\zeta)dM_\zeta, \text{ p.s. sur } \{z \in D\}.$$

De manière équivalente, cela s'exprime en disant que si D est un voisinage d'arrêt borné de l'origine et si

$$E\{\int_{\mathbb{R}_+^2} \varphi^2(\zeta)d\langle M\rangle_\zeta\} < \infty,$$

alors

$$\int_{R_z} (\varphi I_{D^c})(\zeta)dM_\zeta = 0, \text{ p.s. sur } \{z \in D\}.$$

Or, dans le cas particulier où φ est un processus élémentaire et D est étagé, cette conclusion résulte facilement en calculant l'intégrale. Dans le cas général, il suffit d'approcher φ par des processus élémentaires et D, du dessus, par des voisinages d'arrêt étagés ([2], proposition 2.2).

On remarquera que si la martingale M est continue à droite, on pourra choisir une version de l'intégrale stochastique qui est continue à droite.

L'extension de la définition de l'intégrale stochastique du deuxième type s'effectue de manière analogue. La martingale par rapport à laquelle on intègre est forte et de puissance 4 intégrable (cf.[1]): nous la désignerons encore par $M = \{M_z : z \in \mathbb{R}_+^2\}$. Nous désignerons en outre par $\langle M\rangle^1 = \{\langle M\rangle^1_{st} : (s,t) \in \mathbb{R}_+^2\}$ l'unique processus croissant 1-prévisible (c'est-à-dire prévisible par rapport à $\{\mathcal{F}_{s\infty} : s \in \mathbb{R}_+\}$ pour t fixé) intégrable tel que $\{M_{st} - \langle M\rangle^1_{st}, \mathcal{F}_{s\infty} : s \in \mathbb{R}_+\}$ est une martingale, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, et par $\langle M\rangle^2$ le processus défini de la même manière en interchangeant le rôle de s et t. Dans l'introduction, ces deux processus ont été appelés 1- et 2-processus croissants associés à M.

Nous dirons qu'un processus indexé par $(\zeta,\eta) \in \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+^2$ est prévisible (cf.[1]), s'il est mesurable par rapport à la tribu sur $\mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+^2 \times \Omega$ engendrée par les ensembles de la forme $(z_1, z_1'] \times (z_2, z_2'] \times F$, où les rectangles du produit sont non vides et tels que si ζ appartient au premier et η au deuxième, alors $\zeta \curlywedge \eta$, et où $F \in \mathcal{F}_{z_1 \vee z_2}$.

Soit $\psi = \{\psi(\zeta,\eta) : \zeta, \eta \in \mathbb{R}_+^2\}$ un processus prévisible, nul sur $\{(\zeta,\eta) : \zeta \not\curlywedge \eta\}$ et tel que

$$\iint_{R_z \times R_z} \psi^2(\zeta,\eta) d\langle M\rangle_\zeta^2 d\langle M\rangle_\eta^1 < \infty \quad \text{p.s., pour tout } z \in \mathbb{R}_+^2.$$

Désignons par A_z l'intégrale au premier membre et par A_z^n la même intégrale avec $\psi^2(\zeta,\eta) \wedge n$ à la place de $\psi^2(\zeta,\eta)$. Le processus croissant $\{A_z : z \in \mathbb{R}_+^2\}$ ainsi défini satisfait à la condition du lemme. En effet, les processus croissants $\{A_z^n : z \in \mathbb{R}_+^2\}$ sont intégrables et vérifient visiblement a) et b) de ce lemme. Ils sont en outre prévisibles. Pour le démontrer, il suffit de prendre un ensemble $(z_1, z_1'] \times (z_2, z_2'] \times F$ de la famille génératrice de la tribu prévisible et de prouver que le processus croissant dont la v.a. d'indice z est

$$I_F \iint_{R_z \times R_z} I_{(z_1,\, z_1']}(\zeta)\, I_{(z_2,\, z_2']}(\eta)\, d\langle M\rangle_\zeta^2\, d\langle M\rangle_\eta^1$$

est prévisible. Or, il est évident que ce processus est à la fois 1- et 2-prévisible, donc un résultat dû à Merzbach et Zakai ([4], corollaire de la proposition 2), nous permet de conclure [1].

En vertu du théorème, il existe une suite (D_n) de voisinages d'arrêt bornés de l'origine vérifiant α), β) et γ). D'autre part, en considérant d'abord le cas particulier d'un voisinage d'arrêt étagé et en approchant ensuite D_n, du dessus, par des voisinages d'arrêt de ce type, il n'est pas difficile de constater que

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} I_{D_n}(\zeta)\, dA_\zeta = \iint_{\mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+^2} (\psi^2 I_{\hat{D}_n})(\zeta,\eta) d\langle M\rangle_\zeta^2 d\langle M\rangle_\eta^1,$$

où $\hat{D}_n = \{(\zeta,\eta) : \zeta \vee \eta \in D_n\}$. Ainsi, pour tout n,

$$E\{\iint_{\mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+^2} (\psi^2 I_{\hat{D}_n})(\zeta,\eta) d\langle M\rangle_\zeta^2 d\langle M\rangle_\eta^1\} < \infty$$

et nous pouvons donc, comme pour l'intégrale du premier type, ramener la définition

---

[1]) Nous ne faisons pas de distinction entre processus indistinguables.

de l'intégrale stochastique de ψ par rapport à MM au cas déjà traité dans [1], en posant, pour tout $z \in \mathbb{R}_+^2$,

$$\iint_{R_z \times R_z} \psi(\zeta,\eta)dM_\zeta dM_\eta = \lim_{n\to\infty} \iint_{R_z \times R_z} (\psi\, I_{\hat{D}_n})(\zeta,\eta)dM_\zeta dM_\eta .$$

Cette limite existe p.s. et ne dépend pas du choix de la suite (D_n), ce qui se démontre comme dans le cas de l'intégrale stochastique du premier type.

On remarquera que, puisque M admet une version continue à droite (en vertu d'un résultat dû à Walsh [8]), on pourra choisir une version de l'intégrale stochastique que nous venons de définir qui est aussi continue à droite.

L'extension des deux types d'intégrale au cas où M est localement une martingale de carré intégrable, resp. martingale forte de puissance 4 intégrable, peut se faire par localisation (cf.[2]). Nous laissons au lecteur le soin de la réaliser.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. Cairoli et J. B. Walsh: Stochastic integrals in the plane. Acta mathematica, 134, 1975, p. 111-183.

[2] R. Cairoli et J. B. Walsh: Régions d'arrêt, localisations et prolongements de martingales. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie, 44, 1978, p. 279-306.

[3] C. Doléans-Dade: Processus croissants naturels et processus croissants très bien mesurables. C. R. Acad. Sc. Paris, 264, 1967, p. 874-876.

[4] C. Doléans-Dade et P. A. Meyer: Un petit théorème de projection pour processus à deux indices. Séminaire de probabilités XIII, Springer, vol. 721, p. 204-215.

[5] E. Merzbach: Extension and continuity of stochastic integral in the plane. A paraître.

[6] P. A. Meyer: Sur la théorie des processus à deux indices. Exposé 1. A paraître.

[7] J. B. Walsh: Martingales with a multi-dimensional parameter and stochastic integrals in the plane. Cours de 3ème cycle, Université de Paris VI, Paris.

[8] J. B. Walsh: Convergence and regularity of multiparameter strong martingales. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie, 46, 1979, p. 177-192.

[9] E. Wong et M. Zakai: An extension of stochastic integrals in the plane. Annals of Probability, 5, 1977, p. 770-778.

[10] E. Wong et M. Zakai: The sample function continuity of stochastic integrals in the plane. Annals of Probability, 5, 1977, p. 1024-1027.

Ecole polytechnique fédérale
Département de mathématiques
Lausanne (Suisse)

Note : Dans un article à paraître intitulé "Sur la régularité des trajectoires des martingales à deux indices", D. Bakry a récemment démontré que les martingales ont des versions càdlàg. Ce résultat permet d'apporter à l'exposé qui précède quelques simplifications évidentes. Il permet en outre d'établir le théorème de projection qui sert à réaliser le programme indiqué par Wong et Zakai mentionné dans l'introduction (voir à ce sujet l'article à paraître de Merzbach et Zakai intitulé "Predictable and dual predictable projection of two-parameter stochastic processes").