GÉRALD MAZZIOTTO
JACQUES SZPIRGLAS

Un exemple de processus à deux indices sans l'hypothèse F4

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 15 (1981), p. 673-688
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1981__15__673_0>

UN EXEMPLE DE PROCESSUS A DEUX INDICES SANS L'HYPOTHESE F4

G. MAZZIOTTO et J. SZPIRGLAS

La théorie des processus à indices dans $\mathbb{R}_+^2$, est essentiellement développée, (1, 2, 3,...), relativement à une filtration $\underline{\underline{F}} = (\underline{\underline{F}}_{st}, (s,t)\in\mathbb{R}_+^2)$ définie comme l'intersection de deux filtrations $\underline{\underline{F}}^1 = (\underline{\underline{F}}_s, s\in\mathbb{R}_+)$, $\underline{\underline{F}}^2 = (\underline{\underline{F}}_t, t\in\mathbb{R}_+)$ vérifiant une propriété d'indépendance conditionnelle traditionnellement notée F4. Cette hypothèse réalisée dans le cas de la filtration du mouvement brownien (convenablement complétée pour vérifier les conditions "habituelles" (4)), permet de ramener la plupart des problèmes à la résolution successive de deux problèmes à un indice. Malheureusement, elle n'est pas conservée lors d'un changement de probabilité équivalente, ce qui a déjà soulevé des difficultés dans les questions de filtrages (5), (6). Dans l'exemple particulièrement simple et classique suivant, inspiré de (7, 8, 4), la filtration qui s'impose naturellement ne peut, en général , posséder la propriété F4. Néanmoins on obtient de façon élémentaire les théorèmes généraux de la théorie des processus à deux indices avec F4 (3, 9) sur les projections droites et duales ainsi que sur la représentation des martingales. Les processus autres que continus ont, à notre connaissance, été étudiés dans (10) pour la représentation des martingales relativement à un processus de Poisson, dans (1) pour le calcul stochastique général et dans (11) pour le processus de Poisson et les problèmes de filtrage associés. La première étude sur les processus à un seul saut est (12). Elle présente des résultats différents de ceux obtenus dans ce papier dans la mesure où la filtration sous-jacente à (12) est strictement plus grosse que celle utilisée ici.

Le plan de l'exposé est le suivant. Etant donné un point aléatoire (S,T) sur $\mathbb{R}_+^2$, on étudie dans la première partie la plus petite filtration $\underline{\underline{F}}$, continue à droite (c.à.d.) qui fasse de Z = (S,T) un point d'arrêt. On en déduit la forme générale des processus optionnels, prévisibles, relatifs à celle-ci. Dans la deuxième partie on définit les projections droites et duales de processus mesurables. Enfin dans la dernière partie on établit un théorème de représentation des martingales dont la forme était suggérée par les équations du filtrage (sans F4) de (11).

On rappelle que $\mathbb{R}_+^2$ est muni de la relation d'ordre partiel $<$ et de sa relation renforcée $<<$ définies, pour z = (s,t) et z' = (s',t') quelconques de $\mathbb{R}_+^2$, $z<z'$ si et seulement si (ssi) $s\leq s'$ et $t\leq t'$ et $z<<z'$ ssi $s<s'$ et $t<t'$. On note $\nless$ et $\not\ll$ les relations inverses. Avec cet ordre, on définit les intervalles classiques du type $]z,z'] = \{x: z<<x<z'\}$, soit $R_z =]0,z]$. On note $\underline{\underline{B}}_z^\circ$ (resp. $\underline{\underline{B}}^\circ$) la tribu borélienne associée sur R_z (resp. $\mathbb{R}_+^2$).

Une fonction borélienne f sur $\mathbb{R}_+^2$ est dite c.à d.31 si on a $\lim\,(z'\to z\ z'>z)\ f(z') = f(z)\ \forall z>o$, et les limites existent dans les trois autres quadrants définis par z.

On appelle variation d'une fonction f sur $]z,z']$ la quantité $f(]z,z']) = f(s',t')-f(s,t')-f(s',t)+f(s,t)\ \forall z'>>z$. Une fonction f est dite croissante si elle est c.à.d.31 et si $f(]z,z'])\geq 0\ \forall z<<z'$. On convient dans toute la suite que $\frac{0}{0} = 0$. Les notions de martingale, martingale faible sont classiques (1).On note $\varepsilon_{ST}(ds,dt)$, la mesure de Dirac au point (S,T).

I. ETUDE D'UN POINT ALEATOIRE SUR $\mathbb{R}_+^2$:

Sur un espace mesurable $(\Omega, \underline{\underline{A}}°)$, on considère une v.a., $Z = (S,T)$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^2 \cup \{\infty\}$. La probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \underline{\underline{A}}°)$ décrivant la loi de Z, est définie par sa fonction de répartition $F(z) = \mathbb{P}(Z<z)$ où F est une fonction croissante, c.à.d 31, nulle sur les axes, donnée. On note $\underline{\underline{A}}$ (resp. $\underline{\underline{B}}$) la tribu $\underline{\underline{A}}°$ (resp. $\underline{\underline{B}}°$) augmentée des ensembles $\mathbb{P}$-négligeables de $\underline{\underline{A}}°$ (resp. négligeables pour la mesure dF associée à F sur $(\mathbb{R}_+^2, \underline{\underline{B}}°)$). On considère, la plus petite famille croissante de sous-tribus de $\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{F}} = (\underline{\underline{F}}_{st}, (st) \in \mathbb{R}_+^2)$ telle que $\underline{\underline{F}}$ est c.à.d., $\underline{\underline{F}}_z$ contient tous les $\mathbb{P}$-négligeables, $\forall$ z et Z est un $\underline{\underline{F}}$ point d'arrêt (i.e. $\{Z<z\} \in \underline{\underline{F}}_z \ \forall z$). C'est l'exemple bien connu de (4, 7, 8), transposé à deux indices. Par construction, la filtration $\underline{\underline{F}}$ satisfait aux conditions habituelles (4) appelées F1, F2, F3 dans (1) ; mais par contre, on va voir qu'elle ne vérifie pas, en général, la condition F4, classique (1) dans la théorie des processus à deux indices.

En adaptant les raisonnements du cas à un indice, (4, 13), on caractérise facilement les éléments de la filtration $\underline{\underline{F}}$ et la forme générale des divers types de processus s'en déduit :

$$\forall\ A \in \underline{\underline{A}} : A \in \underline{\underline{F}}_z \text{ (resp. } \underline{\underline{F}}_{z-} = \bigvee_{z'<<z} \underline{\underline{F}}_{z'}) \text{ ssi } \exists\ B \in \underline{\underline{B}} \text{ t.q.}$$

$$A \cap \{z>(\text{resp.}>>)Z\} = \{Z \in B\} \cap \{z>(\text{resp.}>>)Z\}$$

$$\text{et } A \cap \{z \not> (\text{resp.} \not\gg) Z\} = \emptyset \text{ ou } \{z \not> (\text{resp.} \not\gg) Z\}$$

Un processus X est optionnel (resp. prévisible) ssi il existe des fonctions $\underline{\underline{B}} \otimes \underline{\underline{B}}°$ et $\underline{\underline{B}}°$ - mesurables, H et h, telles que

$$X_z = H(Z,z)\ I(z>Z) + h(z)\ I(z \not> Z)$$

$$(\text{resp. } X_z = H(Z,z)\ I(z>>Z) + h(z)\ I(z \not\gg Z)).$$

Un processus croissant A, est adapté (resp. prévisible) ssi il existe un noyau positif sur $\underline{\underline{B}}° \otimes \underline{\underline{B}}$ et h une mesure positive sur $\underline{\underline{B}}°$ tels que :

$$A_Z = H(Z,[Z,z])\ I(z>Z) + \int_{R_Z} I(x \not> Z)\ h(dx)$$

$$(\text{resp. } A_Z = H(Z,]Z,z])\ I(z>>Z) + \int_{R_Z} I(x \not\gg Z)\ h(dx))$$

Les filtrations $\underline{\underline{F}}^1$ et $\underline{\underline{F}}^2$, indexées sur $\mathbb{R}_+^2$, sont définies par :

$\underline{\underline{F}}_s^1 = \bigvee_t \underline{\underline{F}}_{st}$, $\underline{\underline{F}}_t^2 = \bigvee_s \underline{\underline{F}}_{st}$ avec $(s,t) \in \mathbb{R}_+^2$.

On remarque que $\underline{\underline{F}}^1$est la filtration associée naturellement à un processus à un indice qui n'a qu'un saut d'amplitude T à l'instant S. En effet, on établit (13)

$A \in \underline{\underline{F}}_s^1$ ssi $\exists$ $B \in \underline{\underline{B}}$ t.q.

$A \cap \{s \geq S\} = \{Z \in B\} \cap \{s \geq S\}$ et $A \cap \{s<S\} = \emptyset$ ou $\{s<S\}$.

La forme générale des processus progressifs ou prévisibles relativement à $\underline{\underline{F}}^1$ est bien connue (13). on a des résultats symétriques pour $\underline{\underline{F}}^2$.

Le résultat principal de ce paragraphe est le suivant:

<u>PROPOSITION 1</u> : *Si sur $(\Omega, \underline{\underline{A}}, \mathbb{P})$, la filtration $\underline{\underline{F}}$ possède la propriété F4 suivante :*

F4: $\forall (s,t) \in \mathbb{R}_+^2$, F_s^1 et F_t^2 sont $\underline{\underline{F}}_{st}$ - conditionnellement indépendantes,
alors la loi de Z est portée par un chemin croissant déterministe.

<u>DEMONSTRATION</u> : Pour chaque (s,t) l'indépendance conditionnelle est équivalente à :

$\forall A \in \underline{\underline{F}}_s^1$: $E(A/\underline{\underline{F}}_t^2) = E(A/\underline{\underline{F}}_{st})$. D'après (13), on a p.s.

$I(A) = H(S,T)\ I(s \geq S) + h\ I(s<S)$, et alors

$E(I(A)/\underline{\underline{F}}_t^2) = H(S,T)\ I(s \geq S, t \geq T) + h\ I(s<S, t \geq T)$
$\qquad + \mathbb{P}(t<T)^{-1}\ E[I(A)\ I(t<T)]\ I(t<T)$ p.s.

$E(I(A)/\underline{\underline{F}}_{st}) = H(S,T)\ I(z>Z) + \mathbb{P}(z \not> Z)^{-1}\ E[I(A)\ I(z \not> Z)]\ I(z \not> Z)$ p.s.

Ces deux expressions ne peuvent être identiques pour tout H et h que si $\mathbb{P}(s\geq S, t<T) = 0$ ou $\mathbb{P}(s<S, t\geq T) = 0$.

On en déduit donc que F possède la propriété suivante :
$\forall\ (s,t)\in \mathbb{R}_+^2 : F(s,t) = F(\infty,t)$ ou $F(s,t) = F(s,\infty)$.

Un calcul simple montre qu'alors toute la masse de la mesure dF est nécessairement concentrée sur un chemin croissant de $\mathbb{R}_+^2$.

REMARQUE 1 : Cette proposition montre que F4 n'est réalisée que dans une situation dégénérée, correspondant à un problème à un indice. A ce propos, la première rédaction de ce travail comportait une erreur, et nous remercions TH. EISELE, de nous l'avoir signalée.

Par contre, on vérifie facilement que $\underline{\underline{F}}$ possède la propriété suivante, nécessaire à F4 (14) :

$$\forall\ (s,t)\in \mathbb{R}_+^2 : \underline{\underline{F}}_{st} = \underline{\underline{F}}_s^1 \cap \underline{\underline{F}}_t^2.$$

L'intérêt de celle-ci est d'être conservée lors d'un changement de probabilités équivalentes,ce qui n'était pas le cas de F4, (sauf forme particulière de la densité de Radon-Nikodym (6,17)).

REMARQUE 2 : Dans (12), la filtration, soit $\underline{\underline{F}}'$, employée, est construite sur le produit tensoriel des plus petites filtrations à un indice qui font des coordonnées S et T du point aléatoire Z, des temps d'arrêt. La forme générale des processus $\underline{\underline{F}}'$ - optionnels est, par exemple :

$$\begin{aligned} X_{st} = {} & H(S,T\ ;\ s,t)\ I(s\geq S, t\geq T) + H'(S;s,t)\ I(s\geq S,t<T) \\ & + H''(T;s,t)\ I(s<S,t\geq T) + h(s,t)\ I(s<S,t<T) \end{aligned}$$

avec H,H',H",h des fonctions mesurables. On voit donc que la filtration $\underline{\underline{F}}$ utilisée ici est strictement plus petite que $\underline{\underline{F}}'$. Néanmoins, on vérifie aussi (R.J. ELLIOTT, communication personnelle) :

$$\forall\ (s,t)\in \mathbb{R}_+^2 : \underline{\underline{F}}'_{s\infty} \cap \underline{\underline{F}}'_{\infty t} = \underline{\underline{F}}'_{st}$$

et une condition nécessaire et suffisante pour que $\underline{\underline{F}}'$ possède la propriété F4 est que les coordonnées S et T soient indépendantes.

La forme explicite de toutes les martingales bornées dans L^p pour $p>1$, se déduit des calculs précédents :

$$M_z = H(Z)\ I(z>Z) + \mathbb{P}(z \not> Z)^{-1}\ E[H(Z)\ I(z \not> Z)]\ \ I(z \not> Z)\quad \text{p.s.}$$

avec H une fonction $\underline{\underline{B}}$ - mesurable telle que $\lim\limits_{z\to\infty} M_z = H(Z)$ dans $\mathbb{L}^p$.

On montre facilement, par cette formule, le théorème de convergence des martingales bornées dans $\mathbb{L}^p$ (sans F4 (1)). A cause du dénominateur $\mathbb{P}\ [z \not> Z] = 1 - F(z)$, il faut au préalable étudier le comportement de F autour de sa valeur limite 1.

<u>LEMME 2</u> : *La fonction de répartition F étant donnée, il existe un point unique z_0 de $\mathbb{R}_+^2 \cup \{\infty\}$, tel que :*

$z_0 = \inf\ \{z \in \mathbb{R}_+^2 : F(z) = 1\}$

$\quad = \infty$ *si l'ensemble est vide.*

<u>DEMONSTRATION</u> : Il faut montrer que l'écriture, $\inf\ \{z : F(z) = 1\}$ a bien un sens, c'est-à-dire que l'ensemble des points z tels que $F(z') = 1\ \forall\, z'>z$, est filtrant décroissant. Tout d'abord, si $F(z) = 1$, alors $F(z') = 1\ \forall\, z'>z$, car F est croissante bornée par 1. D'autre part, si (s,t) et (s',t') sont deux points incomparables, tels que $s \leq s'$, $t \geq t'$, et $F(s,t) = F(s',t') = 1$, alors, $F(s,t') = 1$. En effet, F étant croissante, $F\ (\,](s,t')\ ,\ (s',t)]\,) = F(s,t') - 1 \geq 0$.

On distinguera comme dans (8), entre les diverses configurations de F autour de z_0 :

1) $z_0 = \infty$
2) $z_0 << \infty$, $F\ (s_0^-,\ t_0) < 1$ et $F(s_0,\ t_0^-) < 1$
3) $z_0 << \infty$, $F\ (s_0^-,\ t_0) < 1$ et $F(s_0,\ t_0^-) = 1$
4) $z_0 << \infty$, $F\ (s_0^-,\ t_0) = 1$ et $F(s_0,\ t_0^-) < 1$
5) $z_0 << \infty$ et $F(s_0^-,\ t_0^-) = 1$.

Dans chacun de ces cas, on montre directement que quand z croît vers z_0, strictement, M_z converge p.s. vers $E(H(S,T)/\underline{\underline{F}}_{z_0^-})$, ce qui constitue bien un théorème de convergence des martingales.

On vérifie de plus que :

$\forall\ (s,t) \in \mathbb{R}_+^2 : M_{st} = M_{s\wedge s_0,\ t\wedge t_0}$

et que dans le cas 1) (resp. 2), 3), 4), 5)),

$H(S,T) = M_\infty$ (resp. $M_{s_\circ t_\circ}$, $M_{s_\circ t_\circ^-}$, $M_{s_\circ^- t_\circ}$, $M_{s_\circ^- t_\circ^-}$) p.s..

Cette dernière remarque nous permettra, au paragraphe III, de restreindre l'étude des martingales au rectangle D défini par : $D = \mathbb{R}_+^2$ (resp. $]0,s_\circ] \times]0,t_\circ]$, $]0,s_\circ] \times]0,t_\circ[$, $]0,s_\circ[\times]0,t_\circ]$, $]0,s_\circ[\times]0,t_\circ[$) dans le cas 1) (resp. 2), 3), 4), 5)).

D'autre part, d'après la forme explicite précédente, toute martingale bornée admet une version cad.31 que nous choisirons désormais. C'est la propriété sous-jacente au paragraphe II.

II. PROJECTIONS DROITES ET DUALES

La projection prévisible droite d'un processus mesurable et la projection d'un processus croissant adapté relativement à la filtration $\underline{\underline{F}}$, sont construites dans (9) et (15) à partir de projections successives sur les filtrations $\underline{\underline{F}}^1$ et $\underline{\underline{F}}^2$. Cette méthode est particulièrement efficace si les opérations de projection sur $\underline{\underline{F}}^1$ et $\underline{\underline{F}}^2$ commutent, c'est-à-dire si $\underline{\underline{F}}$ vérifie F4. Une autre méthode, suggérée dans (9), et classique à un indice (4), fait appel à l'existence de versions c.à d.-l.à g. des martingales bornées. Avec F4, ces deux méthodes sont bien sûr équivalentes grâce aux résultats de (16). Ici, la forme explicite et très régulière des martingales permet de définir directement les projections droite et duale. Il ne reste plus ensuite qu'à établir les propriétés que l'on attend d'eux et qu'ils sont les seuls dans ce cas. C'est-à-dire que le problème le plus difficile, celui de l'existence, (9), (15), est ici évité. On construit de même, les projections optionnelles droite et duale.

Si U est une v.a. de $(\Omega,\underline{\underline{A}})$ bornée, il est naturel de choisir comme projection optionnelle (resp. prévisible) du processus associé, la version c.à d. 31, M définie à la fin du I, de la martingale $E(U/\underline{\underline{F}}_z)$ (resp. la version c.à g., M^- définie par une formule analogue, du processus $E(U/\underline{\underline{F}}_{z}-)$. Plus généralement, on pose :

<u>DEFINITION 3</u> : *Si $X_z = X(Z,z)$ est un processus mesurable borné sur $(\Omega,\underline{\underline{A}},\mathbb{P})$, on appelle projection optionnelle (resp. prévisible), le processus X^o (resp. X^p) optionnel (resp. prévisible) défini par :*

$$X_z^o = X(Z,z)I(z>Z) + \mathbb{P}(z \not> Z)^{-1} E(X(Z,z)I(z \not> Z)).I(z \not> Z)$$

(resp. $X_z^p = X(Z,z)I(z>>Z) + \mathbb{P}(z \not\gg Z)^{-1} E(X(Z,z)I(z \not\gg Z)).I(z \not\gg Z)$*).*

Par un simple calcul, on vérifie que si X est déjà optionnel (resp. prévisible), il coïncide avec sa projection optionnelle (resp. prévisible) et que l'opération ainsi définie possède toutes les propriété de linéarité, monotonie et continuité que l'on peut attendre d'une projection. On définit une projection dans l'ensemble des processus croissants par dualité. Pour celà, on rappelle ((9), (15)) qu'à tout processus A, croissant et intégrable, est associée une mesure de Doléans, $\mathbb{M}^A$, sur $(\Omega \times \mathbb{R}_+^2, \underline{\underline{A}} \otimes \underline{\underline{B}})$ qui néglige les ensembles évanescents et qui est définie par :

$$\mathbb{M}^A(X) = E \int_{\mathbb{R}_+^2} X_z dA_z \quad \forall \text{ X processus mesurable borné.}$$

De plus, la correspondance entre $\mathbb{M}^A$ et A est biunivoque. (la démonstration est analogue à celle du cas à un indice (4) et ne fait pas intervenir la filtration $\underline{\underline{F}}$ et donc pas F4).

<u>THEOREME-DEFINITION 4</u> : *Etant donné un processus croissant intégrable A, il existe un unique processus croissant adapté ^oA (resp. prévisible ^pA) tel que :*

$$\forall \text{ X borné } \mathbb{M}^A(X^o) = \mathbb{M}^{\,{}^oA}(X) \quad (\text{resp. } \mathbb{M}^A(X^p) = \mathbb{M}^{\,{}^pA}(X)).$$

et on l'appelle projection duale optionnelle (resp. prévisible).

<u>DEMONSTRATION</u> : On se restreint au cas optionnel, l'autre étant analogue. Grâce aux propriétés de linéarité, monotonie et continuité de la projection optionnelle, la fonction d'ensemble μ, définie par $\mu(X) = \mathbb{M}^A(X^o)$, est une mesure sur $\Omega \times \mathbb{R}_+^2$ qui néglige les évanescents. Il lui correspond donc un processus croissant

intégrable unique $°A$, tel que $\mu(x) = \mathbb{M}^{°A}(X)$. Pour s'assurer que $°A$ est adapté, il suffit de montrer que pour toute martingale bornée M, on a :

$$E((M_\infty - M_Z).°A_Z) = 0 \ \forall \ z \in \mathbb{R}^2_+.$$

Or : $E(M_\infty °A_Z) = \mathbb{M}^{°A}(M_\infty \ I(R_Z)) = \mathbb{M}^{A}(MI(R_Z))$.

Si on définit le processus N^Z par $N^Z_x = M_Z I(X \in R_Z)$, $x \in \mathbb{R}^2_+$, alors :

$(N^Z I(R_Z))° = MI(R_Z)$ et donc :

$$E(M_\infty °A_Z) = \mathbb{M}^A((N^Z I(R_Z))°) = \mathbb{M}^{°A}(N^Z I(R_Z)) = E(M_Z °A_Z).$$

Cette définition ne fait appel qu'à des raisonnements de dualité. Pour rendre la dénomination de projection consistante, le résultat suivant est indispensable :

<u>PROPOSITION 5</u> : *Si $X°$ (resp. X^p) est la projection optionnelle (resp. prévisible) d'un processus X mesurable borné, alors pour tout processus croissant, A, adapté (resp. prévisible) et intégrable, on a :*

$$\mathbb{M}^A(X°) = \mathbb{M}^A(X) \quad (\textit{resp. } \mathbb{M}^A(X^p) = \mathbb{M}^A(X)).$$

De plus, si A est un processus croissant adapté (resp. prévisible) il est indistinguable de sa projection duale optionnelle (resp. prévisible).

<u>DEMONSTRATION</u> : Soient $X_Z = X(Z,z)$ un processus mesurable et $A_Z = H(Z,[Z,z])\ I(z>Z) + \int_{R_Z} I(x \not> Z)h(dx)$ un processus croissant adapté. Alors, comme h est non aléatoire,

$$\mathbb{M}^A(X) = E\int_{\mathbb{R}^2_+} X_Z I(z>Z)dA_Z + \int_{\mathbb{R}^2_+} E(X_Z I(z \not> Z))h(dz)$$

Or d'après la définition 3 :

$X_Z I(z>Z) = X^°_Z I(z>Z)$ et $E[X_Z I(z\not>Z)]\ I(z\not>Z) = X^°_Z \mathbb{P}(z\not>Z) I(z\not>Z)$ partout.

Si A est un processus croissant adapté, alors : $\mathbb{M}^A(X) = \mathbb{M}^A(X^\circ)$ et par définition, c'est aussi $\mathbb{M}^{{}^\circ A}(X)$. Par unicité, A et °A sont indistinguables . Le cas prévisible est analogue.

Finalement, on établit le résultat d'unicité suivant, nécessaire au paragraphe III.

PROPOSITION 6 : *Si X est un processus mesurable borné, X°, (resp. X^p) est l'unique processus optionnel (resp. prévisible) qui satisfait à la proposition 5.*

Si A est un processus croissant adapté et intégrable, sa projection duale prévisible ^pA est l'unique processus croissant prévisible, tel que $A-{}^pA$ soit une martingale faible.

DEMONSTRATION : Un processus mesurable borné X étant donné, on suppose qu'il existe Y optionnel tel que pour tout processus croissant adapté intégrable, on ait : $\mathbb{M}^A(X) = \mathbb{M}^A(Y)$. D'autre part, $\mathbb{M}^A(X) = \mathbb{M}^A(X^\circ)$. Soit C l'ensemble aléatoire, $C = \{Y>X^\circ\}$. D'après le théorème de section sans filtration (4), il existe une v.a. mesurable Q à valeurs dans $\mathbb{R}_+^2 \cup \{\infty\}$, telle que $\{(\omega,z) : z = Q(\omega)$ et $z<<\infty\}$ est contenu dans C et $\mathbb{P}(Q<<\infty) = \mathbb{P}$ (projection de C). On définit un processus croissant mesurable par $B_z = I(z>Q)$. On a alors :

$\mathbb{M}^{{}^\circ B}(X^\circ) = \mathbb{M}^{{}^\circ B}(Y) = \mathbb{M}^{{}^\circ B}(X)$ par hypothèse ; et $\mathbb{M}^{{}^\circ B}(Y) = \mathbb{M}^B(Y)$ et

$\mathbb{M}^{{}^\circ B}(X^\circ) = \mathbb{M}^B(X^\circ)$ d'après la proposition 5. On en déduit :

$$E(Y_Q I(Q<<\infty)) = \mathbb{M}^B(Y) = \mathbb{M}^B(X^\circ) = E(X_Q^\circ I(Q<<\infty)).$$

Ce qui est impossible sauf si $Q = \infty$ p.s. c'est-à-dire C évanescent. On montrerait de même que $\{Y<X^\circ\}$ est évanescent, donc X et Y sont indistinguables. Le cas prévisible se traite de même. Pour la deuxième partie de la proposition : $A-{}^pA$ est, par construction, un processus c.à.d. 31. adapté tel que la mesure $\mathbb{M}^{A-{}^pA}$ ne charge pas la tribu prévisible. Il en résulte (15,11) que $A-{}^pA$ est une martingale faible. L'unicité se déduit de ce qui précède.

III. REPRESENTATION DES MARTINGALES

On considère des martingales sur $(\Omega,\underline{\underline{A}},\underline{\underline{F}},\mathbb{P})$ centrées, et pour plus de simplicité bornées ; on établit, comme dans (8), des formules de représentation par des intégrales stochastiques. Celles-ci sont différentes de celles de (12) dans la mesure où les filtrations considérées ne sont pas identiques. D'après I, si M est une martingale bornée et centrée :

(3.1) $M_{st} = H(S,T)I(s\geq S,\ t\geq T) - h(s,t)I(s<S \text{ ou } t<T)$

avec h(z) définie, sur $\mathbb{R}_+^2$, par :

(3.2) $h(z) = (1 - F(z))^{-1} \int_{R_z} H(y)\ F(dy)$ si $F(z) < 1$

et $h(z) = 0$ si $F(z) = 1$

et avec H choisie borélienne bornée telle que :

$$\int_{R_{z_0}} H(z)\ F(dz) = 0.$$

Le caractère particulièrement simple de l'espace $(\Omega,\underline{\underline{A}},\underline{\underline{F}},\mathbb{P})$ permet de calculer explicitement diverses projections duales prévisibles de processus croissants élémentaires. De plus, une analogie évidente avec les problèmes de filtrage (6,11) conduit à chercher une représentation des martingales en fonction des processus "d'innovation" c'est-à-dire les compensés prévisible, 1- et 2- prévisible du processus croissant $I(z>Z)$. On définit donc les mesures suivantes :

(3.3) $\nu^\circ(du,dv) = \varepsilon_{ST}(du,dv) - I(u\leq S \text{ ou } v\leq T)(1 - F(u-,v-))^{-1}\ F(du,dv)$

(3.4) $\nu^1(t;du,dv) = \varepsilon_{ST}(du,dv) - I(u\leq S \text{ ou } t<T)(1-F(u-,t))^{-1}\ F(du,dv)$

(3.5) $\nu^2(s;da,db) = \varepsilon_{ST}(da,db) - I(s<S \text{ ou } b\leq T)(1-F(s,b-))^{-1}\ F(da,db).$

La proposition suivante montre que ces mesures ont un caractère de martingales faibles.

<u>PROPOSITION 7</u> : *Pour toutes fonctions boréliennes bornées non aléatoires, $k(u,v)$, $f(t;u,v)$, $\tilde{f}(s;a,b)$, $g(a,b;u,v)$, $\tilde{g}(a,b;u,v)$, les intégrales M^i, $i = 0,1,2$ et N^j, $j = 1,2$, ci-dessous, ont bien un sens :*

$$M^o_{st} = \int_{R_{st}} k(u,v)\ \nu^o(du,dv)$$

$$M^1_{st} = \int_{R_{st}} f(t;u,v)\ \nu^1(t;du,dv),\quad M^2_{st} = \int_{R_{st}} \tilde{f}(s;a,b)\ \nu^2(s;da,db)$$

$$N^1_{st} = \int_{]o,s]\times]o,t]\times[a,s]\times]o,b[} g(a,b;u,v)\ \nu^1(b-;du,dv)\ F(da,db)$$

$$N^2_{st} = \int_{]o,s]\times]o,t]\times]o,u[\times[v,t]} \tilde{g}(a,b;u,v)\ \nu^2(u-;da,db)\ F(du,dv)$$

De plus, $M^1_{.t}$ et $M^2_{s.}$ sont, respectivement, des $\underline{\underline{F}}_{.t}$ et $\underline{\underline{F}}_{s.}$ martingales (à un indice) et M^o, N^1, N^2 sont des martingales faibles.

<u>DEMONSTRATION</u> : On examine par exemple le cas de M^1, et on est amené à moduler les calculs selon les 5 configurations de F énoncées au paragraphe I. Tout d'abord, comme $F(dz)$ et $\varepsilon_Z(dz)$ ne chargent que R_{Z_o}, il suffit d'étudier l'intégrale sur ce domaine. Dans les cas 1), 2) et 3), le terme $I(u\leq S \text{ ou } t<T)(1 - F(u-,t))^{-1}$ est borné, sur tout rectangle $R_{st} \subset R_{s_ot_o}$, par $(1 - F(s-,t))^{-1}$ fini. Dans les cas 4) et 5), $\mathbb{P}[S<s_o] = 1$ et le terme en question est uniformément majoré par $(1 - F(S,t_o))^{-1}$ qui est p.s. fini. L'intégrale définissant M^1 a donc bien un sens sur $\mathbb{R}^2_+$, p.s.. On vérifie ensuite que M^1_{st} est, pour t fixé, $\underline{\underline{F}}_{st}$ - mesurable et $\mathbb{P}$- intégrable. On établit enfin la propriété de martingale en prouvant, comme dans (7,8), que

$$E\left[(X(S,T)I(s\geq S,t\geq T) + I(s<S \text{ ou } t<T))\ (M^1_{s't} - M^1_{st})\right] = 0 \quad \forall\ s'>s$$

pour X non aléatoire quelconque.
Le calcul est analogue pour M^2, ainsi que pour les martingales faibles N^j en remplaçant l'accroissement du processus par sa variation sur tout rectangle.

Les formules de représentation des martingales se déduisent, comme dans le cas à un indice, des diverses représentations intégrales de h sur un domaine de $\mathbb{R}_+^2$. Il faut considérer séparément les 5 cas énoncés au I (au lieu des 3 de (8)) pour cela:

<u>LEMME 8</u> : *Sur le domaine $\{s<s_0$ ou $t<t_0\}$, la fonction h admet les représentations intégrales suivantes :*

$$(3.6)\quad h(s,t) = \int_{R_{st}} \left[H(u,v) + h(u,t)\right]\left[1 - F(u-,t)\right]^{-1} F(du,dv)$$

$$(3.7)\quad h(s,t) = \int_{R_{st}} \left[H(a,b) + h(s,b)\right]\left[1 - F(s,b-)\right]^{-1} F(da,db)$$

$$(3.8)\quad h(s,t) = \int_{R_{st}} \left[H(u,v) + h(u,v)\right]\left[1 - F(u-,v-)\right]^{-1} F(du,dv)$$

$$+ \int_{]0,s]\times]0,t]\times[a,s]\times]0,b[} \left[H(a,b) + h(u,b)\right]\left[1 - F(u-,b-)\right]^{-1}\left[1 - F(u,b-)\right]^{-1} F(du,dv)\, F(da,db)$$

$$+ \int_{]0,s]\times]0,t]\times]0,u[\times[v,t]} \left[H(u,v) + h(u,b)\right]\left[1 - F(u-,b-)\right]^{-1}\left[1 - F(u-,b)\right]^{-1} F(da,db)\, F(du,dv)$$

<u>DEMONSTRATION</u> : Sur $\{s<s_0$ ou $t<t_0\}$, les seconds membres de (3.6), (3.7) et (3.8) sont bien définis. En effet $F(s,t) < 1$ et donc toutes les fonctions H, h, $(1 - F)^{-1}$ sont bornées sur R_{st}. Les formules (3.6) et (3.7) s'obtiennent par intégration par parties de (3.2) respectivement en t et s fixés. La formule (3.8) se déduit alors de (3.6) et (3.7) par une nouvelle intégration par parties.

Pour énoncer le théorème de représentation des martingales, on rappelle au préalable que D désigne un domaine de $\mathbb{R}_+^2$ variable selon la configuration de F autour de z_0 : Dans le cas 1) (resp. 2), 3), 4), 5)), on a :

$D = \mathbb{R}_+^2$ (resp. $]0,s_0] \times]0,t_0]$, $]0,s_0] \times]0,t_0[$, $]0,s_0[\times]0,t_0]$ $]0,s_0[\times]0,t_0[$) et on note $\hat{D}$ l' "ombre" de D dans $\mathbb{R}_+^4$, i.e. $\hat{D} = \{(u,v;a,b) \in \mathbb{R}_+^4 : (\sup(u,a), \sup(v,b)) \in D\}$.

<u>THEOREME 9</u> : *Pour toute $(\Omega, \underline{F}, \mathbb{P})$- martingale bornée centrée, M, il existe une fonction borélienne bornée H telle que* $\int_{R_{z_0}} H(z)\, F(dz) = 0$ *et une fonction borélienne h définie par (3.2), telles que l'on ait les représentations horizontale, verticale et diagonale suivantes :*

$$(3.9) \quad M_{st} = \int_{R_{st}} \left[H(u,v) + h(u,t)\right] \nu^1(t; du, dv)$$

$$(3.10) \quad M_{st} = \int_{R_{st}} \left[H(a,b) + h(s,b)\right] \nu^2(s; da, db)$$

$$(3.11) \quad M_{st} = \int_{]0,s] \times]0,t] \cap D} \left[H(u,v) + h(u,v)\right] \nu^0(du, dv)$$

$$+ \int_{]0,s] \times]0,t] \times [a,s] \times]0,b[\, \cap \hat{D}} \left[1 - F(u, b-)\right]^{-1} \left[H(a,b) + h(u,b)\right] \nu^1(b-; du, dv)\, F(da, db)$$

$$+ \int_{]0,s] \times]0,t] \times]0,u[\times [v,t] \, \cap \hat{D}} \left[1 - F(u-, b)\right]^{-1} \left[H(u,v) + h(u,b)\right] \nu^2(u-; da, db)\, F(du, dv)$$

avec ν^0, ν^1, ν^2 définies par (3.3), (3.4) et (3.5).

<u>DEMONSTRATION</u> : La démonstration des formules horizontale et verticale (3.9) et (3.10) est identique à celle de (8). Pour la représentation diagonale, on va établir l'égalité des expressions définies par les formules (3.1) et (3.11). Sur le domaine $\{s < s_0 \text{ ou } t < t_0\}$, le second membre de (3.11) est bien défini, comme au lemme 8 ; et en effectuant une intégration, on a :

$$M_{st} = \left[H(S,T) + h(S,T)\right] I(s \geq S, t \geq T) - \int_{R_{st}} \left[H(u,v) + h(u,v)\right] \left[1 - F(u, v-)\right]^{-1} I(u \leq S \text{ ou } v \leq T)\, F(du, dv)$$

$$+ I(s \geq S, t \geq T) \int_{]0,S] \times]T,t]} \left[H(a,b) + h(S,b)\right] \left[1 - F(S, b-)\right]^{-1} F(da, db)$$

$$- \int_{]0,s] \times]0,t] \times [a,s] \times]0,b[} I(u \leq S \text{ ou } b \leq T) \left[H(a,b) + h(u,b)\right] \left[1 - F(u-, b-)\right]^{-1} \left[1 - F(u, b-)\right]^{-1} F(du, dv)\, F(da, db)$$

$$+ I(s \geq S, t \geq T) \int_{]S,s] \times]0,T]} \left[H(u,v) + h(u,T)\right] \left[1 - F(u-, T)\right]^{-1} F(du, dv)$$

$$- \int_{]0,s] \times]0,t] \times]0,u[\times [v,t]} I(u \leq S \text{ ou } b \leq T) \left[H(u,v) + h(u,b)\right] \left[1 - F(u-, b-)\right]^{-1} \left[1 - F(u-, b)\right]^{-1} F(da, db)\, F(du, dv)$$

En utilisant systématiquement (3.6), (3.7) et (3.8), on obtient (3.1). Dans le cas 1), la démonstration est terminée ; dans les autres cas, il reste à en établir la validité au point(s_o,t_o). Dans le cas 3) (resp. 4), 5)), on a remarqué au paragraphe I que $M_{s_o t_o}$ est p.s. égal à $M_{s_o t_o^-}$ (resp. $M_{s_o^- t_o}$, $M_{s_o^- t_o^-}$). On en déduit que $M_{s_o t_o}$ est bien donné par la formule (3.11) où l'intégration est restreinte au domaine D (avec la convention classique à un indice, qu'une intégrale sur un domaine ouvert à droite, i.e. $]o,t[$, est la limite des intégrales prises sur des domaines fermés à droite croissant vers l'ouvert, i.e. $]0,t_n]$ avec $t_n \uparrow\uparrow t$). Dans le cas 2), il y a une probabilité non nulle que la martingale soit discontinue au point (s_o,t_o). Pour conclure, il suffit de vérifier que les processus définis par les formules (3.1) et (3.11) ont la même variation au point (s_o,t_o) :

$$\Delta M_{s_o t_o} = M_{s_o t_o} - M_{s_o^- t_o} - M_{s_o t_o^-} + M_{s_o^- t_o^-}$$

Pour le processus défini par la formule (3.1), on a :

$$\Delta M_{s_o t_o} = H(S,T)\ I(s_o = S, t_o = T) - h(s_{\bar o},t_{\bar o})\ I(S = s_o \text{ ou } T = t_o)$$
$$+ h(s_{\bar o},t_o)\ I(S = s_o) + h(s_o,t_{\bar o})\ I(T = t_o)$$

La variation du second membre de (3.11) est, quant à elle :

$$\Delta M_{s_o t_o} = H(s_o, t_o)\Delta\nu^o(s_o,t_o) + \int_{]o,s_o]\times]0,t_o[} H(a,t_o)\left[1-F(s_o,t_{\bar o})\right]^{-1}\nu^1(t_{\bar o};\{s_o\},dv)\ F(da,\{t_o\})$$
$$+ \int_{]o,s_o[\times]o,t_o]} H(s_o,v)\ \left[1-F(s_{\bar o},t_o)\right]^{-1}\ \nu^2(s_{\bar o};da,\{t_o\})\ F(\{s_o\},dv).$$

En utilisant la définition de h et la relation $\int_{]o,s_o]\times]0,t_o]} H(u,v)\ F(du,dv) = 0$ on montre que ces deux expressions sont égales.