PAUL-ANDRÉ MEYER

Retour sur la théorie de Littlewood-Paley

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 15 (1981), p. 151-166
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1981__15__151_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1980/81

RETOUR SUR LA THEORIE DE LITTLEWOOD-PALEY

par P.A. Meyer

Le volume X du séminaire contient quatre exposés sur la théorie de Littlewood-Paley-Stein (référence [2] ci-dessous) ; malheureusement, le théorème principal de la partie analytique (th. 3 de l'exposé IV) contient une faute (signalée par M. Silverstein, qui semble avoir été le seul lecteur de ces exposés), et la démonstration du th. 1' p. 177 est également fausse. La publication toute récente d'un article de Varopoulos (J. Funct. Anal. 1980, référence [5]) sur la théorie de Littlewood-Paley m'a fait revenir sur cette question. Il me semble en effet que les démonstrations probabilistes en théorie de Littlewood-Paley utilisent très peu de structure, et qu'en particulier, le théorème de multiplicateurs que l'on obtient finalement devrait s'étendre à tous les groupes commutatifs. J'ai surtout essayé de faire une meilleure pédagogie, en débarrassant les idées essentielles des inégalités parasites, et en renvoyant à [2] pour les détails techniques.

I. LES HYPOTHESES PRINCIPALES

a) La donnée fondamentale du problème est un espace mesuré σ-fini $(E,\underline{\underline{E}},m)$, et un semi-groupe fortement continu (T_t) d'opérateurs bornés sur $L^2(m)$, <u>sousmarkoviens</u>

$$f\in L^2 \ , \ 0\leqq f\leqq 1 \Rightarrow 0\leqq T_t f\leqq 1$$

et <u>symétriques</u>

$$< f,T_t g > = < T_t f, g > \quad \text{si } f,g \in L^2$$

Il est bien connu (et facile à établir) que l'on peut faire opérer les T_t sur tous les L^p, $1\leqq p\leqq\infty$. Le but de la théorie est de prouver que certains opérateurs naturellement associés au semi-groupe opèrent, eux aussi, sur les L^p (mais cette fois avec $1<p<\infty$). L'exemple suivant est dû à Stein, et constitue la principale application de sa monographie [3]. Puisque (T_t) est un semi-groupe borné symétrique, il admet dans L^2 une représentation

$$T_t = \int_{[0,\infty[} e^{-\lambda t} dE_\lambda$$

et l'on peut poser $T_m = \int_{]0,\infty[} m(\lambda)dE_\lambda$, pour $m(\lambda)$ bornée sur $\mathbb{R}_+$. Alors, si m est du type $m(\lambda)=\int_{]0,\infty[} \lambda e^{-\lambda t}M(t)dt$ avec $M(t)$ bornée, T_m est borné sur tous les L^p. Varopoulos démontre, dans l'article cité plus haut , une version un peu moins générale de ce résultat - dans toute sa force, il échappe encore aux méthodes probabilistes directes(1).

1. La démonstration de Stein est à demi probabiliste seulement.

La première étape dans l'application de méthodes probabilistes consiste à supposer que (T_t) s'obtient en faisant agir sur L^2 un semi-groupe de vrais noyaux (P_t) sur $(E,\underline{\underline{E}})$, markovien, admettant une réalisation $(\Omega, \underline{\underline{F}}, (P_x)_{x\in E}, (\underline{\underline{F}}_t), (X_t))$ qui possède la propriété usuelle :

pour toute loi initiale μ, pour toute fonction $f=U_p g$ (U_p est la résolvante ; $p>0$; g est $\underline{\underline{E}}$-mesurable bornée) la fonction $f\circ X_{\bullet}(\omega)$ est continue à droite sur $[0,\infty[$, pour P^μ-presque tout ω .

Il est bien connu que la réalisation (X_t) possède alors la propriété de Markov forte.

Cette régularité est anodine pour deux raisons : l'une, c'est que le semi-groupe (T_t) sera toujours donné de cette manière en pratique. L'autre, c'est que le procédé de compactification de Ray permet toujours de s'y ramener (nous verrons cela en appendice). En fait, la seule hypothèse un peu gênante est le caractère markovien ($P_t 1=1$) du semi-groupe, car le procédé habituel pour rendre markovien un semi-groupe ne respecte pas la symétrie par rapport à m. Nous ferons cette hypothèse dans la suite, bien qu'elle soit peu satisfaisante (Stein la fait aussi, d'ailleurs)(1).

c) Une troisième hypothèse, qui permet de beaucoup approfondir la théorie, est celle de l'existence d'un opérateur carré du champ. Du point de vue probabiliste, elle s'énonce ainsi :

Sur $(\Omega,\underline{\underline{F}},(\underline{\underline{F}}_t))$ muni d'une loi P^μ, pour toute martingale de carré intégrable (M_t), le processus croissant $\langle M,M\rangle_t$ est absolument continu par rapport à t .

On montre que cette hypothèse est équivalente à l'hypothèse analytique suivante : nous dirons que $f\in\mathcal{D}_\infty(A)$ et $Af=a$ si : f est universellement mesurable bornée, a universellement mesurable (définie à un ensemble de potentiel nul près) ; pour tout t

$$P_t f - f = \int_0^t P_s a\,ds \quad , \quad \text{avec} \quad \int_0^t P_s|a|ds < \infty$$

Alors l'hypothèse ci-dessus équivaut à

$\mathcal{D}_\infty$ est stable pour la multiplication

On peut donc définir l'opérateur carré du champ sur $\mathcal{D}_\infty(A)\times\mathcal{D}_\infty(A)$ par

$$2\Gamma(f,g) = A(fg) - fAg - gAf$$

et vérifier que si $f\in\mathcal{D}_\infty(A)$, $Af=a$, $M_t=f(X_t)-f(X_0)-\int_0^t a(X_s)ds$ est une martingale de carré intégrable , avec $\langle M,M\rangle_t = 2\int_0^t \Gamma(f,f)\circ X_s ds$. Pour tout cela, voir [2], p. 142 et p. 162.

1. Cette hypothèse entraîne que la mesure m est invariante par les P_t.

Avant d'aller plus loin, donnons quelques exemples :

1) On fabrique d'excellents semi-groupes symétriques en prenant un noyau markovien symétrique H, et en posant (c est une constante positive)

$$P_t = e^{ct(H-I)} \qquad \text{de générateur } A=c(H-I)$$

(description probabiliste : une particule issue de x attend en x jusqu'à un temps exponentiel S de paramètre c, puis saute en y suivant la loi H(x,dy), attend en y un nouveau temps exponentiel de paramètre c, etc.). Toutes les fonctions bornées appartiennent à $\mathcal{D}_\infty(A)$ et on a

$$\Gamma(f,g)(x) = c\int H(x,dy)(f(y)-f(x))(g(y)-g(x))$$

2) Prenons $E=\mathbb{R}^d$, et pour (P_t) un semi-groupe de convolution symétrique . Alors $P_tf(x)= \int f(x+y)\pi_t(dy)$, où π_t est une mesure symétrique par rapport à l'origine ; la transformée de Fourier $\hat{\pi}_t(u)$ est réelle, et de la forme

$$\hat{\pi}_t(u) = e^{-t\psi(u)du}$$

avec $\psi(u) = q(u)+\int(1-\cos(u.x))\nu(dx)$: q est une forme quadratique positive, ν est une mesure positive[1] sur $\mathbb{R}^d\setminus\{0\}$, intégrant la fonction $|x|^2\wedge 1$. Les caractères $e_u(x)=e^{iu.x}$ appartiennent à $\mathcal{D}_\infty(A)$ (complexe), et l'on a $Ae_u=-\psi(u)e_u$. Posant $q(u)= \sum a^{ij}u_iu_j$, il est connu que

$$\Gamma(f,f)(x) = \sum a^{ij}D_if(x)D_jf(x) + \int_{\mathbb{R}^d} (f(y)-f(x))^2\nu(dx)$$

En particulier, dans le cas des processus stables symétriques d'ordre α $(0<\alpha\leqq 2)$ on a $\psi(u)=|u|^\alpha$; alors $\Gamma(f,f)= \mathrm{grad}^2f$ pour $\alpha=2$, et pour $\alpha<2$

$$\Gamma(f,f)(x) = c\int (f(x+y)-f(x))^2/|y|^{d+\alpha}$$

d) Enfin, dans cette partie de préliminaires, rappelons la définition d'un autre semi-groupe associé à (P_t) : les mesures μ_t sur $\mathbb{R}_+$

$$\mu_t(ds) = \frac{t}{\sqrt{\pi}}e^{-t^2/4s}s^{-3/2}ds \quad (\text{ noté } m_t(s)ds \text{ dans la suite })$$

forment un semi-groupe de convolution ("stable unilatéral d'ordre 1/2")[2] sur $\mathbb{R}_+$, et les noyaux sur E

$$Q_t = \int P_s\mu_t(ds)$$

forment donc un nouveau semi-groupe sur E. Lorsque (P_t) est le semi-groupe brownien, (Q_t) est le semi-groupe de Poisson (ou de Cauchy). Lorsque (P_t) est un semi-groupe de convolution sur $\mathbb{R}^d$ comme ci-dessus, on peut écrire

$$Q_tf(x) = \int f(x+y)\kappa_t(y) \qquad \text{avec } \hat{\kappa}_t(u)=e^{-t\sqrt{\psi(u)}}$$

Nous désignerons par B le générateur de (Q_t).

1. La mesure ν est, elle aussi, symétrique par rapport à l'origine.
2. La formule $\int\mu_t(ds)e^{-ps} = e^{-t\sqrt{p}}$ est utile.

II. LES FONCTIONS DE LITTLEWOOD-PALEY

a) Nous posons $\hat{E}=E\times\mathbb{R}_+$, E étant identifié au "bord" $E\times\{0\}$. Si f est une fonction sur E, nous définissons son prolongement harmonique à $\hat{E}$ par la formule

(1) $\qquad f(x,a) = Q_a(x,f)$ si $a>0$, $f(x,0) = f(x)$

qui a toujours un sens si f est bornée ou positive. Dans toute la suite, f sera supposée bornée.

Il est facile de montrer que la fonction $f(x,t)$ est indéfiniment dérivable en t, pour tout x fixé, sur $]0,+\infty[$; nous désignerons cette dérivée par $D_{\rightarrow}f(x,t)$ (imaginer $E\times\mathbb{R}_+$ comme $E\vdash\!\!-\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_+$ étant horizontal) et plus généralement, la dérivée n-ième par $D^n_{\rightarrow}f(x,t)$. Cette fonction est bornée sur $[a,\infty[$ par une quantité qui ne dépend que des bornes de f et de a (strictement positif). On a $D^n_{\rightarrow}f(x,s+t) = Q_s(x, D^n_{\rightarrow}f(.,t))$. D'autre part, pour tout $t>0$, la fonction $f_t=f(.,t)$ appartient à $\mathcal{D}_\infty(A)$ et à $\mathcal{D}_\infty(B)$, et l'on a

$$Bf_t = D_{\rightarrow}f(.,t) \quad , \quad Af_t = -D^2_{\rightarrow}f(.,t)$$

Si f appartient à $\mathcal{D}_\infty(B)$, et $Bf=h$, on a $D_{\rightarrow}f(.,t)=Q_th$; si f appartient à $\mathcal{D}_\infty(A)$ et $Af=g$ bornée, il existe $h\in\mathcal{D}_\infty(B)$ telle que $Bf=h$, $Bh=-g$[1].

Tous ces faits analytiques s'établissent par le calcul , et sont absolument sans mystère [2]. La symétrie du semi-groupe n'y intervient pas.

b) La fonction f étant toujours bornée, définissons les fonctions de Littlewood-Paley . Il y en a toute une variété.

- Fonctions horizontales, ou radiales : elles font intervenir seulement les dérivées horizontales $D_{\rightarrow}f(x,t)$ de f. La principale est la fonction sur E

$$G^{\rightarrow}_f(x) = \left(\int_0^\infty t(D_{\rightarrow}f(x,t))^2dt\right)^{1/2}$$

mais il y en a deux autres qui apparaissent naturellement, de plus en plus grandes

$$K^{\rightarrow}_f(x) = \left(\int_0^\infty t(Q_t(x, |D_{\rightarrow}f_t|)^2dt\right)^{1/2}$$

$$H^{\rightarrow}_f(x) = \left(\int_0^\infty t\, Q_t(x,(D_{\rightarrow}f_t)^2)dt\right)^{1/2}$$

Il est clair que $H^{\rightarrow}_f \geqq K^{\rightarrow}_f$ (Schwarz), et $K^{\rightarrow}_f \geqq \frac{1}{2}G^{\rightarrow}_f$ (car $Q_t(D_{\rightarrow}f_t)=D_{\rightarrow}f_{2t}$, donc $Q_t(|D_{\rightarrow}f_t|) \geqq |D_{\rightarrow}f_{2t}|$).

Dans le langage de Stein, $G^{\rightarrow}_f$ correspond à $g_1(f)$, $K^{\rightarrow}_f$ à $g^*_\lambda(f)$ pour une valeur convenable de λ, et $H^{\rightarrow}_f$ est liée à $S(f)$, l'intégrale d'aire. Cela,

1. Nous n'énonçons cela que pour justifier l'idée intuitive que $B^2=-A$.
2. Stein démontre aussi que la fonction $P_t(x,f)$ est C^∞ en t (en un sens un peu affaibli), ce qui ne vient pas d'un calcul, mais de la symétrie du semi-groupe par rapport à m.

dans la situation classique où (P_t) est le semi-groupe brownien. D'autre part, Stein considère d'autres fonctions dépendant d'un paramètre entier k, dont le prototype est $\left(\int_0^\infty t^{2k-1}(D_\to^k f(x,t))^2 dt\right)^{1/2}$. Nous ne nous en occuperons pas.

- Fonctions complètes : on suppose que (P_t) admet un opérateur carré du champ, et on remplace partout $D_\to f(x,t)$, dans les expressions précédentes, par $\left((D_\to f_t)^2 + \Gamma(f_t,f_t)\right)^{1/2}$. La notation est la même, en supprimant seulement la flèche horizontale : G_f , K_f, H_f .

- Cas vectoriel. Ici, f désigne une suite finie (f_n) de fonctions bornées. On pose $f(x,t) = (f_n(x,t))_n$, et

$$|f(x,t)| = (\sum f_n(x,t)^2)^{1/2} \quad , \quad G_f^\to = (\sum (G_{f_n}^\to)^2)^{1/2} \text{ , etc.}$$

et bien sûr $\|f\|_{L^p} = \||f|\|_{L^p}$, comme d'habitude.

c) L'énoncé du théorème de Littlewood-Paley-Stein est alors le suivant. On suppose toujours f bornée.

MINORATION. On a pour tout p, $1<p<\infty$, $\|G_f^\to\|_p \leqq c_p\|f\|_p$. Si (P_t) admet un opérateur carré du champ, et si $p\geqq 2$, on a $\|H_f\|_p \leqq c_p\|f\|_p$.

MAJORATION. On a pour tout p, $1<p<\infty$, $\|f\|_p \leqq c_p\|G_f^\to\|_p$ (1).

COMPLEMENT. Le résultat vaut dans le cas vectoriel, avec des constantes indépendantes de la dimension.

Nous verrons en fait que le résultat de minoration peut être amélioré en y remplaçant $G_f^\to$ par $H_f^\to$, $K_f^\to$, etc. dans certains cas (et le résultat de majoration peut toujours être affaibli en y remplaçant $G_f^\to$ par les autres fonctions, qui sont plus grandes). En conclusion, on a une panoplie assez riche de normes équivalentes à la norme L^p.

III. SCHEMA DE LA DEMONSTRATION

a) On commence par établir une égalité dans L^2, qui repose essentiellement sur la symétrie du semi-groupe

(2) $$\|f\|_2 = 2\|G_f^\to\|_2 \quad (1)$$

La démonstration utilise la décomposition spectrale ; elle est très simple, et figure dans [2], p. 169. Elle vaut aussi pour le cas vectoriel.

On remarque alors que les résultats de majoration de $\|G_f^\to\|$ pour tout p, et l'égalité dans L^2, entraînent par dualité des résultats de minoration de $\|G_f^\to\|$ pour tout p. C'est très simple : voir [2], p. 136, l'« étape 4 » .

1. Pour l'égalité dans L^2, et les majorations en général, il y a une petite difficulté supplémentaire, analysée dans [2], p. 169 : il faut se borner aux fonctions $f\in L^2$ ou L^p dont la partie invariante est nulle.

En définitive, il ne reste que les résultats dits plus haut " de majoration" . Il se trouve que ceux-ci s'interprètent très bien au moyen de la théorie des martingales. Nous allons les démontrer complètement.

b) Interprétations probabilistes.

Nous désignons par (Y_t) un mouvement brownien (de générateur D^2, non $\frac{1}{2}D^2$) sur $\mathbb{R}$, et par τ l'instant où il rencontre 0 ; le processus arrêté Y^τ est une martingale. Nous formons le processus produit (X_t,Y_t), qui est un processus de Markov sur $E\times\mathbb{R}$: pour toute mesure initiale de la forme $\lambda\otimes\mu$, en particulier pour les mesures initiales ponctuelles, les deux composantes sont indépendantes. Nous posons enfin $\hat{X}_t=(X_{t\wedge\tau},Y_{t\wedge\tau})$ sur $E\times\mathbb{R}_+$

Les mesures initiales que nous considérerons seront de la forme $m_a=m\otimes\varepsilon_a$.

PREMIER RESULTAT. Pour toute mesure initiale, pour toute fonction f bornée sur E (prolongement harmonique encore noté f), le processus

$$M_t=f(\hat{X}_t) \quad = f(X_{t\wedge\tau},Y_{t\wedge\tau})$$

est une martingale continue à droite. ([2], p. 153 et p. 130)

La démonstration de la continuité à droite est omise dans [2]. Elle résulte de théorèmes généraux sur les processus de Markov si l'on a un bon semi-groupe (P_t). Sans cette hypothèse, on rencontre des problèmes techniques assez délicats (Varopoulos [5]). Voir la fin de cet exposé.

SECOND RESULTAT. Sous la mesure initiale m_a , la loi de X_τ est m . Soit $j(x,t)$ une fonction positive sur $\hat{E}$. On a

$$E^{m_a}[\int_0^\infty j(\hat{X}_s)ds \mid X_\tau] = J(X_\tau) \text{ où } J(x) = \int_0^\infty t\wedge a \; Q_t(x,j_t)dt \tag{3}$$

C'est d'ici que vient le coefficient t dans l'expression des fonctions de Littlewood-Paley. ([2], p. 131)

TROISIEME RESULTAT. La projection de la martingale M sur la martingale Y^τ est égale à $\int_0^{t\wedge\tau} D_{\rightarrow}f(\hat{X}_s)dY_s$. ([2], p. 156)

Il en résulte que $< M^c,M^c> \geqq 2\int_0 (D_{\rightarrow}f(\hat{X}_s))^2ds$.

QUATRIEME RESULTAT. Si (P_t) admet un opérateur carré du champ, on a

$$< M,M >_t = 2\int_0^{t\wedge\tau}g(\hat{X}_s)ds \text{ , avec } g(\bullet,t)=\Gamma(f_t,f_t)+(D_{\rightarrow}f_t)^2$$

([2], p. 158) .

Tous ces résultats, sauf le dernier, ont été démontrés indépendamment par Varopoulos. Ils demandent un peu de technique, mais sont tous d'une nature très compréhensible. Nous passons maintenant à leur application aux inégalités de L-P, en insistant sur le cas vectoriel, qui a été escamoté dans [2].

c) Démonstration des inégalités

Le cas $p \geqq 2$. Rappelons la démonstration de l'inégalité de Burkholder vectorielle : nous avons k martingales (M_t^n) de carré intégrable, nous posons $|M_t| = (\sum M_t^{n2})^{1/2}$, $\langle\!\langle M,M \rangle\!\rangle_t = \sum < M^n,M^n>_t$; nous avons pour tout n $E[< M^n,M^n>_\infty - <M^n,M^n>_T | \underline{\underline{F}}_T] \leqq E[M_\infty^{n2} | \underline{\underline{F}}_T]$; sommant en n, on a la même chose entre $\langle\!\langle M,M \rangle\!\rangle$ et $|M_\infty^2|$. Appliquant la forme prévisible du lemme de Garsia-Neveu, on obtient l'inégalité désirée :

$$E[\langle\!\langle M,M \rangle\!\rangle^r] \leqq c_r E[|M_\infty|^{2r}] \quad \text{pour } r>1 \quad .$$

la constante c_r étant indépendante du nombre k des martingales. Dans cette inégalité, $\langle\!\langle M,M \rangle\!\rangle$ contient $|M_0|^2$, mais nous négligerons ce terme, l'inégalité restant vraie a fortiori.

Supposons donc que les M_t^n soient de la forme $f^n(\hat{X}_t)$, et donnons nous pour chaque t une fonction $j^n(x,t)$ positive, telle que $d< M^n,M^n>_t$ majore $j^n(\hat{X}_t)dt$. Nous posons $\sum j^n = j$. Nous avons pour une mesure initiale - bornée d'abord, puis quelconque

$$E[\ |f(X_T)|^{2r}\ ] \geqq E[\ \langle\!\langle M,M \rangle\!\rangle_T^r\ ] \geqq E[\ (E[\langle\!\langle M,M \rangle\!\rangle_T | X_T])^r\ ]$$

Nous prenons maintenant m_a comme mesure initiale ; la loi de X_T étant m, le côté gauche vaut $|||f|||_{2r}^{2r}$. Du côté droit on minore $E[\langle\!\langle M,M \rangle\!\rangle_T | X_T]$ par $E[\int_0^T j(\hat{X}_s)ds | \underline{\underline{F}}_T]$ et on applique (3) : il reste simplement $\|J\|_r^r$, avec

$$J(x) = \int t\wedge a\ Q_t(x,j_t)dt$$

Comme a est arbitraire, on le fait tendre vers l'infini, et maintenant on distingue deux cas .

Cas général : Le troisième résultat probabiliste nous permet de prendre toujours $j(x,t) = 2(D_{\to}f(x,t))^2$, et on obtient $|||f|||_{2r} \geqq c_r \|H_f^{\to}\|_{2r}$ (avec une constante indépendante du nombre k des fonctions f_n).

S'il y a un opérateur carré du champ, le quatrième résultat probabiliste nous permet de prendre $j(\cdot,t) = 2(\ (D_{\to}f_t)^2 + \Gamma(f_t,f_t))$, et nous obtenons la même inégalité avec H_f au lieu de $H_f^{\to}$.

Dans beaucoup de cas importants (semi-groupes de convolution) on peut affirmer que $Q_t(\ \Gamma(f_t,f_t)) \geqq \Gamma(f_{2t},f_{2t})$, et on a alors la même inégalité avec G_f au lieu de H_f .

Le cas où $1<p\leqq 2$.

Nous considérons la martingale vectorielle $(M_t^1,\dots M_t^k,\varepsilon)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{k+1}$, où ε est un nombre >0 , et nous appliquons la formule d'Ito à la fonction $F(u) = |u|^p$ sur $\mathbb{R}^{k+1}$, qui est convexe, et de classe C^2 sur l'hyperplan $\{u_{k+1}=\varepsilon\}$ où la martingale prend ses valeurs. Les dérivées partielles de F sont

$$D_iF(u) = pu_i|u|^{p-2} \quad , \quad D_{ij}F(u) = p|u|^{p-2}\delta_{ij} + p(p-2)u_iu_j|u|^{p-4}.$$

Remarquons que pour toute forme quadratique positive sur $\mathbb{R}^{k+1}$, $q(u)= \sum a^{ij}u_iu_j$, on a $\sum u_iu_j|u|^{-2}a^{ij} \leqq \sum a^{ii}$ (comparaison entre la norme ordinaire et la norme trace), donc d'après l'hypothèse $p\leqq 2$

$$\sum a^{ij}D_{ij}F(u) \geqq p(p-1)|u|^{p-2}\sum a^{ii}$$

Ecrivons alors la formule d'Ito :

$$F(M_t) = F(M_0) + \sum \int_0^t D_iF(M_{s-})dM_s^i + \frac{1}{2}\sum \int_0^t D_{ij}F(M_s)d\langle M^{ic},M^{jc}\rangle_s$$
$$+ \text{ termes de sauts}$$

Comme F est convexe, les termes de sauts sont positifs. Prenons l'espérance, appliquons la remarque ci-dessus, il vient avec les notations antérieures

$$E[(\varepsilon^2+|M_t|^2)^{p/2}] \geqq \frac{p(p-1)}{2} E[\int_0^t (\varepsilon^2+|M_s|^2)^{p/2-1}d\langle\!\langle M^c,M^c\rangle\!\rangle_s]$$

Nous faisons tendre ε vers 0, t vers l'infini (ce qui nous laisse τ comme borne d'intégration, puisque M est arrêtée à l'instant τ). Puis nous pouvons prendre m_a comme mesure initiale. Le côté gauche devient alors $\|f\|_p^p$, et il faut évaluer le côté droit, en suivant Stein. Soit j une fonction positive telle que $j(\hat{X}_t)dt \leqq d\langle\!\langle M^c,M^c\rangle\!\rangle_t$ (remarquer à la fois la ressemblance et la différence avec la discussion précédente : M est remplacé par M^c). Nous avons du côté droit, après conditionnement par X_τ

$$\int J(x)m(dx) \qquad \text{où } J(x) = c\int_0^\infty t\wedge a \; Q_t(x,|f_t|^{p-2}j_t)dt$$

Nous faisons tendre a vers l'infini et l'oublions, de même que la constante $c = p(p-1)/2$. Posons $h=|f|^{p-2}j$, et posons

$$k(x) = \left(\int_0^\infty tQ_t^2(x,\sqrt{j}_t)dt \right)^{1/2}$$

Alors $\sqrt{j} = h^{1/2}f^{1-p/2}$, par Schwarz

$$Q_t^2(\sqrt{j}_t) \leqq Q_t(h_t)Q_t(f_t^{2-p}) \leqq Q_t(h_t)Q_t(f_t)^{2-p} \quad (\text{ car } 1\geqq 2-p\geqq 0)$$
$$\leqq Q_t(h_t)f^{*(2-p)} \quad \text{où } f^* = \sup_t Q_t|f|$$

Ainsi $\quad k \leqq f^{*(1-p/2)}(\int_0^\infty tQ_t(h_t)dt)^{1/2} = f^{*(1-p/2)}J^{1/2}$

Elevons à la puissance p, appliquons Hölder avec les exposants 2/2-p et 2/p , il vient

$$\int k^p(x)m(dx) \leqq \|f^*\|_p^{p(2-p)/2}\|J\|_1^{p/2}$$

On écrit enfin que $\|J\|_1 \leqq c\|f\|_p^p$ (calcul fait plus haut) et que $\|f^*\|_p \leqq c\|f\|_p$ (lemme maximal fréquemment utilisé par Stein, et qui peut se déduire du lemme ergodique maximal classique).

Application : D'après le troisième ingrédient probabiliste, p.6, nous pouvons toujours prendre $j(x,t) = 2(D_{\rightarrow}f(x,t))^2$, et nous obtenons les inégalités $\|K_f^{\rightarrow}\|_p$, $\|G_f^{\rightarrow}\|_p \leqq c_p\|f\|_p$. Si (P_t) admet un opérateur carré du champ et si toutes les martingales sont continues nous pouvons prendre $j_t = (D_{\to}f_t)^2+\Gamma(f_t,f_t)$, et nous atteignons K_f au lieu de $K_{\to}f$. Enfin, si la fonction j_t ainsi construite satisfait à $Q_t(\sqrt{j_t}) \geqq \sqrt{j_{2t}}$ (cas classique : grad f(x,t) est une fonction harmonique vectorielle, donc $|\text{grad } f(x,2t)| \leqq Q_t(x,|\text{grad } f(.,t)|)$), on peut atteindre la fonction G_f.

REMARQUE. Le fait le plus important de la théorie de L-P est l'équivalence de norme entre une fonction radiale telle que $G_f^{\to}$ et une fonction complète telle que G_f ou K_f. On constate que cette équivalence n'a lieu en général que pour $p\geqq 2$; elle a lieu pour $p>1$ dans le cas où toutes les martingales sont continues.

Les inégalités que nous avons démontrées ici peuvent s'obtenir sans symétrie, au prix d'une petite complication supplémentaire, et on peut aussi démontrer sans symétrie certaines inégalités inverses, mais pour les fonctions complètes seulement. Le rôle de la symétrie est crucial pour établir que la partie radiale à elle seule suffit à majorer le tout.

Enfin, par rapport à [2], nous n'avons rien apporté de nouveau : nous avons plus soigneusement traité le cas vectoriel (p. 173) et laissé de côté une foule de petites inégalités inutiles.

IV . SEMI-GROUPES DE CONVOLUTION

a) Nous désignons par $\underline{\underline{C}}_u$ l'espace des fonctions bornées uniformément continues sur $\mathbb{R}^d$, par $\underline{\underline{C}}_u^2$ l'espace des fonctions qui appartiennent à $\underline{\underline{C}}_u$, ainsi que leurs dérivées des deux premiers ordres. On en fait des espaces de Banach de manière évidente. Rappelons quelques faits (Courrège [1])

- $\underline{\underline{C}}_u$ est stable par convolution avec une mesure bornée, $\underline{\underline{C}}_u^2$ également.
- Tout semi-groupe de convolution (P_t) est fortement continu sur $\underline{\underline{C}}_u$ et $\underline{\underline{C}}_u^2$.
- Le domaine du générateur A de (P_t) sur $\underline{\underline{C}}_u$ contient $\underline{\underline{C}}_u^2$, et A applique continûment $\underline{\underline{C}}_u^2$ dans $\underline{\underline{C}}_u$.

On notera que $\underline{\underline{C}}_u^2$ est une algèbre. Considérons l'opérateur carré du champ à l'origine, $\Gamma_o(f,f) = \frac{1}{2}A(f^2)_o - f(0)Af(0)$; c'est une forme quadratique positive (peut être dégénérée) sur $\underline{\underline{C}}_u^2$, qui est continue pour la norme de $\underline{\underline{C}}_u^2$. Considérant $\underline{\underline{C}}_u^2$ comme espace préhilbertien, et appliquant le procédé d'orthogonalisation usuel, nous pouvons trouver des éléments h_n de $\underline{\underline{C}}_u^2$ tels que(1)

$$\Gamma_o(h_n,h_n)=1 \quad , \quad \text{pour } f\in\underline{\underline{C}}_u^2 \text{ , } \Gamma_o(f,f) = \sum_n \Gamma_o(f,h_n)^2$$

Posons $\lambda_n(f)= \Gamma_o(f,h_n)$: c'est une forme linéaire continue sur $\underline{\underline{C}}_u^2$, donc une distribution tempérée. En fait, si nous utilisons $\underline{\underline{C}}_u^2$, c'est parce que les

1. Nous travaillons dans le domaine réel, mais dans le domaine complexe on aurait $\Gamma_o(f,g) =\frac{1}{2}(A(f\bar{g})-fA\bar{g}-\bar{g}Af)_o = \Sigma_n\lambda_n(f)\lambda_n(\bar{g})$

caractères $e_u(x) = e^{iu.x}$ appartiennent à $\underline{\underline{C}}_u^2$: si l'on désigne par $\hat{\lambda}_n$ la transformée de Fourier de λ_n, on a

$$2\Gamma_o(e_u,e_v) = \psi(u)+\psi(-v)-\psi(u-v) = 2\sum_n \hat{\lambda}_n(u)\overline{\hat{\lambda}_n(v)}$$

et en particulier, si $u=v$, $\Re e(\psi(u)) = \sum_n |\hat{\lambda}_n(u)|^2$, ce qui montre que[1] $|\hat{\lambda}_n(u)| \leq c|u|$ à l'infini. L'exemple le plus connu est celui où $\psi(u)=|u|^2$, les $\hat{\lambda}_n$ étant les iu_n ($n=1,\dots,d$), en nombre fini .

Désignant maintenant par la lettre L_n l'opérateur de convolution par la distribution λ_n, cet opérateur applique $\underline{\underline{C}}_u^2$ dans $\underline{\underline{C}}_u$ (car λ_n est une forme linéaire continue sur $\underline{\underline{C}}_u^2$, et la translation $x\mapsto f(x+.)$, pour $f\in\underline{\underline{C}}_u^2$, est uniformément continue de $\mathbb{R}^d$ dans $\underline{\underline{C}}_u^2$). On a le même résultat pour $\underline{\underline{C}}_0^2$ au lieu de $\underline{\underline{C}}_u^2$. On a alors, en tout point

$$\Gamma(f,f) = \sum_n (L_n f)^2$$

<u>Remarque</u>. Posons $f^n=L_n f$, $f_t=Q_t f$, $f_t^n = Q_t f^n$; nous avons pour $f\in\underline{\underline{C}}_u^2$

$$\Gamma(f_t,f_t) = \sum_n (L_n f_t)^2 = \sum_n (Q_t f_n)^2$$

et de même $D_{\rightarrow} f_t = Q_t Bf$, d'où sans peine $Q_s((\Gamma(f_t,f_t)+(D_{\rightarrow}f_t)^2)^{1/2})$ $\geq (\Gamma(f_{s+t},f_{s+t})+(D_{\rightarrow}f_{s+t})^2)^{1/2}$; nous avons rencontré ce genre d'inégalités dans la comparaison des diverses fonctions de L-P.

Plus généralement, considérons une distribution λ satisfaisant à l'inégalité $\lambda(f)^2 \leq \Gamma_o(f,f)$ pour $f\in\underline{\underline{C}}_c^\infty$; on vérifie sur la forme explicite de Lévy-Khintchine que $\underline{\underline{C}}_c^\infty$ est dense dans $\underline{\underline{C}}_u^2$ pour la norme préhilbertienne associée à Γ ; donc λ se prolonge en une forme linéaire continue sur $\underline{\underline{C}}_u^2$ et, si l'on pose $Lf(x) = \langle \lambda, f(x+.)\rangle$, on définit un opérateur linéaire continu de $\underline{\underline{C}}_u^2$ dans $\underline{\underline{C}}_u$. Soit $\hat{\lambda}(u)=\lambda(e_u)$; on voit comme plus haut que $|\hat{\lambda}(u)|\leq c|u|$. D'autre part, si s est une fonction à décroissance rapide (non nécessairement C^∞) l'intégrale $f(x) = \int e^{ix\cdot u}s(u)\tilde{d}u$ (le ~ indique une normalisation de la mesure de Lebesgue) est une intégrale forte dans $\underline{\underline{C}}_u^2$, et on a donc $Lf(0)=\lambda(f)= \int \hat{\lambda}(u)s(u)\tilde{d}u$, puis on voit enfin que sur les fonctions f, transformées de Fourier de fonctions à décroissance rapide (fonctions qui appartiennent à $\underline{\underline{C}}_0^2$), L est donné par le multiplicateur de Fourier $\hat{\lambda}$. Nous désignerons par $\underline{\underline{H}}$ l'espace des fonctions sur $\mathbb{R}^d$, transformées de Fourier de fonctions à décroissance rapide : cet espace contient $\underline{\underline{S}}$, et contrairement à $\underline{\underline{S}}$ il a l'avantage d'être stable par Q_t, A, B, L...
Toute fonction f de $\underline{\underline{H}}$ est bornée et appartient à L^2 , donc aussi à L^p pour $p\geq 2$; il résulte sans peine du théorème ergodique usuel que $Q_t f$ a une limite

1. Les quelques considérations précédentes n'exigeaient pas la symétrie. Nous la remettons en vigueur maintenant.

p.p. lorsque $t\to\infty$, qui est aussi limite au sens de L^2 et de L^p, et qui est invariante par P_t et Q_t ($P_t h=h$ p.p. pour tout t) ; nous désignons par $\underline{\underline{H}}_0$ l'ensemble des $f\in\underline{\underline{H}}$ pour lesquels cette limite est <u>nulle</u> p.p..

b) Voici les résultats principaux de ce paragraphe. Nous considérons une distribution λ comme ci-dessus, l'opérateur L correspondant.

Par rapport aux résultats de [2], on a corrigé l'erreur consistant à affirmer l'inégalité (5) pour $p<2$ (erreur provenant du théorème 2', p. 179 : le " de même" ne repose sur rien), et l'inégalité (6) s'en trouve affaiblie également. Néanmoins, le n° 6.12 de Stein [4] p. 162 suggère que cette dernière inégalité est vraie pour tout $p>1$.

THEOREME. i) <u>Soit</u> $f\in\underline{\underline{H}}$. <u>On a alors, pour</u> $1<p<\infty$

(4) $$\|Lf\|_p \leqq c_p\|Bf\|_p$$

<u>et, pour</u> $2\leqq p<\infty$

(5) $$\|\sqrt{\Gamma(f,f)}\|_p \leqq c_p\|Bf\|_p$$

ii) <u>L'inégalité inverse a lieu pour</u> $1<p\leqq 2$

(6) $$\|Bf\|_p \leqq c'_p\|\sqrt{\Gamma(f,f)}\|_p$$

iii) <u>Si</u> (P_t) <u>est une diffusion</u> (toutes les martingales sont continues) <u>ces inégalités s'étendent à l'intervalle</u> $]1,\infty[$ <u>entier</u> .
iv) <u>La fonction bornée</u> $\hat{\lambda}(u)/\sqrt{\psi(u)}$ <u>est un multiplicateur de</u> $\mathcal{F}L^p$ <u>pour</u> $1<p<\infty$.

DEMONSTRATION. Les démonstrations de [2] sont à peu près satisfaisantes. On va cependant les reprendre, pour clarifier quelques détails .

1) Soit $f\in\underline{\underline{H}}_0$; posons $Lf=r$, $Bf=u$. Nous savons que $Q_t f\to 0$ dans L^2 lorsque $t\to\infty$. D'après Plancherel , $\hat{f}e^{-t\sqrt{\psi}}$ tend vers 0 dans L^2. D'autre part, $Q_t r$ converge dans L^2 vers la "partie invariante" h de r, donc d'après Plancherel, $\hat{\lambda}\hat{f}e^{-t\sqrt{\psi}}$ converge dans L^2 vers $\hat{h}$. Utilisant une suite extraite qui converge vers 0 p.p. on voit que $\hat{h}=0$ p.p. - donc $r\in\underline{\underline{H}}_0$, et de même $u\in\underline{\underline{H}}_0$.

Nous avons, en introduisant les prolongements harmoniques

$$D_{\rightarrow}r_t = BQ_tLf = LQ_tBf = Lu_t \quad \text{(immédiat par Fourier)}$$

donc, d'après l'inégalité imposée à L

$$(D_{\rightarrow}r_t)^2 \leqq \Gamma(u_t,u_t)$$

et toute fonction de Littlewood-Paley <u>radiale</u> de r est majorée par la fonction de Littlewood-Paley correspondante <u>complète</u> de u . Utilisant les fonctions H , nous obtenons (4) pour $p\geqq 2$

$$\|r\|_p\leqq c_p\|H^{\rightarrow}_r\|_p \leqq c_p\|H_u\|_p\leqq c'_p\|u\|_p \qquad (\text{ pour } f\in\underline{\underline{H}}_0 \text{ })$$

Nous ne savons pas majorer les fonctions de L-P complètes lorsque $p<2$, sauf dans le cas où toutes les martingales sont continues : dans ce cas, en utilisant la fonction K au lieu de H, nous étendons directement (4) à l'intervalle $]1,2[$. Nous reviendrons sur (4) dans un instant.

Passons à (5) : les distributions L_n introduites au début satisfont à $\sum (L_n f)^2 = \Gamma(f,f)$. Posant maintenant $r=(r^n)_{1\leq n\leq k} = (L_n f)_{1\leq n\leq k}$ (fonction à valeurs vectorielles), le même raisonnement nous donne, dans les mêmes intervalles, que $\|r\|_p \leq \|u\|_p$; d'où (5), lorsque $k\to\infty$.

Etendons maintenant ces résultats à $\underline{\underline{H}}$: soit $f\in\underline{\underline{H}}$, et soit h sa 'partie invariante' , limite de $Q_t f$ dans L^2 lorsque $t\to\infty$. On a d'après Plancherel $\hat{h} = \lim_t \hat{f}e^{-t\sqrt{\psi}}$ dans L^2, donc $|\hat{h}|\leq|\hat{f}|$, $\hat{h}$ est à décroissance rapide, et donc $h\in\underline{\underline{H}}$ ainsi que f-h. D'autre part, $\hat{h}=0$ p.p. dans l'ensemble où $\psi\neq 0$, donc $\sqrt{\psi}\,\hat{h}=0$ et $Bh=0$ (évident aussi d'après l'invariance), mais aussi $\hat{\lambda}\hat{h}=0$ et $Lh=0$. L'inégalité (4) ou (5) écrite pour f-h équivaut donc à la même inégalité pour f.

Prouvons maintenant (iv). Soit $f\in\underline{\underline{C}}_c^\infty$, et soit $h=V_\mu f\in\underline{\underline{H}}$, où V_μ est la résolvante de (Q_t) ; nous avons $Bh = \mu V_\mu f - f$, donc pour $p\geq 2$

$$\|Lh\|_p \leq c_p\|\mu V_\mu f - f\|_p \leq 2c_p\|f\|_p$$

car μV_μ est une contraction dans tout L^p. Cela signifie que $\hat{\lambda}/\mu+\sqrt{\psi}$ est un multiplicateur de $\mathscr{F}L^p$, avec une norme uniformément bornée. Le résultat (iv) s'obtient alors en faisant tendre μ vers 0. Pour atteindre l'intervalle $]1,2[$, on remarque que la distribution λ' symétrique de λ par rapport à l'origine, et dont la transformée de Fourier est $\bar{\hat{\lambda}}$, possède les mêmes propriétés que λ, du fait de la symétrie des noyaux P_t par rapport à l'origine. Donc $\hat{\lambda}/\sqrt{\psi}$ est un multiplicateur de $\mathscr{F}L^q$, où $q>2$ est l'exposant conjugué de p . Un argument classique de dualité entraîne alors que $\hat{\lambda}/\sqrt{\psi}$ est un multiplicateur de $\mathscr{F}L^p$. L'inégalité (4) pour $p<2$ en résulte.

Reste enfin (6) : soit $f\in\underline{\underline{H}}$, et soit $j\in\underline{\underline{C}}_c^\infty$; posons $h=-V_\mu j$, $g=Bh=j-\mu V_\mu j$; comme Bf appartient à $L^2\cap\underline{\underline{H}}$, et $\mu V_\mu j$ tend lorsque $\mu\to 0$ vers la partie invariante i de j, on a

$$\lim_{\mu\to 0} < Bf,g > = < Bf,j > - < Bf,i > = < Bf,j >$$

car $i\in\underline{\underline{H}}$ (voir ci-dessus) et $<Bf,i>=<f,Bi>=0$. Il nous suffit donc de montrer que $|<Bf,g>| \leq c_p\|\sqrt{\Gamma(f,f)}\|_p\,\|g\|_q$ et de passer à la limite, car $\|g\|_q \leq 2\|j\|_q$. Pour cela on écrit, comme dans [2], p. 180

$< Bf,g > = < Bf,Bh > = \int\Gamma(f,h)m$ (toujours vrai pour deux fonctions de L^2 : [2], p.161, (46)).

on majore $|\Gamma(f,h)|$ par $\Gamma(f,f)^{1/2}\Gamma(h,h)^{1/2}$, et on applique Hölder . Finalement, on applique (5) pour avoir $\|\Gamma(h,h)^{1/2}\|_q \leq c_q\|Bh\|_q$.

Puisque l'inégalité (5) est valable seulement pour $p\geq 2$, les conséquences que l'on en déduit dans [2] (théorème de commutateurs, p.180, application aux contractions p. 182) ne sont établies que pour $p\geq 2$.

V. UN THEOREME DE STEIN

Nous allons maintenant établir, en suivant littéralement Varopoulos, le théorème de multiplicateurs très intéressant que nous avons cité au début, et qui ne figurait pas dans [2]. Nous revenons à la décomposition spectrale

$$P_t = \int_{[0,\infty[} e^{-\lambda t} dE_\lambda$$

et nous considérons l'opérateur suivant, borné sur $L^2(m)$

$$T = \int_{[0,\infty[} h(\lambda)dE_\lambda \text{ , où } h(\lambda) \text{ est une fonction bornée sur } \mathbb{R}_+$$

<u>Supposons que</u> $h(\lambda)$ <u>soit de la forme</u> $\lambda\int_0^\infty e^{-2t\sqrt{\lambda}}t\,r(t)dt$, <u>où</u> $r(t)$ <u>est une fonction bornée</u>. Alors nous allons montrer que T <u>est un opérateur borné sur les</u> L^p, $1<p<\infty$.

Avant de prouver cela, faisons quelques remarques

1) le cas le plus important est celui où $r(t)=t^{2i\alpha}$, où α est réel. Un calcul très simple montre qu'alors $h(\lambda)=c\lambda^{i\alpha}$, et le théorème de Stein nous dit que l'opérateur $(-A)^{i\alpha}$ est borné dans les L^p.
2) Le coefficient 2 dans l'expression de $h(\lambda)$ n'est là que pour la commodité. En revanche, la présence du $\sqrt{\lambda}$ dans l'exponentielle est essentielle pour la démonstration. Cependant, Stein peut démontrer le même théorème avec $e^{-t\lambda}$ au lieu de $te^{-t\sqrt{\lambda}}$, résultat qui échappe aux méthodes de Varopoulos et de cet exposé.
3) Nous pouvons nous borner à raisonner dans L^p, $p\geqq 2$: le cas $p\leqq 2$ s'en déduit par un argument familier de dualité. Remarquer aussi que $h(0)=0$: nous pouvons donc écrire tout simplement $\int_0^\infty$ au lieu de $\int_{[0,\infty[}$ dans l'expression de T.

Soit f une fonction bornée appartenant à $L^2(m)$. Nous définissons un opérateur J_a sur $L^2(m)$ par la relation suivante, où l'espérance conditionnelle est prise pour la loi P^{m_a}

$$J_a f(X_\tau) = E^{m_a}[\int_0^\tau r(s)D_\rightarrow f(\hat{X}_s)dY_s \mid X_\tau]$$

Autrement dit : nous considérons la martingale $M_t^f=f(\hat{X}_t)$; sa projection N_t sur $(Y_{t\wedge\tau})$, qui vaut $\int_0^{t\wedge\tau} D_\rightarrow f(\hat{X}_s)dY_s$; l'intégrale stochastique $\int_0^t r(s)dN_s$; enfin, nous conditionnons par X_τ . Toutes ces opérations correspondent à des opérateurs bornés entre espaces L^p, et nous avons donc uniformément en a

(7) $$|<J_a f,g>| \leqq c_p\|f\|_p\|g\|_q$$

Nous allons calculer $<J_a f,g>$ pour $g\in L^\infty\cap L^2$, et montrer que cela vaut

(8) $$\int dm \int_0^\infty t\wedge a\ r(t)\ D_\rightarrow f_t\ D_\rightarrow g_t dt = \int_0^\infty t\wedge a\ r(t)(\int \lambda e^{-2t\sqrt{\lambda}}\ d<E_\lambda f,g>)dt$$

car $D_\rightarrow f_t = \int -\sqrt{\lambda}\ e^{-t\sqrt{\lambda}}\ dE_\lambda f$. D'autre part

$$< Tf,g > = \int_0^\infty h(\lambda)d\langle E_\lambda f,g\rangle = \iint \lambda e^{-2t\sqrt{\lambda}}tr(t)dtd\langle E_\lambda f,g\rangle$$

qui est la limite de l'expression précédente lorsque $a\to\infty$. Reste donc à prouver (8). Or on a

$$\begin{aligned}
\langle J_a f,g\rangle &= E^{m_a}[\ g\circ X_\tau\ E[\int_0^\tau r(s)D_\to f(\hat{X}_s)dY_s|X_\tau]\ ] \\
&= E^{m_a}[\ M^g_\tau\ (r.N)_\tau] \\
&= E^{m_a}[\ \langle M^g,(r.N)\rangle_\tau]\quad (\text{ remarquer que } N_0=0\ ) \\
&= E^{m_a}[\ \int_0^\tau D_\to g(\hat{X}_s)\ r(s)D_\to f(\hat{X}_s)ds\ ] \\
&= E^{m_a}[\ E[\ldots|X_\tau]] \\
&= \int dm\int s\wedge a\ r(s)D_\to g_s\ D_\to f(s)ds\ ]\quad (\text{ cf. } (3))
\end{aligned}$$

et cela établit (8).

Pour finir, on voit que l'opérateur T est la limite de J_a lorsque $a\to\infty$, et l'on s'explique la forme un peu bizarre de T. Quel opérateur obtiendrait on si dans l'expression de J_a on remplaçait $r(s)$ par $r(Y_s)$?

Dans le même ordre d'idées, consulter la très jolie note de Gundy et Varopoulos sur les transformations de Riesz : les transformations de Riesz et les intégrales stochastiques, CRAS Paris t. 289, Juillet 79, p. 13-16.

VI. RETOUR SUR LE CAS GENERAL

Dans tous les calculs qui précèdent, nous avons utilisé en toute liberté les outils probabilistes, en supposant que nous sommes dans une "bonne" situation : est ce légitime ? dans quelle mesure est ce une restriction par rapport à la situation analytique générale ? Varopoulos a été le premier à étudier ce genre de problèmes. Nous allons les aborder ici, par une méthode différente de la sienne.

Tout d'abord, il est clair que l'on ne restreint pas la généralité en supposant que l'espace $L^2(E,\underline{\underline{E}},m)$ est <u>séparable</u> . On peut alors trouver une tribu séparable $\underline{\underline{E}}_0$ dont la complétion par rapport à m soit $\underline{\underline{E}}$. On peut aussi trouver une fonction φ , m-p.p. strictement positive, telle que la mesure $\hat{m}=\varphi.m$ soit bornée, et l'on peut supposer φ $\underline{\underline{E}}_0$-mesurable. Enfin, on peut supposer que $\underline{\underline{E}}_0$ sépare les points de E.

D'après le théorème I-11 de Dellacherie-Meyer , Probabilités et potentiels **A** , on peut alors supposer que E est une partie (non nécessairement borélienne) de l'intervalle [0,1], $\underline{\underline{E}}_0$ étant la trace sur E de la tribu borélienne de [0,1]. Soit m' l'image de $\hat{m}$ par l'injection de E dans [0,1] : c'est une excellente mesure sur [0,1], et l'on peut trouver un borélien E' de [0,1], contenant E et tel que $m'(E')=\hat{m}(E)$: les espaces mesurés $(E,\underline{\underline{E}}_0,\hat{m})$ et $(E',\mathcal{B}(E'),m')$ sont isomorphes, et l'espace mesurable $(E',\mathcal{B}(E'))$ est un excellent espace lusinien. On ne perd donc aucune généralité en supposant

- après un changement de notation - que $(E,\underline{\underline{E}})$ est un espace mesurable lusinien.

Nous introduisons maintenant, pour $p>0$, les opérateurs de la résolvante

$$\widetilde{U}_p = \int e^{-pt} T_t dt \quad (\text{ le } \sim \text{ sera expliqué plus loin })$$

D'après la théorie de la régularisation des " pseudo-noyaux " (voir par exemple Dellacherie-Meyer, th. V-66, ou l'exposé de Getoor dans le séminaire IX) il existe de vrais noyaux U_p sur $(E,\underline{\underline{E}})$, tels que pU_p soit sousmarkovien, et tels que U_p représente $\widetilde{U}_p$: pour toute fonction $f \in \underline{\underline{E}}$, $f \geq 0$, $U_p f$ appartient à la classe $\widetilde{U}_p f$ pour l'égalité m-p.p..

Soulignons que tout ce qui vient d'être fait est absolument dépourvu de difficultés, et tout à fait classique. Notre étape suivante va consister à jeter hors de E un ensemble borélien m-négligeable N, de sorte que sur N^c les U_p forment une vraie résolvante, avec $pU_p 1=1$.

Nous établissons d'abord un petit lemme :

LEMME. Soit A un ensemble m-négligeable. Il existe un ensemble (borélien) $\bar{A}$ m-négligeable contenant A , possédant la propriété suivante : pour tout $x \notin \bar{A}$ et tout p rationnel on a $U_p(x,\bar{A})=0$ [autrement dit, les noyaux U_p pour $p \in \mathbf{Q}$ peuvent être restreints au complémentaire de $\bar{A}$]

Démonstration. Pour tout $p \in \mathbf{Q}$ nous choisissons une constante $c_p>0$, de telle sorte que $\sum_p c_p=1$, et nous posons $V = \sum pc_p U_p$; c'est un noyau sousmarkovien. Chacun des noyaux pU_p préservant la mesure m, il en est de même de V ; donc si A est un ensemble négligeable, $V(I_A)$ est une fonction m-négligeable. On pose alors

$$A_0=A \ , \ A_1=A_0 \cup \{x : V(x,A_0)\neq 0\}, \ A_2=A_1 \cup \{x : V(x,A_1)\neq 0\} \ \ldots$$

ces ensembles sont m-négligeables et grossissent, et il suffit de prendre $\bar{A} = \cup_n A_n$.

Considérons maintenant une algèbre de Boole dénombrable $\mathcal{B}$ engendrant la tribu borélienne $\underline{\underline{E}}$, et désignons par $\underline{\underline{I}}$ l'ensemble des indicatrices I_B , $B \in \mathcal{B}$. Soit A l'ensemble m-négligeable, réunion des ensembles suivants, en infinité dénombrable :

$$A_p = \{ x : pU_p(x,1)\neq 1 \} \quad (\text{ p rationnel })$$

$$A_{p,q,f} = \{ x : (p-q)U_p(x,U_q f)\neq U_q(x,f)-U_p(x,f)\} \quad (\ f \in \underline{\underline{I}},\ p.q \text{ rationnels })$$

et jetons hors de E l'ensemble négligeable $\bar{A}$ fourni par le lemme : sur l'ensemble restant nous avons une vraie résolvante pour p rationnel, et le prolongement aux valeurs réelles de p est immédiat. Nous pouvons aussi jeter l'ensemble où $\varphi=0$, si nous le désirons.

Nous conservons la notation E pour l'espace d'états ainsi diminué .

Et maintenant, nous sommes dans les conditions d'application de la méthode de compactification de Ray : E se plonge dans un espace compact métrisable $\overline{E}$, sur lequel on sait construire d'excellents processus (X_t) (en général, m n'est pas une mesure de Radon sur $\overline{E}$: cela ne semble pas être gênant). Les "points de branchement" ne nous gêneront pas, car ils forment un ensemble de potentiel nul pour la résolvante, donc aussi un ensemble m-négligeable, et nous pouvons utiliser sans inquiétude tous les outils probabilistes.

REFERENCES.

[1]. COURREGE (Ph.). Générateur infinitésimal d'un semi-groupe de convolution sur $\mathbb{R}^n$ et formule de Lévy-Khintchine. Bull. Sci. Math. 88, 1964, p. 3-30.

[2]. MEYER (P.A.). Démonstration probabiliste de certaines inégalités de Littlewood-Paley. Sém. Prob. X, 1976, p. 125-183 (Springer L.N. 511)

[3]. STEIN (E.). Topics in harmonic analysis related to the Littlewood-Paley theory. Ann. Math. Studies 63, Princeton 1970.

[4]. STEIN (E.). Singular integrals and differentiability properties of functions. Princeton University Press, 1970.

[5]. VAROPOULOS (N.T.). Aspects of probabilistic Littlewood-Paley theory. J. Funct. Analysis, 38, 1980, p. 25-60.

IRMA , Université Louis Pasteur
7 rue René Descartes
67084 Strasbourg-Cedex