JEAN JACOD

Convergence en loi de semimartingales et variation quadratique

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 15 (1981), p. 547-560
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1981__15__547_0>

CONVERGENCE EN LOI DE SEMIMARTINGALES ET VARIATION QUADRATIQUE

Jean JACOD

1 - ENONCE DES RESULTATS

Soit $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ un espace probabilisé muni d'un processus càdlàg à valeurs réelles X. Rappelons d'abord (voir par exemple Meyer [5]) ce qu'on entend par variation quadratique de X. Pour chaque $t \geq 0$ et chaque subdivision $\tau = \{0 = t_0 < \dots < t_m = t\}$ de $[0,t]$ on pose

(1.1)
$$S_\tau(X) = X_0^2 + \sum_{i=1}^{m} (X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^2 .$$

On dit que X admet une variation quadratique $[X,X]$ s'il existe un processus croissant continu à droite $[X,X]$ (nécessairement unique) tel que:

(1.2) $\left\{\begin{array}{l} \text{pour tout } t>0, \quad S_\tau(X) \xrightarrow{P} [X,X]_t \text{ lorsque le pas } |\tau| \text{ de la} \\ \text{subdivision } \tau \text{ de } [0,t] \text{ tend vers } 0. \end{array}\right.$

Par ailleurs, pour chaque $n \in \mathbb{N}$ on considère un espace probabilisé filtré $(\Omega^n,\underline{\underline{F}}^n,\underline{F}^n,P^n)$ muni d'une semimartingale réelle X^n. On sait bien-sûr que la variation quadratique $[X^n,X^n]$ de X^n existe. On note $\mathcal{L}(X_t^n)$, $\mathcal{L}(X^n)$, ... la loi de X_t^n, de X^n, ..., sous P^n ; on note de même $\mathcal{L}(X_t)$, $\mathcal{L}(X)$, ... la loi de X_t, de X, ..., sous P: par exemple, $\mathcal{L}(X^n)$ est une probabilité sur l'espace de Skorokhod $\mathbb{D}^1 = D([0,\infty[;\mathbb{R})$, qu'on suppose muni de la topologie de Skorokhod. La notation $\mathcal{L}(X^n) \longrightarrow \mathcal{L}(X)$ désigne toujours la convergence étroite.

Supposons que $\mathcal{L}(X^n) \longrightarrow \mathcal{L}(X)$. D'après (1.1) on a aussi $\mathcal{L}(S_\tau(X^n)) \longrightarrow \mathcal{L}(S_\tau(X))$ dès que les points de la subdivision τ ne sont pas des temps de discontinuité fixe de X. On pourrait alors penser que $\mathcal{L}([X^n,X^n]) \longrightarrow \mathcal{L}([X,X])$, si du moins $[X,X]$ existe. Il n'en est rien en général, comme le montre l'exemple simple suivant:

(1.3) Exemple: Soit
$$X_t^n = \sum_{k=1}^{[n^2t]} (-1)^k \frac{1}{n} .$$

On a $|X^n| \leq 1/n$, donc $\mathcal{L}(X^n) \longrightarrow \mathcal{L}(X)$ avec $X = 0$ (tous ces "processus" sont des fonctions). On a aussi

$$[X^n,X^n]_t = \sum_{k=1}^{[n^2t]} \frac{1}{n^2} = \frac{[n^2t]}{n^2} ,$$

qui converge vers t, ce qui contredit $\mathcal{L}([X^n,X^n]) \longrightarrow \mathcal{L}([X,X])$. ∎

Notre objectif, dans cet article, est d'introduire des conditions supplémentaires qui, jointes au fait que $\mathcal{L}(X^n) \longrightarrow \mathcal{L}(X)$, entrainent que $\mathcal{L}([X^n,X^n]) \longrightarrow \mathcal{L}([X,X])$. Commençons par énoncer deux résultats simples.

(1.4) THEOREME: Supposons que pour chaque $n \in \mathbb{N}$, X^n soit une martingale locale, et que pour chaque $t>0$ on ait: $\sup_n E^n(\sup_{s\leq t} |\Delta X^n_s|) < \infty$ (par exemple si $|\Delta X^n_t(\omega)| \leq c$ identiquement). Si $\mathcal{L}(X^n) \longrightarrow \mathcal{L}(X)$, la variation quadratique $[X,X]$ existe et on a $\mathcal{L}([X^n,X^n]) \longrightarrow \mathcal{L}([X,X])$.

Rebolledo [6] d'une part, Liptčer et Shiryayev [4] d'autre part, ont démontré (par deux méthodes assez différentes) le cas particulier suivant de ce théorème: X est une martingale continue gaussienne, donc $[X,X]$ existe et est déterministe (avec en plus $|\Delta X^n_t(\omega)| \leq c$ identiquement dans [4], avec les $\sup_{s\leq t} |\Delta X^n_s|$ uniformément (en n) intégrables dans [6]). Ces auteurs généralisent eux-mêmes des résultats de Rootzen [7] et de Gänssler et Häusler [2]. La méthode utilisée dans cet article est inspirée de celle de Liptčer et Shiryayev.

Il est naturel de se demander si ce résultat reste valide sans condition de moment sur les sauts des X^n ; nous n'avons pas su répondre !

Revenons au cas des semimartingales. Pour chaque $a>0$ il existe un processus prévisible à variation finie unique $B^n(a)$, tel que

$$(1.5) \qquad X^n - \sum\nolimits_{0\leq s\leq t} \Delta X^n_s \, I_{\{|\Delta X^n_s| > a\}} - B^n(a)$$

(où $\Delta X^n_0 = X^n_0$) soit une martingale locale nulle en 0 : ainsi, $B^n(1)$ est la première caractéristique locale de X^n . On note $V(B^n(a))$ le processus variation: $V(B^n(a))_t = \int_0^t |dB^n(a)_s|$.

(1.6) THEOREME: Considérons les conditions:

(i) $\mathcal{L}(X^n) \longrightarrow \mathcal{L}(X)$;

(ii-a) on a $\lim_{b\uparrow\infty} \sup_n P^n[V(B^n(a))_t \geq b] = 0$ pour tout $t>0$.

Si on a (i), les conditions (ii-a) pour $a>0$ sont toutes équivalentes entre elles; (i) et (ii-1) entrainent que $[X,X]$ existe et que $\mathcal{L}([X^n,X^n]) \longrightarrow \mathcal{L}([X,X])$.

Noter que dans l'exemple (1.3) on a $B^n(1) = X^n$, donc $V(B^n(1))_t = [n^2t]/n$, et on n'a pas (ii-1).

(1.7) REMARQUE: Soit $\underline{\tilde{F}}^n$ la filtration engendrée par X^n . Bien entendu la variation quadratique $[X^n,X^n]$ ne dépend pas de la filtration. Si les hypothèses de (1.4) (resp. (1.6)) sont satisfaites relativement à des filtrations $\underline{F}^n$, elles le sont a-fortiori relativement aux $\underline{\tilde{F}}^n$: c'est facile à vérifier dans le cas de (1.4). Pour (1.6), on remarque d'abord que

X^n est une $\underline{\tilde{F}}^n$-semimartingale (théorème de Stricker), ensuite que la première caractéristique locale $\tilde{B}^n(1)$ de X^n relativement à $\underline{\tilde{F}}^n$ est la $\underline{\tilde{F}}^n$-projection prévisible duale de $B^n(1)$; il est alors facile de voir que si les $B^n(1)$ vérifient (1.6,ii-1), il en est de même des $\tilde{B}^n(1)$. ∎

Voici maintenant un théorème général.

(1.8) THEOREME: <u>Supposons que</u> $\mathcal{L}(X^n) \longrightarrow \mathcal{L}(X)$. <u>Supposons également que pour chaque</u> $n \in \mathbb{N}$ <u>et chaque</u> $a > 0$ <u>il existe une décomposition</u>

$$X^n = \check{X}^n(a) + F^n(a) + N^n(a) \tag{1.9}$$

<u>telle que</u>:

(i) <u>pour chaque</u> $a > 0$, $N^n(a)$ <u>est une martingale locale nulle en</u> 0 <u>et on a</u> $\sup_n E^n(\sup_{s \leq t} |\Delta N^n(a)_s|) < \infty$ <u>pour tout</u> $t > 0$;

(ii) <u>pour chaque</u> $a > 0$, $F^n(a)$ <u>est un processus adapté à variation finie et on a</u> $\lim_{b \uparrow \infty} \sup_n P^n[V(F^n(a))_t \geq b] = 0$ <u>pour tout</u> $t > 0$;

(iii) <u>pour tout</u> $t > 0$ <u>on a:</u> $\lim_{a \uparrow \infty} \sup_n P^n(\sup_{s \leq t} |\check{X}^n(a)_s| > 0) = 0$.

<u>Sous ces hypothèses,</u> $[X,X]$ <u>existe et on a</u> $\mathcal{L}([X^n,X^n]) \longrightarrow \mathcal{L}([X,X])$, <u>et même</u> $\mathcal{L}(X^n,[X^n,X^n]) \longrightarrow \mathcal{L}(X,[X,X])$ (convergence étroite sur $\mathbb{D}^2 = D([0,\infty[;\mathbb{R}^2))$).

Remarquer que (1.4) est un cas particulier de (1.8): prendre $\check{X}^n(a) = 0$, $N^n(a) = X^n - X^n_0$, $F^n(a) = X^n_0$.

On verra plus loin (corollaire (2.12)) que (1.6) est aussi un cas particulier de (1.8).

(1.10) REMARQUE: Tous les résultats présentés ici sont valides si X^n et X sont d-dimensionnels; $[X^n,X^n]$ et $[X,X]$ sont alors à valeurs matricielles, et $V(F^n(a))$ est la somme des variations des d composantes de $F^n(a)$. ∎

2 - COMPLEMENTS SUR LA RELATION DE DOMINATION

La relation de domination entre processus, introduite par Lenglart, va jouer un rôle essentiel. Rappelons que si Y et Z sont deux processus càdlàg adaptés sur l'espace probabilisé filtré $(\Omega,\underline{\underline{F}},\underline{F},P)$ et si Z est positif croissant, on écrit $Y \prec Z$ si $E(|Y_T|) \leq E(Z_T)$ pour tout temps d'arrêt fini. Comme d'habitude, pour tout processus Y on pose $Y^*_t = \sup_{s \leq t} |Y_s|$. Rappelons le lemme suivant:

(2.1) LEMME [3]: <u>Si</u> $Y \prec Z$, <u>pour tout temps d'arrêt</u> T <u>et tout</u> $\alpha > 0$ <u>on a</u>:

$$P(Y^*_T \geq \alpha) \leq \frac{1}{\alpha} E(Z_T) .$$

Voici maintenant une version ad-hoc (et facile) du théorème de Lenglart.

(2.2) LEMME: Supposons que $Y \prec Z$ et que $Z=(H^2 \bullet A)^{1/2}$, où A est un processus croissant adapté et H est un processus adapté continu à gauche (rappelons la notation: $H^2 \bullet A_t = \int_0^t (H_s)^2 \, dA_s$). Pour tout temps d'arrêt T et tous $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$, on a:

$$P(Y_T^* \geq \alpha) \leq \frac{\gamma}{\alpha}[\beta + E(\sqrt{\Delta A_T^*})] + P(H_T^* > \gamma) + P(A_T > \beta^2) .$$

En particulier, si on a simplement $Y \prec Z$, le résultat précédent appliqué avec $H=1$, $A=Z^2$, $\gamma=1$ conduit à (cf. Rebolledo [6]):

$$P(Y_T^* \geq \alpha) \leq \frac{1}{\alpha}[\beta + E(\Delta Z_T^*)] + P(Z_T > \beta) . \tag{2.3}$$

Démonstration. On a

$$\{Y_T^* \geq \alpha\} \subset \{H_T^* > \gamma\} \cup \{A_T > \beta^2\} \cup \{H_T^* \leq \gamma, A_T \leq \beta^2, Y_T^* \geq \alpha\}. \tag{2.4}$$

Soit $S = \inf(t : H_t^* > \gamma$ ou $A_t > \beta^2)$. Si $S < T$ on a $H_T^* > \gamma$ ou $A_T > \beta^2$, donc $\{H_T^* \leq \gamma, A_T \leq \beta^2, Y_T^* \geq \alpha\} \subset \{Y_{T \wedge S}^* \geq \alpha\}$. En utilisant (2.1) et (2.4), il vient alors

$$P(Y_T^* \geq \alpha) \leq \frac{1}{\alpha} E[(H^2 \bullet A)_{T\wedge S}^{1/2}] + P(H_T^* > \gamma) + P(A_T > \beta^2) .$$

Comme H est continu à gauche, on a $|H| \leq \gamma$ sur $]\!]0,S]\!]$, donc $H^2 \bullet A_{T\wedge S} \leq \gamma^2 A_{T\wedge S}$. On a aussi $A_{(T\wedge S)-} \leq \beta^2$, donc $A_{T\wedge S} \leq \beta^2 + \Delta A_T^*$, donc $A_{T\wedge S}^{1/2} \leq \beta + \sqrt{\Delta A_T^*}$, d'où le résultat. ∎

Dans la suite, et sauf mention contraire, Y^n et Z^n désignent des processus càdlàg adaptés sur $(\Omega^n, \underline{\underline{F}}^n, \underline{F}^n, P^n)$. Si on écrit $Y^n \prec Z^n$, cela suppose que Z^n est croissant.

(2.5) Condition (α). On dit que la suite (Y^n) vérifie cette condition si pour tout $t > 0$ on a: $\lim_{b\uparrow\infty} \sup_n P^n[(Y^n)_t^* \geq b] = 0$.

(2.6) LEMME: a) Soit (Y^n) et (Z^n) des suites vérifiant (α). Alors les suites $(Y^n + Z^n)$, (cY^n) avec $c \in \mathbb{R}$, et $((Y^n)^*)$, vérifient (α).

b) Supposons que $Y^n \prec Z^n$ et que $\sup_n E^n[(\Delta Z^n)_t^*] < \infty$ pour tout $t > 0$. Si (Z^n) vérifie (α), alors (Y^n) vérifie (α).

Démonstration. (a) est évident, (b) est une application triviale de (2.3). ∎

Rappelons maintenant un critère de compacité pour une suite de probabilités sur l'espace de Skorokhod $\mathbb{D}^d = D([0,\infty[;\mathbb{R}^d)$. Si $x \in \mathbb{D}^d$ on définit les modules de continuité suivants (avec $t > 0$, $\delta > 0$):

$$w^t(x,\delta) = \sup_{s\leq t} \sup_{r\in]s,s+\delta]} \sup_{v\in]s,r[} (|x(v)-x(s)| \wedge |x(v)-x(r)|) \tag{2.7}$$

On a alors le critère suivant, déduit du critère de Prokhorov (cf. [1]):

(2.8) THEOREME: <u>Pour qu'une suite (μ^n) de probabilités sur $\mathbb{D}^d$ soit relativement compacte, il faut et il suffit que:</u>

(i) $\lim_{b\uparrow\infty} \sup_n \mu^n(\{x: \sup_{s\le t} |x(s)| \geq b\}) = 0$ <u>pour tout</u> $t>0$;

(ii) $\lim_{\delta\downarrow 0} \sup_n \mu^n(\{x: w^t(x,\delta) \geq \eta\}) = 0$ <u>pour tous</u> $t>0$, $\eta>0$.

(2.9) COROLLAIRE: <u>Soit</u> (Y^n) <u>une suite de processus, soit</u> $a>0$, <u>et soit</u> $\check{Y}^n = \sum_{0\le s\le .} |\Delta Y_s^n| I_{\{|\Delta Y_s^n|>a\}}$. <u>Si la suite</u> $(\mathcal{L}(Y^n))$ <u>est relativement compacte, les suites</u> (Y^n) <u>et</u> $(\check{Y}^n)$ <u>vérifient</u> (α).

<u>Démonstration</u>. L'assertion concernant (Y^n) découle de (2.8,i). Soit $\varepsilon>0$, $t>0$. D'après (2.8,ii) il existe $\delta\in]0,1]$ tel que

(2.10) $$\sup_n P^n[w^{t+1}(Y^n,\delta) \geq a/2] \leq \varepsilon/2 .$$

D'après (2.8,i) il existe $b>0$ tel que

(2.11) $$\sup_n P^n[(Y^n)_t^* \geq b] \leq \varepsilon/2 .$$

Si $w^{t+1}(Y^n,\delta)<a/2$ il n'est pas difficile de vérifier que Y^n a au plus $2[t/\delta]$ sauts d'amplitude $>a$ entre 0 et t, et si $(Y^n)_t^*\le b$ ces sauts sont d'amplitude $\le 2b$. Donc d'après (2.10) et (2.11) on a

$$\sup_n P^n(\check{Y}_t^n \geq 4\,t\,b/\delta) \leq \varepsilon ,$$

ce qui prouve que $(\check{Y}^n)$ vérifie (α). ∎

(2.12) COROLLAIRE: a) <u>(1.6,i) entraine que les conditions (1.6,ii-a) pour</u> $a>0$ <u>sont toutes équivalentes</u>.

b) <u>Si on a (1.6,i) et (1.6,ii-1), les hypothèses de (1.8) sont satisfaites</u>.

<u>Démonstration</u>. Supposons que $\mathcal{L}(X^n) \longrightarrow \mathcal{L}(X)$. Pour tout $a>0$ on pose

$$\check{X}^n(a)_t = \sum_{0\le s\le t} \Delta X_s^n I_{\{|\Delta X_s^n|>a\}} ,$$

$F^n(a)=B^n(a)$ et $N^n(a)=X^n-\check{X}^n(a)-B^n(a)$. On a donc (1.9). On sait que $|\Delta N^n(a)|\le 2a$, donc on a (1.8,i). D'après (2.9) la suite (X^n) vérifie (α), tandis que $\check{X}^n(a)_t^*=0$ si $(X^n)_t^*\le 2a$, donc on a (1.8,iii). Enfin (1.8,ii) équivaut à l'ensemble des conditions (1.6,ii-a).

Soit $0<a<a'$. D'après (1.5), $B^n(a')-B^n(a)$ est la projection prévisible duale de $\overline{X}^n=\check{X}^n(a)-\check{X}^n(a')$, donc $V(B^n(a')-B^n(a))$ est majoré par la projection prévisible duale de $V(\overline{X}^n)$, qui est elle-même dominée au sens de Lenglart par $V(\overline{X}^n)$. Donc

$$|V(B^n(a')) - V(B^n(a))| \leq V(B^n(a')-B^n(a)) \prec V(\overline{X}^n) .$$

$\{V(\check{X}^n(a))\}$ vérifie (α) d'après (2.9). Comme $V(\overline{X}^n)\le V(\check{X}^n(a))$, la suite $(V(\overline{X}^n))$ vérifie aussi (α). Comme $\Delta V(\overline{X}^n)\le a'$, (2.6,b) entraine que $\{|V(B^n(a')) - V(B^n(a))|\}$ vérifie aussi (α), ce qui d'après (2.6,a) entraine l'équivalence: (1.6,ii-a) $\Longleftrightarrow$ (1.6,ii-a'). On a donc prouvé (a), et d'après le début de la démonstration, (b) en découle. ∎

3 - CONSTRUCTION DE LA VARIATION QUADRATIQUE DE X

Dans cette section nous allons construire, à partir de certaines hypothèses, la variation quadratique du processus X. Si on sait par avance que $[X,X]$ existe, par exemple si X est une semimartingale par rapport à une certaine filtration, cette section est inutile, à l'exception des notations introduites au début.

Si $x \in \mathbb{D}^1$, on pose

$$(3.1)\qquad \begin{cases} D(x) = \{t \geq 0:\ t=0 \text{ ou } \Delta x(t) = 0\} \\ U(x) = \{u > 0:\ |\Delta x(t)| \neq u \text{ pour tout } t \geq 0\} \\ t_0(u,x) = 0, \quad t_{i+1}(u,x) = \inf(t > t_i(u,x):\ |\Delta x(t)| > u). \end{cases}$$

On note $\mathcal{S}(t)$ l'ensemble des subdivisions de $[0,t]$. Si $\tau \in \mathcal{S}(t)$, on définit $S_\tau(x)$ par (1.1), et on note $|\tau|$ (resp. $\|\tau\|$) le pas (resp. le nombre d'intervalles) de τ. Si $\tau \in \mathcal{S}(t)$ et si $u > 0$, on note $\tau(u,x)$ la subdivision de $[0,t]$ constituée:

$$(3.2)\qquad \begin{cases} \text{- des points de } \tau \\ \text{- des points } t_i(u,x) \text{ tels que } t_i(u,x) \leq t, \end{cases}$$

et on définit encore $S_{\tau(u)}(x) = S_{\tau(u,x)}(x)$ par (1.1), formule dans laquelle les t_i sont alors les points de subdivision de $\tau(u,x)$.

Posons aussi:

$$(3.3)\qquad \begin{cases} D = \{t \geq 0:\ t=0 \text{ ou } P(\Delta X_t \neq 0) = 0\} \\ U = \{u > 0:\ P(|\Delta X_t| \neq u \text{ pour tout } t \geq 0) = 1\}, \end{cases}$$

qui sont des parties denses de $\mathbb{R}_+$. Si $\mu = \mathcal{L}(X)$, on a:

$$(3.4)\qquad D \subset D(x) \text{ et } U \subset U(x) \text{ pour } \mu\text{-presque tout } x.$$

Il est classique que les fonctions $x \rightsquigarrow x(t)$ (resp. $x \rightsquigarrow t_i(u,x)$, $x \rightsquigarrow \Delta x[t_i(u,x)]$) sont continues sur $\mathbb{D}^1$ en tout point x tel que $t \in D(x)$ (resp. $u \in U(x)$), donc $S_{\tau(u)}(.)$ est également continue en tout x tel que $\tau \subset D(x)$ et $u \in U(x)$. D'après (3.4) on a:

(3.5) LEMME: <u>Pour tous</u> $u \in U$, $\tau \subset D$, $i \geq 0$, <u>les fonctions</u> $t_i(u,.)$, $\Delta x(t_i(u,.))$, $S_\tau(.)$, $S_{\tau(u)}(.)$ <u>sont</u> μ<u>-p.s. continues sur</u> $\mathbb{D}^1$.

Dans la suite, D_0 désigne une partie dénombrable de D contenant 0

et dense dans $\mathbb{R}_+$; si $t \in D_0$, on note $\mathcal{S}_0(t)$ l'ensemble des $\tau \in \mathcal{S}(t)$ tels que $\tau \subset D_0$. Nous allons supposer satisfaites les deux hypothèses suivantes:

(3.6) Hypothèse: Si $t \in D_0$, $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$, il existe $\rho(t,\varepsilon,\eta) > 0$ et $u(t,\varepsilon,\eta) > 0$ tels que, si $\tau, \tau' \in \mathcal{S}_0(t)$ vérifient $|\tau|, |\tau'| \leq \rho(t,\varepsilon,\eta)$ et si $u, u' \in U$ vérifient $u, u' \leq u(t,\varepsilon,\eta)$, on ait:

$$P(|S_{\tau(u)}(X) - S_{\tau'(u')}(X)| > \varepsilon) \leq \eta \ .$$

(3.7) Hypothèse: Si $t \in D_0$, $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$, il existe $\delta(t,\varepsilon,\eta) > 0$ tel que, si $s \in D_0 \cap]t, t+\delta(t,\varepsilon,\eta)]$, si $u \in U$, et si $\tau \in \mathcal{S}_0(s)$ vérifie $t \in \tau$, τ' désignant la restriction de τ à $[0,t]$, on ait:

$$P(|S_{\tau(u)}(X) - S_{\tau'(u)}(X)| > \varepsilon) \leq \eta \ .$$

Nous nous proposons de montrer le:

(3.8) LEMME: Sous (3.6) et (3.7) la variation quadratique $[X,X]$ existe et, si $t \in D_0$, $\tau \in \mathcal{S}_0(t)$ avec $|\tau| \leq \rho(t,\varepsilon,\eta)$, $u \in U$ avec $u \leq u(t,\varepsilon,\eta)$, on a:

$$P(|S_{\tau(u)}(X) - [X,X]_t| > \varepsilon) \leq \eta.$$

On va diviser la démonstration en plusieurs étapes.

1ère étape. Soit $t \in D_0$. Si $n \in \mathbb{N}$ on pose $\rho_n(t) = \rho(t, 2^{-n}, 2^{-n})$ et $u_n(t) = u(t, 2^{-n}, 2^{-n})$. On choisit pour chaque $n \in \mathbb{N}$ un point $\hat{u}_n \in U$ et une subdivision $\hat{\tau}_n \in \mathcal{S}_0(t)$ tels que

$$\hat{u}_n \leq \inf_{m \leq n} u_m(t) , \quad |\hat{\tau}_n| \leq \inf_{m \leq n} \rho_m(t) ,$$

de sorte que d'après (3.6) on a:

$$m \geq n \implies P(|S_{\hat{\tau}_n(\hat{u}_n)}(X) - S_{\hat{\tau}_m(\hat{u}_m)}(X)| > 2^{-n}) \leq 2^{-n} .$$

Il existe donc une variable aléatoire B_t telle que $S_{\hat{\tau}_n(\hat{u}_n)}(X) \xrightarrow{p.s.} B_t$.

De plus, si $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$, et si $u \in U$ avec $u \leq u(t,\varepsilon,\eta)$, $\tau \in \mathcal{S}_0(t)$ avec $|\tau| \leq \rho(t,\varepsilon,\eta)$, on a d'après (3.6):

$$2^{-n} \leq \varepsilon \wedge \eta \implies P(|S_{\tau(u)}(X) - S_{\hat{\tau}_n(\hat{u}_n)}(X)| > \varepsilon) \leq \eta \ .$$

En faisant tendre n vers l'infini, on obtient alors:

$$(3.9) \begin{cases} t \in D_0 \ , \ \tau \in \mathcal{S}_0(t) \ \text{avec} \ |\tau| \leq \rho(t,\varepsilon,\eta) \ , \ u \in U \ \text{avec} \ u \leq u(t,\varepsilon,\eta) \\ \longrightarrow \quad P(|S_{\tau(u)}(X) - B_t| > \varepsilon) \leq \eta. \end{cases}$$

2ème étape. Soit $t < s$ deux points de D_0 . Soit $\tau \in \mathcal{S}_0(s)$ tel que $t \in \tau$ et notons τ' la restriction de τ à $[0,t]$. On a par construction même (et puisque $t \in \tau(u)$) : $S_{\tau'(u)}(X) \leq S_{\tau(u)}(X)$. D'après (3.9) on en déduit immédiatement que $B_t \leq B_s$ p.s. Si de plus $s \leq t + \delta(t,\varepsilon',\eta')$ on a d'après (3.7):

$$P(|S_{\tau(u)}(X) - S_{\tau'(u)}(X)| > \varepsilon') \leq \eta' ,$$

tandis que si $u \in U$, $u \leq u(t,\varepsilon,\eta) \wedge u(s,\varepsilon,\eta)$ et $|\tau| \leq \rho(t,\varepsilon,\eta) \wedge \rho(s,\varepsilon,\eta)$ on a aussi

$$P(|S_{\tau(u)}(X) - B_s| > \varepsilon) \leq \eta \quad , \quad P(|S_{\tau'(u)}(X) - B_t| > \varepsilon) \leq \eta .$$

Par suite

$$t \leq s \leq t + \delta(t,\varepsilon',\eta') \Longrightarrow P(|B_t - B_s| > 2\varepsilon + \varepsilon') \leq 2\eta + \eta' , \quad \forall \varepsilon > 0, \forall \eta > 0 .$$

Il s'ensuit que $B_s \xrightarrow{p.s.} B_t$ si $s \downarrow t$ le long de D_o. Posons alors

$$[X,X]_t = \inf_{s > t, s \in D_o} B_s$$

pour tout $t \geq 0$: on définit ainsi un processus croissant $[X,X]$, qui vérifie $[X,X]_t = B_t$ p.s. si $t \in D_o$, donc qui d'après (3.9) vérifie la seconde partie du lemme (3.8). Il nous reste à montrer que $[X,X]$ est bien la variation quadratique de X .

<u>3ème étape</u>. Soit $t \in D_o$, $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$ fixés. Fixons aussi $u \in U$ avec $u \leq u(t,\varepsilon,\eta)$. Soit $N^u = \inf(i : t_{i+1}(u,X) > t)$. Si $N \in \mathbb{N}$, $\rho > 0$, on pose

$$G_{N,\rho} = \{N^u \leq N\} \cap [\bigcap_{1 \leq i \leq N} \{t_i(u,X) - t_{i-1}(u,X) > \rho ,$$
$$\sup_{0 < r,r' \leq \rho} |X_{t_i(u,X)+r} - X_{t_i(u,X)}| |X_{t_i(u,X)} - X_{t_i(u,X)-r'}| \leq \frac{\varepsilon}{2N}\}]$$

Soit $\tau = \{0 = s_0 < \dots < s_m = t\} \in \mathcal{S}_o(t)$ tel que $|\tau| \leq \rho$. Si $\omega \in G_{N,\rho}$ il existe $N^u(\omega)$ couples (s_{k_i}, s_{k_i+1}) tels que $t_{i-1}(u,X) \leq s_{k_i} < t_i(u,X) \leq s_{k_i+1} < t_{i+1}(u,X)$, et un calcul élémentaire montre que

$$S_\tau(X) - S_{\tau(u)}(X) = 2 \sum_{i=1}^{N^u} (X_{s_{k_i+1}} - X_{t_i(u,X)})(X_{t_i(u,X)} - X_{s_{k_i}}).$$

Par suite sur $G_{N,\rho}$ on a $|S_\tau(X) - S_{\tau(u)}(X)| \leq \varepsilon$.

Par ailleurs $\lim_{\rho \downarrow 0, N \uparrow \infty} G_{N,\rho} = \Omega$. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ et $\rho > 0$ tels que $P(G_{N,\rho}) \geq 1 - \eta$, donc

$$\tau \in \mathcal{S}_o(t) , \ |\tau| \leq \rho \Longrightarrow P(|S_{\tau(u)}(X) - S_\tau(X)| > \varepsilon) \leq \eta .$$

Mais $u \leq u(t,\varepsilon,\eta)$, et $B_t = [X,X]_t$ p.s., donc d'après (3.9) il vient:

$$\tau \in \mathcal{S}_o(t) , \ |\tau| \leq \rho \wedge \rho(t,\varepsilon,\eta) \Longrightarrow P(|S_\tau(X) - [X,X]_t| > \varepsilon) \leq \eta .$$

On en déduit que:

$$\text{(3.10)} \qquad \tau \in \mathcal{S}_o(t) , \ |\tau| \downarrow 0 \Longrightarrow S_\tau(X) \xrightarrow{P} [X,X]_t .$$

<u>4ème étape</u>. Soit enfin $t \geq 0$, $\tau \in \mathcal{S}(t)$. Pour tout $\varepsilon > 0$ il est facile de trouver $t_\varepsilon > t$, $t_\varepsilon \in D_o$, et $\tau_\varepsilon \in \mathcal{S}_o(t_\varepsilon)$ tels que $|\tau_\varepsilon| \leq |\tau|/2$, que

$\|\tau_\varepsilon\| = \|\tau\|$, et que $P(|S_\tau(X) - S_{\tau_\varepsilon}(X)| > \varepsilon) \leq \varepsilon$. Etant donné (3.10), on en déduit que

$$\tau \in \mathcal{A}_0(t)\,, \quad |\tau| \searrow 0 \quad \longrightarrow \quad S_\tau(X) \xrightarrow{P} [X,X]_t$$

(car $[X,X]_{t_\varepsilon} \longrightarrow [X,X]_t$ si $t_\varepsilon \searrow t$). On a donc montré que $[X,X]$ est la variation quadratique de X. ∎

(3.11) LEMME: <u>Si</u> $[X,X]$ <u>existe, on a</u> $\Delta[X,X] = (\Delta X)^2$.

<u>Démonstration</u>. Soit (Q_n) une suite croissante de parties localement finies de $\mathbb{R}_+$, contenant 0, de réunion $\mathbb{Q}_+$, de pas tendant vers 0 quand $n \uparrow \infty$. Si $t \in Q_n$, $Q_n(t) = Q_n \cap [0,t]$ est dans $\mathcal{A}(t)$. Quitte à prendre une sous-suite, notée encore (Q_n), on peut supposer que

$$t \in \mathbb{Q}_+ \implies S_{Q_n(t)}(X) \xrightarrow{p.s.} [X,X]_t$$

($S_{Q_n(t)}(X)$ existe pour tout n assez grand). Quitte à jetter un ensemble négligeable, on peut même supposer que $S_{Q_n(t)}(X) \longrightarrow [X,X]_t$ identiquement pour tout $t \in \mathbb{Q}_+$.

Soit alors $t > 0$, $s_n = \inf(s \in Q_n : s \geq t)$, $s'_n = \sup(s \in Q_n : s < t)$. Il est facile de voir que

$$S_{Q_n(s_n)}(X) \longrightarrow [X,X]_t\,, \qquad S_{Q_n(s'_n)}(X) \longrightarrow [X,X]_{t-}$$
$$S_{Q_n(s_n)}(X) - S_{Q_n(s'_n)}(X) \longrightarrow (\Delta X_t)^2\,,$$

d'où le résultat. ∎

<u>4 - DEMONSTRATION DU THEOREME (1.8)</u>

Dans toute cette section on suppose que les hypothèses du théorème (1.8) sont satisfaites.

(4.1) LEMME: <u>Pour tout</u> $t > 0$ <u>il existe</u> $a_t > 0$ <u>tel que</u>

$$a \geq a_t \quad \longrightarrow \quad \lim_{b \uparrow \infty} \sup_n P^n([N^n(a), N^n(a)]_t \geq b^2) = 0\,.$$

<u>Démonstration</u>. D'après (1.8,iii) il existe $a_t > 0$ tel que $\sup_n P^n(\check{X}^n(a)^*_t > 0) < \infty$ pour tout $a \geq a_t$. Fixons $a \geq a_t$. Les suites (X^n) et $(F^n(a))$ vérifient (α) d'après (2.9) et (1.8,ii); la suite $(\check{X}^n(a)^t)$ des processus arrêtés $\check{X}^n(a)^t_s = \check{X}^n(a)_{t \wedge s}$ vérifie (α) parce que $a \geq a_t$, donc si $N^n(a)^t_s = N^n(a)_{t \wedge s}$, la suite de processus $(N^n(a)^t)$ vérifie également (α) d'après (1.9) et (2.6,a).

D'après les inégalités de Davis-Burkhölder-Gundy il existe une constante K telle que si $A^n = [N^n(a)^t, N^n(a)^t]^{1/2}$ on ait $A^n \prec K\, N^n(a)^t$.

Etant donné (1.8,i), le lemme (2.6,b) entraine que (A^n) vérifie (α), d'où le résultat.∎

Dans la suite, nous utilisons les notations du début du §3.

(4.2) LEMME: <u>Si</u> $t \in D_0$, $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$, <u>il existe</u> $\rho(t,\varepsilon,\eta) > 0$ <u>et</u> $u(t,\varepsilon,\eta) > 0$ <u>tels que pour tous</u> $\tau \in \mathcal{S}_0(t)$ <u>avec</u> $|\tau| \leq \rho(t,\varepsilon,\eta)$ <u>et tout</u> $u \in]0,u(t,\varepsilon,\eta)]$ <u>on ait</u>

$$\sup_n P^n(|S_{\tau(u)}(X^n) - [X^n,X^n]_t| > \frac{\varepsilon}{2}) \leq \frac{\eta}{2} .$$

<u>Démonstration</u>. Soit $\tau \in \mathcal{S}_0(t)$. On note $0 = S_0^{n,\tau,u} < S_1^{n,\tau,u} < \ldots < S_{q_n}^{n,\tau,u} = t$ les points (aléatoires) de la subdivision $\tau(u,X^n)$; q_n est aussi une variable aléatoire, et on pose $S_i^{n,\tau,u} = t$ si $i \geq q_n$. Les $S_i^{n,\tau,u}$ sont des temps d'arrêt pour $\underline{F}^n$ et d'après la formule d'Ito on a

$$\begin{aligned}(X^n_{S_i^{n,\tau,u}} - X^n_{S_{i-1}^{n,\tau,u}})^2 &= 2\int_{]S_{i-1}^{n,\tau,u},S_i^{n,\tau,u}]} (X^n_{v-} - X^n_{S_{i-1}^{n,\tau,u}})\, dX^n_v \\ &\quad + [X^n,X^n]_{S_i^{n,\tau,u}} - [X^n,X^n]_{S_{i-1}^{n,\tau,u}} .\end{aligned}$$

Si alors

$$H_s^{n,\tau,u} = 2\sum_{i\geq 1} (X^n_{s-} - X^n_{S_{i-1}^{n,\tau,u}})\, I_{]S_{i-1}^{n,\tau,u},S_i^{n,\tau,u}]}(s) , \tag{4.3}$$

on définit un processus prévisible continu à gauche nul sur $]t,\infty[$, et

$$S_{\tau(u)}(X^n) = [X^n,X^n]_t + (H^{n,\tau,u}\cdot X^n)_t \tag{4.4}$$

(le dernier terme est une intégrale stochastique; rappelons que $[X^n,X^n]_0 = (X_0^n)^2$). Enfin si $a > 0$, on définit les processus

$$\text{(4.5)}\quad \begin{cases} K^{n,\tau,u}(a) = H^{n,\tau,u}\cdot X^n(a) , \quad G^{n,\tau,u}(a) = H^{n,\tau,u}\cdot F^n(a) , \\ \qquad L^{n,\tau,u}(a) = H^{n,\tau,u}\cdot N^n(a) . \end{cases}$$

Fixons $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$. D'après (4.5) on a $K^{n,\tau,u}(a)^*_t = 0$ si $\check{X}^n(a)^*_t = 0$, donc d'après (1.8,iii) il existe $a \geq a_t$ (où a_t est défini dans (4.1)) tel que

$$\sup_n P^n(K^{n,\tau,u}(a)^*_t > 0) \leq \frac{\eta}{12} . \tag{4.6}$$

D'après les inégalités de Davis-Burkhölder-Gundy, il existe une constante K telle que $L^{n,\tau,u}(a) \prec K\,[L^{n,\tau,u}(a),L^{n,\tau,u}(a)]^{1/2}$. Etant donné (4.5),

$$L^{n,\tau,u}(a) \prec K\,\{(H^{n,\tau,u})^2\cdot[N^n(a),N^n(a)]\}^{1/2} .$$

De plus $\Delta[N^n(a),N^n(a)] = (\Delta N^n(a))^2$. D'après (1.8,i), $c = \sup_n E^n[\Delta N^n(a)^*_t]$ est fini, et le lemme (2.2) entraine alors que pour tous $\beta > 0$, $\gamma > 0$,

$$P^n(L^{n,\tau,u}(a)^*_t \geq \frac{\varepsilon}{4}) \leq \frac{K\gamma}{\varepsilon}(\beta + c) + P^n[(H^{n,\tau,u})^*_t > \gamma] + P^n([N^n(a),N^n(a)]_t > \beta^2) \tag{4.7}$$

D'après la définition (4.5) on a aussi, pour tout $\gamma'>0$:

$$(4.8)\qquad P^n[G^{n,\tau u}(a)^*_t > \tfrac{\varepsilon}{4}] \le P^n[(H^{n,\tau,u})^*_t > \gamma'] + P^n[V(F^n(a))_t > \tfrac{\varepsilon}{4\gamma'}].$$

Enfin on a $|\Delta X^n|\le u$ sur tous les intervalles $]S^{n,\tau,u}_{i-1}, S^{n,\tau,u}_i[$, donc d'après (2.7) et (4.3) il n'est pas difficile de voir que $(H^{n,\tau,u})^*_t \le u+3\, w^t(X^n,|\tau|)$. D'après (2.8,ii) il existe donc $\delta(\gamma)>0$ tel que

$$(4.9)\qquad u>0,\ |\tau|\le\delta(\gamma) \longrightarrow \sup_n P^n[(H^{n,\tau,u})^*_t > \gamma+u] \le \tfrac{\eta}{12}.$$

D'après (1.8,ii) et (4.1) on peut trouver $\beta>0$, $\gamma'>0$ tels que

$$(4.10)\qquad \sup_n P^n[V(F^n(a))_t > \tfrac{\varepsilon}{4\gamma'}] \le \tfrac{\eta}{12},\ \sup_n P^n([N^n(a),N^n(a)]_t > \beta^2) \le \tfrac{\eta}{12};$$

on choisit ensuite $\gamma>0$ tel que $\gamma\le\gamma'$ et $\frac{4K\gamma}{\varepsilon}(\beta+c)\le\frac{\eta}{12}$; soit enfin $\rho(t,\varepsilon,\eta)=\delta(\gamma/2)$ et $u(t,\varepsilon,\eta)=\gamma/2$. D'après (4.7) et (4.8) on a:

$$|\tau|\le\rho(t,\varepsilon,\eta),\quad u\le u(t,\varepsilon,\eta) \Longrightarrow$$
$$\sup_n P^n[L^{n,\tau,u}(a)^*_t \ge \tfrac{\varepsilon}{4}] \le \tfrac{\eta}{4},\quad \sup_n P^n[G^{n,\tau,u}(a)^*_t > \tfrac{\varepsilon}{4}] \le \tfrac{\eta}{6}.$$

Compte tenu de (1.9), de (4.4), et de (4.6), on en déduit que

$$|\tau|\le\rho(t,\varepsilon,\eta),\ u\le u(t,\varepsilon,\eta) \longrightarrow \sup_n P^n(|S_{\tau(u)}(X^n) - [X^n,X^n]_t| > \tfrac{\varepsilon}{2}) \le \tfrac{\eta}{2}. \blacksquare$$

Le lemme précédent (4.2) nous servira à obtenir l'hypothèse (3.6), et il est en outre essentiel pour montrer que $\mathcal{L}([X^n,X^n]) \longrightarrow \mathcal{L}([X,X])$ lorsque l'existence de $[X,X]$ sera établie. Le lemme suivant, par contre, ne sert qu'à obtenir l'hypothèse (3.7): si on sait aue la variation quadratique $[X,X]$ existe, il est donc inutile.

(4.11) LEMME: <u>Si</u> $s\in D_0$, $\varepsilon>0$, $\eta>0$, <u>il existe</u> $\delta(s,\varepsilon,\eta)>0$ <u>tel que, pour tout</u> $t\in D_0\cap]s,s+\delta(s,\varepsilon,\eta)]$, <u>tout</u> $u\in U$, <u>tout</u> $\tau\in\mathcal{S}_0(t)$ <u>avec</u> $s\in\tau$, <u>si on désigne par</u> τ' <u>la restriction de</u> τ <u>à</u> $[0,s]$, <u>on ait</u>:

$$\lim \sup_n P^n(|S_{\tau(u)}(X^n) - S_{\tau'(u)}(X^n)| > \varepsilon) \le \eta .$$

<u>Démonstration</u>. Soit $s\in D_0$, $\varepsilon>0$, $\eta>0$. Soit $t\in D_0$, $t>s$. Soit $\tau\in\mathcal{S}_0(t)$ tel que $s\in\tau$, et notons τ' la restriction de τ à $[0,s]$. Les $S^{n,\tau,u}_i$ étant définis comme dans la preuve de (4.2), on pose:

$$(4.12)\qquad \begin{cases} \tilde H^{n,\tau,u}_v = 2\sum_{i\ge1}(X^n_{v-} - X^n_{S^{n,\tau,u}_{i-1}})\, I_{]S^{n,\tau,u}_{i-1};S^{n,\tau,u}_i]\cap]s,t]}(v) \\ H^n_v = 2(X^n_{v-} - X^n_s)\, I_{]s,t]}(v) \\ H^{n,\tau,u} = \tilde H^{n,\tau,u} - H^n . \end{cases}$$

Si on utilise la formule d'Ito de la manière qui permet d'obtenir (4.4), on arrive à:

$$S_{\tau(u)}(X^n) - S_{\tau'(u)}(X^n) = [X^n,X^n]_t - [X^n,X^n]_s + (\tilde H^{n,\tau,u}\cdot X^n)_t$$

$$(X_t^n - X_s^n)^2 = [X^n,X^n]_t - [X^n,X^n]_s + (H^n\bullet X^n)_t$$

(4.13) $$S_{\tau(u)}(X^n) - S_{\tau'(u)}(X^n) = (H^{n,\tau,u}\bullet X^n)_t .$$

On reprend alors les notations et la démonstration du lemme (4.2), à partir des formules (4.5), et avec $H^{n,\tau,u}$ défini par (4.12). On choisit $a \geq a_t$ de sorte qu'on ait (4.6). On a (4.7) et (4.8). Etant donné (4.12) on a $(H^{n,\tau,u})_t^* \leq f_{s,t}(X^n)$, où $f_{s,t}(x) = \sup_{s<v\leq t} |x(v) - x(s)|$. Il est bien connu que $f_{s,t}$ est une fonction continue en tout x tel que $s,t \in D(x)$, donc (3.4) et le fait que $\mathcal{L}(X^n) \longrightarrow \mathcal{L}(X)$ entrainent que: $\limsup_n P^n[f_{s,t}(X^n) \geq \alpha] \leq P[f_{s,t}(X) \geq \alpha]$. Par ailleurs $P[f_{s,t}(X) \geq \alpha]$ tend vers 0 si $t \downarrow s$, pour tout $\alpha > 0$; donc pour tout $\gamma > 0$ il existe $\delta(\gamma) > 0$ tel que

(4.14) $$u>0 , \quad t-s\leq \delta(\gamma) \Longrightarrow \limsup_n P^n[(H^{n,\tau,u})_t^* > \gamma] \leq \frac{\eta}{12} .$$

On choisit alors $\beta > 0$, $\gamma' > 0$ de sorte qu'on ait (4.10). On choisit ensuite $\gamma > 0$ tel que $\gamma \leq \gamma'$ et $\frac{4K\gamma}{\varepsilon}(\beta + c) \leq \frac{\eta}{12}$. Soit enfin $\delta(s,\varepsilon,\eta) = \delta(\gamma)$. D'après (4.5), (4.6), (4.7), (4.8) et (4.14) on a alors

$$s<t\leq s+\delta(s,\varepsilon,\eta) , \; t\in D_o \Longrightarrow \limsup_n P^n[(H^{n,\tau,u}\bullet X^n)_t^* > \frac{\varepsilon}{2}] \leq \frac{\eta}{2} ,$$

ce qui d'après (4.13) entraine le résultat. ∎

(4.15) COROLLAIRE: <u>Les hypothèses (3.6) et (3.7) sont satisfaites, avec les mêmes fonctions</u> $\rho(t,\varepsilon,\eta)$, $u(t,\varepsilon,\eta)$, $\delta(t,\varepsilon,\eta)$ <u>que dans (4.2) et (4.11)</u>.

<u>Démonstration</u>. Remarquons que d'après (4.2) ,

$$\sup_n P^n(|S_{\tau(u)}(X^n) - S_{\tau'(u')}(X^n)| > \varepsilon) \leq \eta$$

si $\tau,\tau' \in \mathcal{A}_o(t)$ (où $t \in D_o$), $|\tau| , |\tau'| \leq \rho(t,\varepsilon,\eta)$, $u,u' \leq u(t,\varepsilon,\eta)$. Le résultat est alors immédiat, d'après le lemme (3.5) et le fait que $\mathcal{L}(X^n) \longrightarrow \mathcal{L}(X)$. ∎

<u>Démonstration du théorème (1.8)</u>. Pour simplifier on écrit $A^n = [X^n,X^n]$. D'après (3.8) et (4.15), la variation quadratique $[X,X]$ de X existe, et on la note $A = [X,X]$.

Si $x \in \mathbb{D}^1$, $u > 0$, on pose

$$h_t^u(x) = x(0)^2 + \sum_{0<s\leq t} \Delta x(s)^2 I_{\{|\Delta x(s)| > u\}} =$$
$$= x(0)^2 + \sum_{0<t_i(u,x)\leq t} \Delta x[t_i(u,x)]^2 .$$

La fonction h_t^u , de même que $S_{\tau(u)}$ et que $x \rightsquigarrow x(t)$, sont continues sur $\mathbb{D}^1$ en tout x tel que $u \in U(x)$, $t \in D(x)$ et $\tau \subset D(x)$. D'après (3.4) et le fait que $\mathcal{L}(X^n) \longrightarrow \mathcal{L}(X)$ on en déduit que si $t_i \in D_o$, $u_i \in U$, $u \in U$, $\tau_i \in \mathcal{A}_o(t_i)$, on a

$$(4.16)\qquad \mathcal{L}[(X^n_{t_i}, S_{\tau_i(u_i)}(X^n), h^u_{t_i}(X^n))_{i\le m}] \longrightarrow \mathcal{L}[(X_{t_i}, S_{\tau_i(u_i)}(X), h^u_{t_i}(X))_{i\le m}]$$

Etant donnés (4.2) et la seconde assertion de (3.8), il est facile de déduire de (4.16) que si $t_i \in D_0$, $u \in U$, on a:

$$(4.17)\qquad \mathcal{L}[(X^n_{t_i}, A^n_{t_i}, h^u_{t_i}(X^n))_{i\le m}] \longrightarrow \mathcal{L}[(X_{t_i}, A_{t_i}, h^u_{t_i}(X))_{i\le m}].$$

Comme D_0 est dense dans $\mathbb{R}_+$ et contient 0, il suffit donc, pour obtenir le résultat, de montrer que la suite $(\mathcal{L}(Y^n))$, où $Y^n = (X^n, A^n)$, est relativement compacte sur $\mathbb{D}^2$.

Comme $(Y^n)^* \le (X^n)^* + A^n$ et comme $\mathcal{L}(X^n) \longrightarrow \mathcal{L}(X)$ et $\mathcal{L}(A^n_t) \longrightarrow \mathcal{L}(A_t)$ pour tout $t \in D_0$, il est clair que la suite $(\mathcal{L}(Y^n))$ vérifie (2.8,i).

Posons $\hat{A}^{n,u} = A^n - h^u(X^n)$, $\hat{A}^u = A - h^u(X)$. D'après (3.11) on a

$$(4.18)\qquad \begin{aligned} \hat{A}^{n,u}_t &= A^n_t - A^n_0 - \textstyle\sum_{0<s\le t} \Delta A^n_s \, I_{\{\Delta A^n_s > u^2\}} \\ \hat{A}^u_t &= A_t - A_0 - \textstyle\sum_{0<s\le t} \Delta A_s \, I_{\{\Delta A_s > u^2\}} \end{aligned}$$

et $\Delta\hat{A}^u \le u^2$. D'après (4.17) on a aussi

$$(4.19)\qquad u \in U,\ t_i \in D_0 \Longrightarrow \mathcal{L}((\hat{A}^{n,u}_{t_i})_{i\le m}) \longrightarrow \mathcal{L}((\hat{A}^u_{t_i})_{i\le m}).$$

Soit $t \in D_0$, $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$. Soit $u \in U$ tel que $u^2 < \varepsilon/6$. Comme $\Delta\hat{A}^u \le u^2$, il existe $\theta(\omega) > 0$ tel que $\sup_{s\le t}(\hat{A}^u_{s+\theta(\omega)}(\omega) - \hat{A}^u_s(\omega)) \le \varepsilon/6$, donc il existe $\theta_0 > 0$ tel que

$$(4.20)\qquad P(\sup_{s\le t}(\hat{A}^u_{s+\theta_0} - \hat{A}^u_s) \ge \tfrac{\varepsilon}{6}) \le \tfrac{\eta}{4}.$$

Choisissons $\tau = \{0 = s_0 < \ldots < s_q = t\} \in \mathcal{S}_0(t)$, avec $|\tau| \le \theta_0$. D'après (4.19) et (4.20) il existe n_0 tel que

$$n \ge n_0 \Longrightarrow P^n(\sup_{i\le q}(\hat{A}^{n,u}_{s_i} - \hat{A}^{n,u}_{s_{i-1}}) \ge \tfrac{\varepsilon}{6}) \le \tfrac{\eta}{2}.$$

Comme $u^2 < \varepsilon/6$ et $\Delta\hat{A}^{n,u} \le u^2$, et comme $\hat{A}^{n,u}$ est croissant, on en déduit que

$$(4.21)\qquad n \ge n_0 \Longrightarrow P^n(\sup_{s\,:\,s+\theta_0\le t}(\hat{A}^{n,u}_{s+\theta_0} - \hat{A}^{n,u}_s) \ge \tfrac{\varepsilon}{2}) \le \tfrac{\eta}{2}.$$

Par ailleurs d'après (2.8,i) il existe $\delta > 0$ tel que

$$(4.22)\qquad \sup_n P^n(w^t(X^n,\delta) \ge \tfrac{u}{4} \wedge \tfrac{\varepsilon}{2}) \le \tfrac{\eta}{2}.$$

D'après (4.18) il n'est pas difficile de vérifier que

$$w^t(X^n,\delta) \le u/4 \Longrightarrow w^t(Y^n,\delta) \le w^t(X^n,\delta) + \sup_{s\,:\,s+\delta\le t}(\hat{A}^{n,u}_{s+\delta} - \hat{A}^{n,u}_s).$$

Mais alors, si on pose $\delta' = \delta \wedge \theta_0$, on obtient d'après (4.21) et (4.22):

$$n \ge n_0 \Longrightarrow P^n(w^t(Y^n,\delta') \ge \varepsilon) \le \eta.$$

Comme la famille finie $(\mathcal{L}(Y^n))_{n\le n_0}$ est relativement compacte, il existe