Michel Ledoux

La loi du logarithme itéré bornée dans les espaces de Banach

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 15 (1981), p. 11-37

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1981__15__11_0>

LA LOI DU LOGARITHME ITÉRÉ BORNÉE DANS LES ESPACES DE BANACH

par Michel LEDOUX

La loi du logarithme itéré dans les espaces de Banach fait l'objet depuis plusieurs années de nombreuses études. Tout à tour, J. Kuelbs, G. Pisier, B. Heinkel et d'autres ont donné ses lettres de noblesse à cette loi du calcul des probabilités. Toutefois, la solution complète de la loi du logarithme itéré dans les espaces de Banach est encore un problème ouvert. Nous nous proposons ici de résumer et de reformuler dans l'état actuel des recherches, quelques résultats sur la question (le lecteur pourra trouver dans un récent article de J. Kuelbs et J. Zinn ([8]) une approche différente des mêmes problèmes).

Dans toute la suite $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ désignera un espace probabilisé et $(B, \|.\|)$ un espace de Banach réel séparable, muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}$. Si X est une variable aléatoire (v.a.) à valeurs dans B, et si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite de copies indépendantes de X, nous noterons pour tout entier n :

$$S_n(X) = \sum_{j=1}^{n} X_j ,$$

et

$$a_n = (2n\, L_2 n)^{\frac{1}{2}} ,$$

où L_2 désigne la fonction sur $\mathbb{R}^+$, à valeurs positives, définie par :

$$\forall\, x \geq e^e ,\quad L_2(x) = \mathrm{Log}(\mathrm{Log}\, x) ,$$

$$\forall\, x \in [0, e^e[,\quad L_2(x) = 1 .$$

Nous dirons qu'une v.a. X vérifie le théorème de la limite centrale si la suite $\left(\frac{S_n(X)}{n^{\frac{1}{2}}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi dans $(B, \mathcal{B})$.

Nous dirons qu'une v.a. X vérifie la loi du logarithme itéré bornée (respectivement compacte) si $P\{\sup\limits_{n\geq 1} \frac{\|S_n(X)\|}{a_n} < \infty\} = 1$ (respectivement si $P\{\left(\frac{S_n(X)}{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est relativement compacte dans B $\} = 1$).

Les trois grandes étapes dans l'étude de la loi du logarithme itéré ont été les suivantes :

THEOREME 1 (G. Pisier [9], 1975). Soit X une v.a. à valeurs dans B , centrée, vérifiant le théorème de la limite centrale et dont la norme est de carré intégrable ; alors X vérifie également la loi du logarithme itéré compacte.

THEOREME 2 (J. Kuelbs [7], 1977). Soit X une v.a. à valeurs dans B , centrée, dont la norme est de carré intégrable et telle que :

$$\sup_{n\geq 1} E\{\frac{\|S_n(X)\|}{a_n}\} < \infty \ ;$$

alors X vérifie la loi du logarithme itéré bornée.

THEOREME 3 (B. Heinkel [4], 1979). Soit X une v.a. à valeurs dans B , centrée, vérifiant le théorème de la limite centrale et telle que :

$$E\{\frac{\|X\|^2}{L_2\|X\|}\} < \infty \ ;$$

alors X vérifie également la loi du logarithme itéré compacte.

Ces trois théorèmes qui donnent tous des conditions suffisantes pour qu'une v.a. à valeurs dans B , centrée, vérifie la loi du logarithme itéré bornée, se résument à démontrer le même type d'implication :

pour le théorème 1,

$$\sup_{n\geq 1} E\{\frac{\|S_n(X)\|}{n^{\frac{1}{2}}}\} < \infty \quad \text{et} \quad E\{\|X\|^2\} < \infty \Longrightarrow P\{\sup_{n\geq 1} \frac{\|S_n(X)\|}{a_n} < \infty\} = 1 \ ;$$

pour le théorème 2,

$$\sup_{n\geq 1} E\{\frac{\|S_n(X)\|}{a_n}\} < \infty \quad \text{et} \quad E\{\|X\|^2\} < \infty \Longrightarrow P\{\sup_{n\geq 1} \frac{\|S_n(X)\|}{a_n} < \infty\} = 1 \ ;$$

pour le théorème 3,

$$\sup_{n\geq 1} E\{\frac{\|S_n(X)\|}{n^{\frac{1}{2}}}\} < \infty \quad \text{et} \quad E\{\frac{\|X\|^2}{L_2\|X\|}\} < \infty \Longrightarrow P\{\sup_{n\geq 1} \frac{\|S_n(X)\|}{a_n} < \infty\} = 1 \ .$$

Les améliorations apportées par les deux derniers théorèmes par rapport au premier laissent conjecturer que l'implication suivante a lieu :

$$\sup_{n\geq 1} E\{\frac{\|S_n(X)\|}{a_n}\} < \infty \quad \text{et} \quad E\{\frac{\|X\|^2}{L_2\|X\|}\} < \infty \Longrightarrow P\{\sup_{n\geq 1} \frac{\|S_n(X)\|}{a_n} < \infty\} = 1 \ ,$$

c'est-à-dire le théorème :

THEOREME (Conjecture). Soit X une v.a. à valeurs dans B , centrée, telle que pour tout élément f du dual topologique B' de B on ait : $E\{(f(X))^2\} < \infty$, et vérifiant :

i) $E\{\frac{\|X\|^2}{L_2\|X\|}\} < \infty$,

ii) $\sup_{n\geq 1} E\{\frac{\|S_n(X)\|}{a_n}\} < \infty$;

alors X vérifie la loi du logarithme itéré bornée.

Les conditions i) et ii) apparaissent alors comme minimales puisqu'il est bien connu qu'elles sont nécessaires pour que X vérifie la loi du logarithme itéré bornée. Malheureusement les techniques actuelles sont impuissantes à établir une telle implication ; c'est pourquoi nous nous proposons de reformuler, dans l'état actuel des recherches, les théorèmes 2 et 3 : nous énonçons à cet effet un théorème reprenant les idées des théorèmes 2 et 3, mais ayant sur eux l'avantage de prendre comme hypothèses celles de la conjecture ; de manière précise nous démontrons :

THEOREME 4. Soit X une v.a. à valeurs dans B , centrée, et telle que :

i) $E\{\frac{\|X\|^2}{L_2\|X\|}\} < \infty$,

ii) $\sup_{n\geq 1} E\{\frac{\|S_n(X)\|}{a_n}\} < \infty$;

alors :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n(X)}{a_n(L_2 n)^{\frac{1}{2}}} = 0 \quad \text{presque sûrement (p.s.).}$$

Il convient en fait d'établir le résultat plus général suivant :

THEOREME 5.

1) Soit X une v.a. à valeurs dans B , centrée, et telle que $E\{\frac{\|X\|^2}{(L_2\|X\|)^{2\alpha}}\} < \infty$ où α désigne un nombre réel positif ou nul ; les assertions suivantes sont équivalentes :

(1.1) $P\{\sup_{n\geq 1} \frac{\|S_n(X)\|}{a_n(L_2 n)^{\alpha}} < \infty\} = 1$;

(1.2) $\sup_{n\geq 1} E\{\frac{\|S_n(X)\|}{a_n(L_2 n)^{\alpha}}\} < \infty$;

(1.3) La suite $\left(\frac{S_n(X)}{a_n(L_2 n)^{\alpha}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée en probabilité.

2) Si de plus α est strictement positif, on a les équivalences :

(2.1) $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n(X)}{a_n(L_2 n)^{\alpha}} = 0$ p.s. ;

(2.2) $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n(X)}{a_n(L_2 n)^{\alpha}} = 0$ dans $L^1(B)$;

(2.3) $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n(X)}{a_n(L_2 n)^{\alpha}} = 0$ en probabilité ;

(dans le cas où α est nul, la condition (2.1) est à remplacer par :

(2.4) $P\{\left(\frac{S_n(X)}{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est relativement compacte dans $B\} = 1$;

(cf. [7])).

Notons que pour $\alpha = 0$, on retrouve le théorème 2 et pour $\alpha = \frac{1}{2}$ le théorème 4.

Démonstration du théorème 5.

La démonstration reprend outils, arguments et notations de J. Kuelbs ([7]) et B. Heinkel ([4]) en ne les modifiant que sur des points de détail.

Nous nous restreindrons bien entendu au cas où X est symétrique, le cas général s'en déduisant par symétrisation.

1) De l'hypothèse (1.1) on déduit des techniques usuelles de l'étude de la loi du logarithme itéré (voir [9]) que :

$$N(X) = E\{\sup_{n\geq 1} \frac{\|S_n(X)\|}{a_n(L_2 n)^{\alpha}}\} < \infty ,$$

et de l'hypothèse (1.3) la condition d'intégrabilité (1.2) ; comme (1.2) implique trivialement (1.3), la démonstration se réduit à prouver que (1.2) implique (1.1).

Désignons par λ un nombre réel strictement positif et posons pour tout entier n :

$$\eta_n = X_n \, I_{\{\|X_n\| \leq \lambda n^{\frac{1}{2}}(L_2 n)^{-\frac{1}{2}}(L_2 n)^{\alpha}\}} ,$$

$$\xi_n = X_n \, I_{\{\lambda n^{\frac{1}{2}}(L_2 n)^{-\frac{1}{2}}(L_2 n)^{\alpha} < \|X_n\| \leq \lambda n^{\frac{1}{2}}(L_2 n)^{\alpha}\}} ,$$

$$\theta_n = X_n \, I_{\{\|X_n\| > \lambda n^{\frac{1}{2}}(L_2 n)^{\alpha}\}} .$$

La démonstration de cette première partie va se borner à établir les trois propriétés suivantes :

i) $$P\left\{\sup_{n\geq 1} \frac{\|\sum_{j=1}^{n} \eta_j\|}{a_n(L_2 n)^{\alpha}} < \infty\right\} = 1 ;$$

ii) $P\left\{\sup\limits_{n\geq 1} \dfrac{\|\sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j\|}{a_n(L_2 n)^{\alpha}} < \infty\right\} = 1$;

iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\|\sum\limits_{j=1}^{n} \theta_j\|}{a_n(L_2 n)^{\alpha}} = 0$ p.s.

(i) Remarquons d'abord que si $\sup\limits_{n\geq 1} E\left\{\dfrac{\|S_n(X)\|}{a_n(L_2 n)^{\alpha}}\right\} < \infty$, alors par symétrie :

$$\sup_{n\geq 1}\left\{\frac{\|\sum\limits_{j=1}^{n} \eta_j\|}{a_n(L_2 n)^{\alpha}}\right\} < \infty .$$

L'outil essentiel dans la preuve de ce premier point est l'inégalité exponentielle de J. Kuelbs - V.V. Yurinskii ([7], lemme 2.1) que nous rappelons :

LEMME 1. $Y_1, \ldots, Y_n$ <u>désignent</u> n <u>v.a. indépendantes à valeurs dans</u> B , <u>telles qu'il existe deux constantes</u> $b > 0$ <u>et</u> $c \geq 0$ <u>vérifiant</u> :

$$\forall\, j = 1, \ldots, n , \quad \|Y_j\| \leq bc \quad \underline{\text{p.s.}} .$$

<u>Alors pour tout</u> $\varepsilon > 0$ <u>et</u> $\alpha \geq 0$:

$$P\left\{\frac{\|\sum\limits_{j=1}^{n} Y_j\|}{2b} > \varepsilon\right\}$$

$$\leq \exp\Big(-\varepsilon^2 + \frac{\varepsilon^2}{2} \exp(\varepsilon c) \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{b^2} E\{\|Y_j\|^2\} + \frac{\varepsilon}{2b} E\{\|\sum_{j=1}^{n} Y_j\|\}\Big)$$

$$\leq \exp\Big(-\varepsilon^2 + \frac{\varepsilon^2}{2} \exp(\varepsilon c)\, (L_2 bc)^{2\alpha} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{b^2} E\left\{\frac{\|Y_j\|^2}{(L_2\|Y_j\|)^{2\alpha}}\right\} + \frac{\varepsilon}{2b} E\{\|\sum_{j=1}^{n} Y_j\|\}\Big) .$$

Appliquons cette dernière inégalité aux v.a. indépendantes $\eta_1, \ldots, \eta_{2^n}$ ($n \in \mathbb{N}$) avec :

$$b = (2^n)^{\frac{1}{2}} (L_2\, 2^n)^{\alpha} \left(E\left\{\frac{\|X\|^2}{(L_2\|X\|)^{2\alpha}}\right\}\right)^{\frac{1}{2}} ,$$

$$c = \lambda[(L_2\ 2^n)\ E\{\frac{\|X\|^2}{(L_2\|X\|)^{2\alpha}}\}]^{-\frac{1}{2}}\ ,$$

$$\varepsilon = \gamma(L_2\ 2^n)^{\frac{1}{2}}(E\{\frac{\|X\|^2}{(L_2\|X\|)^{2\alpha}}\})^{-\frac{1}{2}}\ ,$$

où γ désigne un nombre réel strictement positif. Alors pour tout entier n:

$$P\left\{\frac{\|\sum_{j=1}^{2^n} \eta_j\|}{2(2^n\ L_2\ 2^n)^{\frac{1}{2}}(L_2\ 2^n)^{\alpha}} > \gamma\right\}$$

$$\leq \exp\left\{(E\{\frac{\|X\|^2}{(L_2\|X\|)^{2\alpha}}\})^{-1}(L_2\ 2^n)\left[-\gamma^2 + \frac{\gamma^2}{2}\exp[\lambda\gamma(E\{\frac{\|X\|^2}{(L_2\|X\|)^{2\alpha}}\})^{-1}]\right.\right.$$

$$\times [L_2(\lambda(2^n)^{\frac{1}{2}}(L_2 2^n)^{-\frac{1}{2}}(L_2 2^n)^{\alpha})]^{2\alpha}\ (L_2 2^n)^{-2\alpha}$$

$$\left.\left. + \gamma \sup_{n\geq 1} E\left\{\frac{\|\sum_{j=1}^{n} \eta_j\|}{a_n(L_2 n)^{\alpha}}\right\}\right]\right\}\ .$$

Il reste à choisir $\gamma > 0$ tel que :

$$\sup_{n\geq 1} E\left\{\frac{\|\sum_{j=1}^{n} \eta_j\|}{a_n(L_2 n)^{\alpha}}\right\} \leq \frac{\gamma}{8} \quad \text{et} \quad 2(E\left\{\frac{\|X\|^2}{(L_2\|X\|)^{2\alpha}}\right\})^{\frac{1}{2}} < \gamma\ ,$$

puis ensuite $\lambda > 0$ tel que :

$$\exp\left[\lambda\gamma(E\left\{\frac{\|X\|^2}{(L_2\|X\|)^{2\alpha}}\right\})^{-1}\right] \leq \frac{5}{4}\ ;$$

il existe alors un entier n_o tel que pour tout $n \geq n_o$ on ait :

$$P\left\{\frac{\|\sum_{j=1}^{2^n} \eta_j\|}{2(2^n\ L_2\ 2^n)^{\frac{1}{2}}\ (L_2\ 2^n)^{\alpha}} > \gamma\right\}$$

$$\leq \exp\left\{-L_2\ 2^n\left[\frac{\gamma^2}{4}\ (E\left\{\frac{\|X\|^2}{(L_2\|X\|)^{2\alpha}}\right\})^{-1}\right]\right\}\ ,$$

et donc :

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left\{\frac{\|\sum_{j=1}^{2^n} \eta_j\|}{(2^n L_2 2^n)^{\frac{1}{2}} (L_2 2^n)^{\alpha}} > 2\gamma\right\} < \infty .$$

Les inégalités pour les v.a. symétriques de P. Lévy permettent d'écrire :

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left\{\sup_{2^{n-1}<k\leq 2^n} \frac{\|\sum_{j=1}^{k} \eta_j\|}{a_k (L_2 k)^{\alpha}} > 4\gamma\right\}$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} P\left\{\sup_{k\leq 2^n} \frac{\|\sum_{j=1}^{k} \eta_j\|}{(2^n L_2 2^n)^{\frac{1}{2}} (L_2 2^n)^{\alpha}} > 2\gamma\right\}$$

$$\leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} P\left\{\frac{\|\sum_{j=1}^{2^n} \eta_j\|}{(2^n L_2 2^n)^{\frac{1}{2}} (L_2 2^n)^{\alpha}} > 2\gamma\right\} < \infty ;$$

et enfin, en vertu du lemme de Borel-Cantelli :

$$P\left\{\sup_{n\geq 1} \frac{\|\sum_{j=1}^{n} \eta_j\|}{a_n (L_2 n)^{\alpha}} < \infty\right\} = 1 ;$$

d'où la propriété (i).

ii) La démonstration de ce deuxième point repose sur un lemme dû à B. Heinkel ([4], lemme 4) :

LEMME 2. <u>Si l'on pose pour tout entier</u> n

$$I(n) = \{2^n + 1 , \dots , 2^{n+1}\} ,$$

<u>et</u>

$$\Lambda(n) = \frac{1}{2^n} \sum_{j \in I(n)} E\left\{\frac{\|\xi_j\|^2}{(L_2\|\xi_j\|)^{1+2\alpha}}\right\} ,$$

<u>on a</u> :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Lambda(n)^2 < \infty .$$

<u>Démonstration du lemme 2</u>. L'outil fondamental pour la preuve de ce lemme est l'inégalité suivante :

$$(*) \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}\ , \quad \sum_{j \in I(n)} \frac{1}{j} \int_0^1 x\, dx \leq 1\ .$$

Notons φ la fonction sur R^+ , à valeurs positives, définie par :

$$\varphi(x) = \frac{x^2}{(L_2 x)^{1+2\alpha}}\ .$$

Puisque $\sup_{n \geq 1} E\left\{\frac{\|S_n(X)\|}{a_n(L_2 n)^\alpha}\right\} < \infty$, la suite $\left(\frac{S_n(X)}{a_n(L_2 n)^\alpha}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée en probabilité ; on sait alors (voir [5]) qu'il existe une constante positive C telle que :

$$\forall\, x > 0\ , \quad P\{\|X\| > x\} \leq \frac{C}{\varphi(x)}\ .$$

De l'inégalité (*) on déduit :

$$\sum_{j \in I(n)} \frac{1}{L_2 j} \int_0^1 x^3\, P\left\{\left(\frac{\varphi(\|\xi_j\|)}{16\lambda^2 j (L_2 j)^{-1}}\right)^{\frac{1}{2}} > x\right\} dx \leq \frac{C}{16\lambda^2}\ .$$

Remarquons à présent qu'il existe un entier n_o tel que pour tout $j > 2^{n_o}$ on ait :

$$\forall\, x > 1\ , \quad P\left\{\left(\frac{\varphi(\|\xi_j\|)}{16\lambda^2 j (L_2 j)^{-1}}\right)^{\frac{1}{2}} > x\right\} = 0\ .$$

Donc, pour tout entier $n \geq n_o$ on a :

$$\sum_{j \in I(n)} \frac{L_2 j}{j^2}\, E\{(\varphi(\|\xi_j\|))^2\} \leq 64 C\, \lambda^2\ .$$

Enfin, par application de l'inégalité de Schwarz, on a pour tout $n \geq n_o$:

$$\Lambda(n) = \frac{1}{2^n} \sum_{j \in I(n)} E\{\varphi(\|\xi_j\|)\}$$

$$\leq 2 \sum_{j \in I(n)} \frac{1}{j} \left(E\{(\varphi(\|\xi_j\|))^2\}\right)^{\frac{1}{2}} \left(P\{\|X_j\| > \lambda j^{\frac{1}{2}} (L_2 j)^{-\frac{1}{2}} (L_2 j)^\alpha\}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq 2 \sum_{j \in I(n)} \left(\frac{L_2 j}{j^2}\, E\{(\varphi(\|\xi_j\|))^2\}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{L_2 j}\, P\{\|X_j\| > \lambda j^{\frac{1}{2}} (L_2 j)^{-\frac{1}{2}} (L_2 j)^\alpha\}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq 16\,\lambda\, C^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{j\in I(n)} \frac{1}{L_2 j}\, P\{\|X_j\| > \lambda j^{\frac{1}{2}}(L_2 j)^{-\frac{1}{2}}(L_2 j)^{\alpha}\}\Big)^{\frac{1}{2}} .$$

D'où

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Lambda(n)^2 \;\leq\; K\, E\Big\{\frac{\|X\|^2}{(L_2\|X\|)^{2\alpha}}\Big\} < \infty ,$$

ce qui termine la démonstration du lemme 2.

Désignons par δ un nombre réel strictement positif et posons pour tout entier n et tout $j \in I(n)$:

$$\beta_n = (2^n\, L_2\, 2^n)^{\frac{1}{2}}\,(L_2\, 2^n)^{\alpha} ;$$

$$h_j = \xi_j\, I_{\{\|\xi_j\| \leq \Lambda(n)^{\frac{1}{4}}\, \beta_n\}} ;$$

$$k_j = \xi_j\, I_{\{\|\xi_j\| > \frac{\delta}{4}\, \beta_n\}} ;$$

$$\ell_j = \xi_j - k_j - h_j ;$$

$$U_n^1 = \Big\|\sum_{j\in I(n)} h_j\Big\| ,\quad U_n^2 = \Big\|\sum_{j\in I(n)} k_j\Big\| ,\quad U_n^3 = \Big\|\sum_{j\in I(n)} \ell_j\Big\| .$$

Montrons que l'on peut choisir $\delta > 0$ tel que :

$$\forall\, r = 1, 2, 3 ,\quad (r) :\ \sum_{n=0}^{\infty} P\{U_n^r > \delta\,\beta_n\} < \infty .$$

(1) On applique l'inégalité exponentielle de J. Kuelbs - V.V. Yurinskii rappelée précédemment :

$$P\{U_n^1 > \delta\,\beta_n\}$$

$$= P\Big\{\frac{U_n^1}{2\,\delta\,\beta_n\,\Lambda(n)^{1/8}} > \frac{1}{2}\,\Lambda(n)^{-1/8}\Big\}$$

$$\leq \exp\Big[-\frac{1}{4}\,\Lambda(n)^{-\frac{1}{4}} + \frac{1}{8\delta^2}\,\Lambda(n)^{-\frac{1}{2}}\,\exp\big(\tfrac{1}{2\delta}\big)\Big[L_2\big(\beta_n\Lambda(n)^{\frac{1}{4}}\big)\Big]^{1+2\alpha}\,\beta_n^{-2}\Big(\sum_{j\in I(n)} E\{\varphi(\|\xi_j\|)\}\Big)$$

$$+ \frac{1}{4\delta}\,\Lambda(n)^{-\frac{1}{4}}\, E\Big\{\frac{U_n^1}{(2^n\, L_2\, 2^n)^{\frac{1}{2}}(L_2\, 2^n)^{\alpha}}\Big\}\Big] .$$

On peut choisir $\delta > 0$ tel que :

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} E\left\{ \frac{U_n^1}{(2^n\ L_2\ 2^n)^{\frac{1}{2}}(L_2\ 2^n)^{\alpha}} \right\} \leq \frac{\delta}{4} .$$

Par suite, il existe un entier n_1 tel que pour tout $n \geq n_1$ on ait :

$$P\{U_n^1 > \delta\ \beta_n\} \leq \exp[-\frac{1}{8}\ \Lambda(n)^{-\frac{1}{4}}] \leq d\ \Lambda(n)^2 ,$$

et donc,

$$\sum_{n=0}^{\infty} P\{U_n^1 > \delta\ \beta_n\} < \infty .$$

(2) Du fait des bornes choisies pour faire la troncation définissant les ξ_j, on a :

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\|\xi_j\|}{(j\ L_2 j)^{\frac{1}{2}}(L_2 j)^{\alpha}} = 0 \quad \text{p.s. ;}$$

pour presque tout $\omega\in\Omega$, il n'y a donc qu'un nombre fini d'indices n tels que :

$$U_n^2(\omega) \neq 0 .$$

D'où le point (2) par le lemme de Borel-Cantelli.

(3) Il est clair qu'il existe un entier n_2 tel que, pour tout $n \geq n_2$:

$$\Lambda(n)^{\frac{1}{4}}\ \beta_n < \frac{\delta}{4}\ \beta_n ;$$

donc pour tout entier $n \geq n_2$,

$$P\{U_n^3 > \delta\ \beta_n\}$$

$$\leq P\{\text{il existe au moins 4 indices } j\in I(n) \text{ tels que : } \|\ell_j\| > \beta_n \Lambda(n)^{\frac{1}{4}}\}$$

$$\leq \Big(\sum_{j\in I(n)} P\{\|\ell_j\| > \beta_n\ \Lambda(n)^{\frac{1}{4}}\}\Big)^4 .$$

D'autre part :

$$\sum_{j\in I(n)} P\{\|\ell_j\| > \beta_n\ \Lambda(n)^{\frac{1}{4}}\}$$

$$\leq \sum_{j\in I(n)} [\varphi(\beta_n\ \Lambda(n)^{\frac{1}{4}})]^{-1}\ E\{\varphi(\|\xi_j\|)\}$$

$$\leq 2^n[\varphi(\beta_n\ \Lambda(n)^{\frac{1}{4}})]^{-1}\ \Lambda(n) ;$$

par suite il existe un entier n_3 tel que, pour tout $n \geq n_3$:

$$\sum_{j \in I(n)} P\{\|\ell_j\| > \beta_n \Lambda(n)^{\frac{1}{4}}\} \leq \Lambda(n)^{\frac{1}{2}} ,$$

d'où le point (3).

La conclusion de la démonstration de la propriété (ii) s'obtient alors de la remarque suivante : par symétrie :

$$\sum_{n=0}^{\infty} P\left\{ \sup_{j \in I(n)} \frac{\|\sum_{k=2^n+1}^{j} \xi_k\|}{\beta_n} > 3\delta \right\}$$

$$\leq 2 \sum_{n=0}^{\infty} P\left\{ \|\sum_{j \in I(n)} \xi_j\| > 3\delta\beta_n \right\}$$

$$\leq 2 \sum_{r=1}^{3} \sum_{n=0}^{\infty} P\{U_n^r > \delta\beta_n\} < \infty .$$

Ainsi par application du lemme de Borel-Cantelli :

$$P\left\{ \sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{j \in I(n)} \frac{\|\sum_{k=2^n+1}^{j} \xi_k\|}{\beta_n} < \infty \right\} = 1 .$$

Soit à présent un entier n , $2^k < n \leq 2^{k+1}$; on a :

$$\frac{\|\sum_{j=1}^{n} \xi_j\|}{a_n(L_2 n)^{\alpha}}$$

$$\leq \frac{\|\xi_1\|}{\beta_k} + \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\beta_j}{\beta_k} \cdot \frac{\|\sum_{r \in I(j)} \xi_r\|}{\beta_j} + \sup_{j \in I(k)} \frac{\|\sum_{r=2^k+1}^{j} \xi_r\|}{\beta_k} ;$$

d'où l'on déduit que pour presque tout $\omega \in \Omega$, il existe une constante $M(\omega)$ telle que :

$$\frac{\|\sum_{j=1}^{n} \xi_j\|}{a_n(L_2 n)^{\alpha}} \leq M(\omega) [2 + \sum_{j=0}^{k-1} 2^{j/2 - k/2}] \leq 5M(\omega) ;$$

et donc :

$$P\left\{\sup_{n\geq 1} \frac{\|\sum_{j=1}^{n} \xi_j\|}{a_n(L_2 n)^{\alpha}} < \infty\right\} = 1 .$$

Ce qui achève la démonstration de la propriété (ii).

iii) Comme :

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{\|\theta_n\| \neq 0\} \leq L\, E\left\{\frac{\|X\|^2}{(L_2\|X\|)^{2\alpha}}\right\} ,$$

le lemme de Borel-Cantelli établit la propriété (iii).

Ce qui termine la démonstration de la première partie du théorème 5.

2) La preuve de cette deuxième partie se réduit à établir l'implication (2.2) $\Longrightarrow$ (2.1) ; en effet, (2.3) implique (2.2) par la première partie et le théorème de convergence dominée et (2.1) implique trivialement (2.3).

Notons $T(X)$ la norme $\sup_{n\geq 1} E\left\{\frac{\|S_n(X)\|}{a_n(L_2 n)^{\alpha}}\right\}$ et Φ une fonction de Young équivalente à l'infini à la fonction $\frac{x^2}{(L_2 x)^{2\alpha}}$ $(x \geq 0)$. Φ vérifiant la condition Δ_2 (i.e. $\Phi(2x) \leq M\Phi(x)$ pour $x \geq x_o$), l'espace d'Orlicz $L^{\Phi}(B)$ des v.a. Z à valeurs dans B telle que

$$\|Z\|_{\Phi} = \inf\left\{a > 0 \ : \ E\left\{\Phi\left(\frac{\|Z\|}{a}\right)\right\} \leq 1\right\} < \infty$$

est, muni de sa norme de Luxemburg $\|.\|_{\Phi}$, un espace de Banach réel séparable. La première partie et le théorème du graphe fermé nous assurent alors l'existence d'une constante positive C telle que :

$$N(X) \leq C[T(X) + \|X\|_{\Phi}] .$$

Puisque $\lim_{n\to\infty} E\left\{\frac{\|S_n(X)\|}{a_n(L_2 n)^{\alpha}}\right\} = 0$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un entier n_o tel que :

$$\sup_{n \geq n_o} E\left\{\frac{\|S_n(X)\|}{a_n(L_2 n)^\alpha}\right\} \leq \frac{\varepsilon}{4C} .$$

Les v.a. étagées étant denses dans l'espace d'Orlicz $L^\Phi(B)$, on peut choisir une sous-tribu finie $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}$ telle que, si $Y = E\{X \mid \mathcal{G}\}$:

$$\sup_{n < n_o} E\left\{\frac{\|S_n(X-Y)\|}{a_n (L_2 n)^\alpha}\right\} \leq \frac{\varepsilon}{4C}$$

et

$$\|X-Y\|_\Phi \leq \frac{\varepsilon}{4C} .$$

L'inégalité de Jensen nous assurant que $T(X-Y) \leq 2T(X)$, il s'ensuit que :

$$N(X-Y) \leq \varepsilon .$$

Il reste à voir que : $\pi(X) = \lim_{k\to\infty} \sup_{n\geq k} \dfrac{\|S_n(X)\|}{a_n(L_2 n)^\alpha} = 0$ p.s. ; or

$$\pi(X) \leq \pi(Y) + \lim_{k\to\infty} \sup_{n\geq k} \frac{\|S_n(X-Y)\|}{a_n(L_2 n)^\alpha} .$$

Puisque Y est étagée, elle vérifie la loi du logarithme itéré, d'où $\pi(Y) = 0$ p.s. car $\alpha > 0$. En conclusion $E\{\pi(X)\} \leq \varepsilon$; ε étant arbitraire, $\pi(X) = 0$ p.s. .

Ce qui met un point final à la démonstration du théorème 5.

Remarque. Sous les hypothèses du théorème 4, posons pour tout entier n :

$$\eta'_n = X_n \, I_{\{\|X_n\| \leq n^{\frac{1}{2}}(L_2 n)^{-\frac{1}{2}}\}} ,$$

$$\xi'_n = X_n \, I_{\{n^{\frac{1}{2}}(L_2 n)^{-\frac{1}{2}} < \|X_n\| \leq (nL_2 n)^{\frac{1}{2}}\}} ,$$

$$\theta'_n = X_n \, I_{\{\|X_n\| > (nL_2 n)^{\frac{1}{2}}\}} .$$

Nous ne revenons pas sur la suite $(\theta'_n)_{n\in\mathbb{N}}$; il est clair que :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|\sum_{j=1}^{n} \theta'_j\|}{a_n} = 0 \quad \text{p.s.}\ .$$

Observons à présent que pour tout réel $\gamma > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|\sum_{j=1}^{n} \xi'_j\|}{a_n (L_2 n)^{\gamma}} = 0 \quad \text{p.s.}\ .$$

En effet, le lemme 2 du point (ii) de la démonstration du théorème 5 peut être sensiblement amélioré de la manière suivante :

LEMME 3. Si pour tout entier n ,

$$\Lambda(n) = \frac{1}{2^n (L_2\, 2^n)^{2\gamma}} \sum_{j\in I(n)} E\left\{\frac{\|\xi'_j\|^2}{L_2\|\xi'_j\|}\right\},$$

alors :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Lambda(n)^2 < \infty\ .$$

Démonstration du lemme 3. On peut toujours supposer $\frac{1}{2} > \gamma > 0$; il existe m tel que :

$$q = 2^{-m} \le 2\gamma < 2^{-m+1}\ .$$

Posons à présent pour tout entier j et tout $k = 1, \ldots, 2^m$:

$$c(k) = k\, 2^{-m+1} - 1\ ,$$

$$\xi_j'^{k} = \xi'_j\, I_{\{[j(L_2 j)^{c(k-1)}]^{\frac{1}{2}} < \|\xi'_j\| \le [j(L_2 j)^{c(k)}]^{\frac{1}{2}}\}}\ ;$$

puis pour tout entier n :

$$\Lambda_k(n) = \frac{1}{2^n (L_2\, 2^n)^{q}} \sum_{j\in I(n)} E\left\{\frac{\|\xi_j'^{k}\|^2}{L_2\|\xi_j'^{k}\|}\right\}.$$

Puisque pour tout n ,

$$\Lambda(n)^2 \le \left[\sum_{k=1}^{2^m} \Lambda_k(n)\right]^2 \le K \sum_{k=1}^{2^m} \Lambda_k(n)^2\ ,$$

il suffira d'établir :

$$\forall\, k = 1, \ldots, 2^m, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \Lambda_k(n)^2 < \infty .$$

comme dans le lemme 2, la démonstration repose essentiellement sur l'inégalité :

$$(*) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{j \in I(n)} \frac{1}{j} \int_0^1 x\, dx \leq 1 .$$

Nous désignons par ψ la fonction sur R^+, à valeurs positives, définie par $\psi(x) = \frac{x^2}{L_2 x}$; sous l'hypothèse ii) du théorème 4, il existe une constante positive C telle que :

$$\forall\, x > 0, \quad P\{\|X\| > x\} \leq \frac{C}{\psi(x)} .$$

Soit à présent k, $1 \leq k \leq 2^m$; d'après ce qui précède, pour tout entier n, on a :

$$\sum_{j \in I(n)} (L_2 j)^{c(k)-1} \int_0^1 x^3\, P\left\{\left(\frac{\psi(\|\xi_j^{\prime k}\|)}{16 j\, (L_2 j)^{c(k)-1}}\right)^{\frac{1}{2}} > x\right\} dx \leq \frac{C}{16} .$$

Il existe donc un entier n_o, tel que pour tout $n \geq n_o$ on ait :

$$\sum_{j \in I(n)} \frac{(L_2 j)^{1-c(k)}}{j^2} E\{(\psi(\|\xi_j^{\prime k}\|))^2\} \leq 64\, C .$$

Enfin, par application de l'inégalité de Schwarz, on a pour tout $n \geq n_o$:

$$\Lambda_k(n) = \frac{1}{2^n (L_2 2^n)^q} \sum_{j \in I(n)} E\{\psi(\|\xi_j^{\prime k}\|)\}$$

$$\leq 4 \sum_{j \in I(n)} \frac{1}{j (L_2 j)^q} (E\{(\psi(\|\xi_j^{\prime k}\|))^2\})^{\frac{1}{2}} (P\{\|X_j\| > [j (L_2 j)^{c(k-1)}]^{\frac{1}{2}}\})^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq 32 C^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{j \in I(n)} (L_2 j)^{c(k-1)-1}\, P\{\|X_j\| > [j (L_2 j)^{c(k-1)}]^{\frac{1}{2}}\}\Big)^{\frac{1}{2}} .$$

D'où :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Lambda_k(n)^2 \leq L\, E\left\{\frac{\|X\|^2}{L_2\|X\|}\right\} < \infty .$$

Ce qui achève la démonstration du lemme 3.

Les mêmes arguments que ceux développés dans la preuve de la propriété (ii) nous montrent alors que :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left\|\sum_{j=1}^{n} \xi'_j\right\|}{a_n (L_2 n)^{\gamma}} = 0 \text{ p.s. ;}$$

(notons également que si $\gamma = 0$ était atteignable dans le lemme 3, nous aurions :

$$P\left\{\sup_{n\geq 1} \frac{\left\|\sum_{j=1}^{n} \xi'_j\right\|}{a_n} < \infty\right\} = 1 \text{).}$$

Cette observation pose la question de savoir si sous les mêmes hypothèses (c'est-à-dire celles du théorème 4), on a pour tout réel $\gamma > 0$:

$$P\left\{\sup_{n\geq 1} \frac{\left\|\sum_{j=1}^{n} \eta'_j\right\|}{a_n (L_2 n)^{\gamma}} < \infty\right\} = 1 \text{ ;}$$

Auquel cas nous concluerions que pour tout $\gamma > 0$:

$$P\left\{\sup_{n\geq 1} \frac{\|S_n(X)\|}{a_n (L_2 n)^{\gamma}} < \infty\right\} = 1 ,$$

et $$\lim_{n\to\infty} \frac{\|S_n(X)\|}{a_n (L_2 n)^{\gamma}} = 0 \text{ p.s.,}$$

par une démonstration analogue à celle de la deuxième partie du théorème 5.

Comme corollaire du théorème 5, on peut énoncer :

THEOREME 6. <u>Soit</u> X <u>une v.a. à valeurs dans un espace de Banach</u> B <u>de type 2, centrée et telle que</u> $E\left\{\frac{\|X\|^2}{(L_2\|X\|)^{2\alpha}}\right\} < \infty$ <u>où</u> α <u>désigne un nombre réel strictement positif</u> ; <u>alors</u> :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n(X)}{a_n(L_2 n)^\alpha} = 0 \quad \underline{\text{p.s.}}\ .$$

<u>Remarque</u>. Pour $\alpha = \frac{1}{2}$, la condition $E\left\{\frac{\|X\|^2}{(L_2\|X\|)^{2\alpha}}\right\} < \infty$ est nécessaire pour que X vérifie la loi du logarithme itéré, et, comme l'ont montré récemment V. Goodman, J. Kuelbs et J. Zinn ([3]), jointe à l'hypothèse d'existence de moments faibles (i.e. $\forall\, f \in B'$, $E\{(f(X))^2\} < \infty$), elle est également suffisante pour qu'une v.a. à valeurs dans un espace de Hilbert satisfait à la loi du logarithme itéré bornée. Comme le montre le théorème 6, cette situation n'est pas loin de se généraliser aux espaces de type 2.

<u>Démonstration du théorème 6.</u>

Il suffit de prouver le lemme suivant dû à V. Goodman, J. Kuelbs et J. Zinn ([3], Proposition 7.2), mais la démonstration que nous en donnons est de B. Heinkel (communication personnelle) :

Lemme 4. <u>Sous les hypothèses du théorème 6</u>,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n(X)}{n^{\frac{1}{2}}(L_2 n)^\alpha} = 0 \quad \underline{\text{en probabilité}}.$$

<u>Démonstration du lemme 4</u>. Posons pour tout entier n :

$$u_n = X_n\, I_{\{\|X_n\| \le n^{\frac{1}{2}}(L_2 n)^\alpha\}}\ .$$

Puisque $E\left\{\frac{\|X\|^2}{(L_2\|X\|)^{2\alpha}}\right\} < \infty$, en vertu du lemme de Borel-Cantelli, il suffit de prouver que :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{j=1}^{n} u_j}{n^{\frac{1}{2}}(L_2 n)^\alpha} = 0 \quad \text{en probabilité.}$$

B étant de type 2, il existe une constante positive C telle que, pour tout entier n,

$$E\left\{\left(\frac{\|\sum_{j=1}^{n} u_j\|}{n^{\frac{1}{2}}(L_2 n)^{\alpha}}\right)^2\right\} \leq \frac{C}{n(L_2 n)^{2\alpha}} \sum_{j=1}^{n} E\{\|u_j\|^2\} .$$

La démonstration se réduit donc à établir que :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n(L_2 n)^{2\alpha}} \sum_{j=1}^{n} E\{\|u_j\|^2\} = 0 ,$$

et utilise la loi des grands nombres de W. Feller ; la formulation que nous en donnons ici est celle qui figure dans le livre de K.L. Chung ([2], page 128) :

THEOREME 7. <u>Si</u> $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ <u>est une suite de v.a. réelles indépendantes et équidistribuées et si</u> $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ <u>est une suite de nombres positifs telle que</u> $\frac{b_n}{n}$ <u>tende en croissant vers l'infini, alors</u> :

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|\sum_{j=1}^{n} Z_j|}{b_n} = 0 \ \underline{\text{ou}} \ \infty \ \underline{\text{p.s.}}$$

<u>selon que</u> :

$$\sum_{n=0}^{\infty} P\{|Z_n| \geq b_n\} \ \underline{\text{converge ou diverge}}.$$

Par suite :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{j=1}^{n} \|u_j\|^2}{n(L_2 n)^{2\alpha}} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{j=1}^{n} \|X_j\|^2}{n(L_2 n)^{2\alpha}} = 0 \ \text{p.s.} .$$

La conclusion s'obtient alors de l'inégalité de J. Hàjek - A. Rényi (cf. [1]) : pour tout $\varepsilon > 0$ et tout entier m,

$$P\left\{\sup_{n\geq m}\frac{\left|\sum_{j=1}^{n}(\|u_j\|^2-E\{\|u_j\|^2\})\right|}{n(L_2n)^{2\alpha}}>\varepsilon\right\}$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon^2}\left[\frac{1}{(m(L_2m)^{2\alpha})^2}\sum_{j=1}^{m}E\{(\|u_j\|^2-E\{\|u_j\|^2\})^2\}\right.$$

$$\left.+\sum_{j=m+1}^{\infty}\frac{1}{(j(L_2j)^{2\alpha})^2}E\{(\|u_j\|^2-E\{\|u_j\|^2\})^2\}\right]$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon^2}\left[\frac{1}{(m(L_2m)^{2\alpha})^2}\sum_{j=1}^{m}E\{\|u_j\|^4\}+\sum_{j=m+1}^{\infty}\frac{1}{(j(L_2j)^{2\alpha})^2}E\{\|u_j\|^4\}\right].$$

Or :

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(j(L_2j)^{2\alpha})^2}E\{\|u_j\|^4\}$$

$$=4\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^{\infty}t^3\,P\{\|X_j\|\,I_{\{\|X_j\|\leq j^{\frac{1}{2}}(L_2j)^{\alpha}\}}>t\,j^{\frac{1}{2}}\,(L_2j)^{\alpha}\}\,dt$$

$$\leq 4\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^{1}t^3\,P\{\|X_j\|>t\,j^{\frac{1}{2}}\,(L_2j)\}\,dt$$

$$\leq 4K\int_0^1 t^3\,E\left\{\frac{(\|X\|/t)^2}{(L_2(\|X\|/t))^{2\alpha}}\right\}dt$$

$$\leq 4K\,E\left\{\frac{\|X\|^2}{(L_2\|X\|)^{2\alpha}}\right\}\int_0^1 t\,dt<\infty .$$

Ainsi, par application du lemme de Kronecker :

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\sup_{n\geq m}\left|\frac{\sum_{j=1}^{n}\|u_j\|^2}{n(L_2n)^{2\alpha}}-\frac{\sum_{j=1}^{n}E\{\|u_j\|^2\}}{n(L_2n)^{2\alpha}}\right|>\varepsilon\right\}=0\ ;$$

d'où le résultat.

La situation du théorème 6 ne se généralise pas à tous les espaces de Banach, comme le montre l'exemple suivant (cf. [9], exemple 7.3) : si c_o est l'espace de Banach des suites réelles tendant vers 0 , il existe une v.a. X à valeurs dans c_o , bornée et centrée, vérifiant :

$$P\left\{ \sup_{n \geq 1} \frac{\|S_n(X)\|}{a_n (L_2 n)^{\alpha}} < \infty \right\} = 1$$

et

$$P\left\{ \left(\frac{S_n(X)}{a_n (L_2 n)^{\alpha}} \right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est relativement compacte dans } c_o \right\} = 0 ,$$

où α est un nombre réel positif. L'espace c_o n'étant d'aucun type p pour $p > 1$, l'hypothèse de type 2 ne peut être supprimée dans le théorème 6.

Considérons la v.a. X à valeurs dans c_o définie par :

$$X = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \, e_k \, \varepsilon_k$$

où $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite élément de c_o , $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la base canonique de c_o et $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a. de Rademacher (i.e. $P\{\varepsilon_k = 1\} =$ $= P\{\varepsilon_k = -1\} = \frac{1}{2}$) indépendantes. X est centrée et :

$$\|X\| = \sup_{k \geq 0} |x_k| = c < \infty .$$

Pour tout entier N , notons R_N l'opérateur de c_o dans c_o défini par :

$$R_N \, e_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k < N \\ e_k & \text{si } k \geq N \end{cases}$$

et

$$Y_N = \sup_{n \geq 1} \left\| R_N \frac{S_n(X)}{a_n (L_2 n)^{\alpha}} \right\| .$$

$(\varepsilon^i)_{i \in \mathbb{N}}$ désigne une suite de copies indépendantes de la suite de Rademacher $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de façon à ce que :

$$S_n(X) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \, e_k \left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_k^i \right) ;$$

on peut donc écrire :

$$\gamma_N = \sup_{m \geq N} |x_m| \, f_m ,$$

où les v.a. réelles f_m , $m \in \mathbb{N}$, sont indépendantes de même loi que

$$f = \sup_{n \geq 1} \frac{|\sum_{n=1}^{n} \varepsilon_i|}{a_n (L_2 n)^{\alpha}} .$$

Nous aurons besoin des deux lemmes suivants :

LEMME 5 (J. Kuelbs, [6] lemme 1). <u>Pour tout réel</u> $\beta > 0$, $E\{\exp(\beta M^2)\} < \infty$, <u>où</u> $M = \sup_{n \geq 1} \frac{|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i|}{a_n}$.

LEMME 6.

1) $$P\left\{ \sup_{n \geq 1} \frac{\|S_n(X)\|}{a_n (L_2 n)^{\alpha}} < \infty \right\} = 1$$

<u>si et seulement si</u> :

$$\exists \, t > 0 , \quad \sum_{m=0}^{\infty} P\{|x_m| f_m > t\} < \infty ;$$

2) $P\left\{ \left(\frac{S_n(X)}{a_n (L_2 n)^{\alpha}}\right)_{n \in \mathbb{N}}\right.$ <u>est relativement compacte dans</u> $\left. c_o \right\} = 1$

<u>si et seulement si</u> :

$$\forall \, t > 0 , \quad \sum_{m=0}^{\infty} P\{|x_m| f_m > t\} < \infty .$$

<u>Démonstration du lemme 6.</u>

Le point 1) est une conséquence immédiate du lemme de Borel-Cantelli.

Dire que la suite $\left(\frac{S_n(X)}{a_n (L_2 n)^{\alpha}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est p.s. relativement compacte dans l'espace de Banach c_o équivaut à dire qu'elle est p.s. précompacte, donc que :

(a) $$\lim_{N \to \infty} \sup_{n \geq 1} \inf_{j=1}^{N} \left\| \frac{S_n(X)}{a_n (L_2 n)^{\alpha}} - \frac{S_j(X)}{a_j (L_2 j)^{\alpha}} \right\| = 0 \quad \text{p.s.} .$$

En vertu du lemme de Borel-Cantelli il s'agit donc de montrer que (a) est équivalent à (b) où :

(b) $\lim_{N\to\infty} Y_N = 0$ p.s. .

Dans tout ce qui suit, nous omettrons les mots p.s. .

• (a) $\Longrightarrow$ (b) : par hypothèse,

$$\forall\, \varepsilon>0\ ,\quad \exists\, N_o \in \mathbb{N}\ ,\quad \forall\, n\geq 1\ ,\quad \exists\, j\ ,\quad 1\leq j\leq N_o :$$

$$\left\| \frac{S_n(X)}{a_n(L_2 n)^{\alpha}} - \frac{S_j(X)}{a_j(L_2 j)^{\alpha}} \right\|$$

$$= \sup_{k\geq 0} |x_k| \left| \frac{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_k^i}{a_n(L_2 n)^{\alpha}} - \frac{\sum_{i=1}^{j} \varepsilon_k^i}{a_j(L_2 j)^{\alpha}} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}\ .$$

Puisque $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite élément de c_o , il existe un entier N_1 tel que pour tout $N\geq N_1$, on ait :

$$N_o \sup_{k\geq N} |x_k| \leq \frac{\varepsilon}{2}\ .$$

Par suite, pour tout $N\geq N_1$ et tout $n\geq 1$:

$$\left\| R_N \frac{S_n(X)}{a_n(L_2 n)^{\alpha}} \right\|$$

$$= \sup_{k\geq N} |x_k| \left| \frac{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_k^i}{a_n(L_2 n)^{\alpha}} \right|$$

$$\leq \sup_{k\geq N} |x_k| \left| \frac{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_k^i}{a_n(L_2 n)^{\alpha}} - \frac{\sum_{i=1}^{j} \varepsilon_k^i}{a_j(L_2 j)^{\alpha}} \right| + \sup_{k\geq N} |x_k| \left| \frac{\sum_{i=1}^{j} \varepsilon_k^i}{a_j(L_2 j)^{\alpha}} \right|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + N_o \sup_{k\geq N} |x_k| \leq \varepsilon\ .$$

D'où (b).

•• (b) $\Longrightarrow$ (a) :

$$\forall\, \varepsilon>0\ ,\ \exists\, N_o \in \mathbb{N}\ ,\ \forall\, n\geq 1 :$$

$$\left\| R_{N_o} \frac{S_n(X)}{a_n(L_2 n)^{\alpha}} \right\| = \sup_{k\geq N_o} |x_k| \left| \frac{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_k^i}{a_n(L_2 n)^{\alpha}} \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}\ .$$

Le vecteur $(\varepsilon_k\ ,\ k=0\ ,\ \dots\ ,\ N_o-1)$ satisfait à la loi du logarithme itéré dans $\mathbb{R}^{N_o}$ muni de la norme $S(y_o\ ,\dots,\ y_{N_o-1}) = \sup_{k=0}^{N_o-1} |y_k|$;

la suite $\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_k^i}{a_n}\ ,\ k=0\ ,\dots,\ N_o-1\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc relativement compacte dans $\mathbb{R}^{N_o}$; ainsi :

$$\lim_{M\to\infty} \sup_{n\geq 1} \inf_{j=1}^{M} S\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_o^i}{a_n(L_2 n)^{\alpha}} - \frac{\sum_{i=1}^{j} \varepsilon_o^i}{a_j(L_2 j)^{\alpha}}\ ,\ \dots\ ,\ \frac{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{N_o-1}^i}{a_n(L_2 n)^{\alpha}} - \frac{\sum_{i=1}^{j} \varepsilon_{N_o-1}^i}{a_j(L_2 j)^{\alpha}} \right) = 0\ .$$

Donc :

$$\exists\, M_o \in \mathbb{N}\ ,\ \forall\, M\geq M_o\ ,\ \forall\, n\geq 1\ ,\ \exists\, j\ ,\ 1\leq j\leq M :$$

$$\sup_{k=0}^{N_o-1} \left| \frac{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_k^i}{a_n(L_2 n)^{\alpha}} - \frac{\sum_{i=1}^{j} \varepsilon_k^i}{a_j(L_2 j)^{\alpha}} \right| \leq \frac{\varepsilon}{3C}$$

où $C = \sup_{k\geq 0} |x_k|$. Par suite :

$$\forall\, \varepsilon>0\ ,\ \exists\, M_o \in \mathbb{N}\ ,\ \forall\, M\geq M_o\ ,\ \forall\, n\geq 1\ ,\ \exists\, j\ ,\ 1\leq j\leq M :$$

$$\left\| \frac{S_n(X)}{a_n(L_2 n)^{\alpha}} - \frac{S_j(X)}{a_j(L_2 j)^{\alpha}} \right\|$$

$$= \sup_{k\geq 0} |x_k| \left| \frac{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_k^i}{a_n(L_2 n)^{\alpha}} - \frac{\sum_{i=1}^{j} \varepsilon_k^i}{a_j(L_2 j)^{\alpha}} \right|$$

$$\leq \sup_{k=0}^{N_o-1} |x_k| \left| \frac{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_k^i}{a_n (L_2 n)^\alpha} - \frac{\sum_{i=1}^{j} \varepsilon_k^i}{a_j (L_2 j)^\alpha} \right|$$

$$+ \sup_{k \geq N_o} |x_k| \left| \frac{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_k^i}{a_n (L_2 n)^\alpha} - \frac{\sum_{i=1}^{j} \varepsilon_k^i}{a_j (L_2 j)^\alpha} \right|$$

$$\leq C \cdot \frac{\varepsilon}{3C} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon .$$

Ce qui termine la preuve du lemme 6.

Venons en maintenant à l'exemple proprement dit ; le lemme 5 nous assure l'existence d'une constante positive C' pour laquelle :

$$\forall \lambda > 0 , \quad P\{f > \lambda\} \leq C' e^{-\lambda^2} .$$

Donc, puisque $P\{f > \lambda\}$ décroît exponentiellement vers 0 quand λ croît vers l'infini :

$$\liminf_{\lambda \to \infty} \frac{P\{f > 2\lambda\}}{P\{f > \lambda\}} = 0 .$$

On peut ainsi trouver une suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croissant vers l'infini telle que pour tout entier n on ait :

$$P\{f > 2\lambda_n\} \leq \frac{1}{2^n} P\{f > \lambda_n\} .$$

Soit M_n l'entier défini par :

$$M_n - 1 \leq \frac{1}{P\{f > \lambda_n\}} < M_n ;$$

on définit alors $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ par :

$$x_m = \frac{1}{\lambda_n} \quad \text{si} \quad M_1 + \dots + M_{n-1} < m \leq M_1 + \dots + M_n .$$

Il s'ensuit que :

$$\sum_{m=0}^{\infty} P\{f > \frac{2}{x_m}\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} M_n P\{f > 2\lambda n\} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} [P\{f > \lambda_n\} + 1] < \infty ;$$

alors que :

$$\sum_{m=0}^{\infty} P\{f > \frac{1}{x_m}\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} M_n P\{f > \lambda_n\} \geq \sum_{n=0}^{\infty} 1 = \infty .$$

Ce qui, en vertu du lemme 6, fournit le contre-exemple annoncé.

REFERENCES

[1] BAUER H. : Probability theory and elements of measure theory. Holt, Rinehart and Winston, New York (1972).

[2] CHUNG K.L. : A course in probability theory (second edition). Academic Press, New York (1974).

[3] GOODMAN V., KUELBS J., ZINN J. : Some results on the law of the iterated logarithm in Banach space with applications to weighted empirical processes (1980) ; (à paraître dans les Annales de Probabilités).

[4] HEINKEL B. : Relation entre théorème central-limite et loi du logarithme itéré dans les espaces de Banach. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie 49, 211-220 (1979).

[5] HOFFMANN-JØRGENSEN J. : Ecole d'été de Probabilités de Saint-Flour, VI, 1976 Lecture Notes in Math., 598, Berlin-Heidelberg-New York : Springer 1977.

[6] KUELBS J. : A counterexample for Banach space valued random variables. The Annals of Probability 1976, vol. 4, 684-689.

[7] KUELBS J. : Kolmogorov law of the iterated logarithm for Banach space valued random variables. Illinois J. Math. 21-4, 784-800 (1977).

[8] KUELBS J., ZINN J. : Some additional stability results for vector-valued random variables. Preprint (1980).

[9] . PISIER G. : Le théorème de la limite centrale et la loi du logarithme itéré dans les espaces de Banach. Séminaire Maurey-Schwartz 1975-76, exposés 3 et 4 .

Département de Mathématique
Université Louis Pasteur
7, rue René Descartes
67084 STRASBOURG Cédex