SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

THIERRY JEULIN

Sur la convergence absolue de certaines intégrales

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 16 (1982), p. 248-256
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1982__16__248_0>

SUR LA CONVERGENCE ABSOLUE DE CERTAINES INTEGRALES

T. JEULIN (*)

On cherche à donner des conditions nécessaires (et, si possible, suffisantes) pour que certaines intégrales soient absolument convergentes ; les critères énoncés découlent de propriétés élémentaires des réarrangements. J'espère que cette note démystifiera la démonstration d'un résultat sur le même sujet, établi antérieurement (voir [2], page 44), tout en le complétant.

I - SUR LES REARRANGEMENTS DE VARIABLES ALEATOIRES.

La donnée de base est un espace probabilisé complet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et notre point de départ est le résultat élémentaire suivant :

Lemme 1 : Soit X une variable aléatoire positive ; on note $F_X(u) = \mathbb{P}[X \leq u]$ la fonction de répartition de X ; f_X est le réarrangement croissant de X $(f_X(u) = \inf(v \mid F_X(v) \geq u)$; $0 \leq u \leq 1)$; enfin $\Phi_X(x) = \int_0^\infty du(x - F_X(u))_+$ $(0 \leq x \leq 1$; $y_+ = \sup(y,0))$.

a) Munissons $[0,1]$ de la mesure de Lebesgue λ ; la loi de f_X sous λ est la loi de X.

b) Φ_X est convexe, continue sur $[0,1]$, strictement positive sur $]F_X(0),1]$; $\Phi_X(0) = 0$, $\Phi_X(1) = \mathbf{E}[X]$. En outre $\Phi_X(x) = \int_0^x f_X(u)du$ et pour tout A de $\mathcal{F}$,

$$(*) \qquad E[X\,;A] \geq \Phi_X o \mathbb{P}[A].$$

c) Soit G une fonction croissante positive sur $\mathbb{R}_+$; on a

$\Phi_{G(X)}(x) = \int_0^x G o f_X(u)du$; en particulier, $\Phi_1(x) = x$ et pour $c > 0$ $\Phi_{cX} = c\Phi_X$.

(*) UNIVERSITE PARIS VI - Laboratoire de Probabilités - 4 place Jussieu - Tour 56
3ème Etage - 75005 PARIS CEDEX

En outre si Y est une variable aléatoire vérifiant $Y \geq X$, on a $\Phi_Y \geq \Phi_X$; pour toute suite de variables positives (X_n), $\liminf_{n\to\infty} \Phi_{X_n} \geq \Phi_U$ si $U = \liminf_{n\to\infty} X_n$.

Remarque : Supposons X intégrable et notons g_X le réarrangement décroissant de X : $g_X(u) = \sup(v \mid \mathbb{P}[X > v] \geq u)$ $(\sup \emptyset = 0)$; appliquons l'inégalité (*) à A^c ; comme $g_X(u) = f_X(1-u)$ λ p.s., on retrouve l'inégalité bien connu :

$$\mathbb{E}[X ; A] \leq \int_0^{\mathbb{P}[A]} g_X(u)\,du.$$

Démonstration :

a) Traduit la formule de changement de variable : pour h borélienne bornée),

$$\mathbb{E}[h(X)] = \int_{[0,\infty[} h(x)\,dF_X(x) = \int_0^1 h \circ f_X(u)\,du.$$

b) Etablissons (*), le reste est encore plus facile ! Pour A et B dans $\mathcal{A}$, on a trivialement $\mathbb{P}[A \cap B] \geq (\mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] - 1)_+ = (\mathbb{P}[A] - \mathbb{P}[B^c])_+$.

Ainsi, par application du théorème de Fubini,

$$\mathbb{E}[X ; A] = \int_0^\infty \mathbb{P}[A ; u < X]\,du \geq \int_0^\infty (\mathbb{P}[A] - F_X(u))_+\,du = \Phi_X \circ \mathbb{P}[A].$$

c) $$\liminf_{n\to\infty} \Phi_{X_n}(x) \geq \int_0^\infty \liminf_{n\to\infty} (x - \mathbb{P}[X_n \leq u])_+\,du \geq \Phi_U(x)$$

Conservons les notations du lemme 1 et notons un autre résultat élémentaire :

Lemme 2 : Soit G une fonction croissante sur $\mathbb{R}_+$, avec $G(0) \geq 0$ et $G(x) > 0$ pour $x > 0$; notons γ son inverse continu à gauche et, pour $a > 0$, $g(a) = \liminf_{t\to+\infty} \frac{G(t-a)}{G(t)}$.

Soit Y une variable aléatoire réelle ; notons $T_Y(u) = \sup_{z\in\mathbb{R}} \mathbb{P}[|Y - z| \leq u]$.

a) pour tout réel z, $\Phi_{G(|Y-z|)}(x) \geq \int_0^\infty (x - T_Y \circ \gamma(u))_+\,du$.

b) Supposons la loi de Y diffuse et $\mathbb{P}[g(Y) = 0] = 0$; alors

$\phi(G,Y,x) = \inf_{z\in\mathbb{R}} \dfrac{\Phi_{G(|Y-z|)}(x)}{1 + G(|z|)}$ est strictement positif sur $]0,1]$ et pour $A \in \mathcal{A}$

et $z \in \mathbb{R}$,

$$E[G(|Y-z|) \; ; \; A] \geq (1 + G(|z|) \; \phi(G,Y,\mathbb{P}[A]).$$

Remarques : 1) P. Lévy désigne T_Y comme "fonction de concentration" de Y

2) si G est croissante modérée (i.e. $\delta = \sup_{x>0} \dfrac{G(2x)}{G(x)}$ est fini),

on a $g(a) \geq \frac{1}{\delta} > 0$ et $G(x+y) \leq \delta(G(x) + G(y))$.

Démonstration :

a) $$\Phi_{G(|Y-z|)}(x) = \int_0^\infty (x - \mathbb{P}[G(|Y-z|) \leq u])_+ du$$

$$= \int_0^\infty (x - \mathbb{P}[|Y-z| \leq \gamma(u)])_+ du \geq \int_0^\infty (x - T_Y o\gamma(u))_+ du$$

b) Remarquons que $G(x) > 0$ pour $x > 0$ implique : $\lim_{u\to 0_+} \gamma(u) = 0$; puisque la loi de Y est diffuse, T_Y est continue et $T_Y(0) = 0$; par suite, pour tout $x > 0$, $\int_0^\infty (x - T_Y o\gamma(u))_+ du$ est strictement positif ; d'après a), on a donc : $\inf_z \Phi_{G(|Y-z|)}(x) > 0$ pour tout $x > 0$.

En outre, d'après le lemme 1-c), avec $U_z = \dfrac{G(||z|-|Y||)}{G(|z|)}$ et $U = \liminf_{|z|\to\infty} U_z$,

on a : $\liminf_{|z|\to\infty} \dfrac{\Phi_{G(|Y-z|)}(x)}{1 + G(|z|)} \geq \liminf_{|z|\to\infty} \Phi_{U_z}(x) \geq \Phi_U(x)$ or $U = g(|Y|)$ et la condition $\mathbb{P}[g(|Y|) = 0] = 0$ donne $\mathbb{P}[U = 0] = 0$, soit $\Phi_U(x) > 0$ pour tout x.

II - REARRANGEMENTS DE PROCESSUS.

On suppose donnée sur $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ vérifiant les conditions habituelles. Soit R un processus mesurable positif fini ; on peut construire une famille $(r_\bullet(u), u\in\mathbb{R}_+)$ de processus optionnels, telle que :

i) pour tout $t \geq 0$ $u \to r_t(u)$ est croissante, continue à droite, majorée par 1 ;

ii) pour tout u, $r_\bullet(u)$ est une version de la projection optionnelle de $1_{\{R\leq u\}}$.

Notons $\rho_t(v) = \inf(u \mid r_t(u) \geq v)$ $(0 \leq v \leq 1$; la famille de processus optionnels $(\rho_\bullet(v)$; $0 \leq v \leq 1)$ est le réarrangement optionnel croissant de R : pour tout $t \geq 0$ $v \to \rho_t(v)$ est croissant, continu à gauche, et pour toute fonction borélienne bornée h sur $\mathbb{R}_+$, le processus optionnel $\int_0^1 h\circ\rho_\bullet(v)dv$ est une version de la projection optionnelle ${}^o(h(R))$ de $h(R)$.

Soit $A \in \mathcal{A}$ et $a_\bullet$ la version càd làg de la martingale $a_t = \mathbb{P}[A|\mathcal{F}_t]$; avec une démonstration analogue à celle du lemme 1, on a :

$$(**)\qquad {}^o(1_A R)_t \geq \int_0^\infty du(a_t - r_t(u))_+ = \int_0^{a_t} \rho_t(v)dv = \Phi_R(a_t).$$

(Remarquons que l'on peut naturellement remplacer les projections optionnelles par des projections prévisibles).

Si on se donne en plus de R un processus croissant optionnel C, on a, d'après ce qui précède, pour $A \in \mathcal{A}$:

$$\mathbb{E}\Big[\int_0^\infty R_t dC_t ; A\Big] = \mathbb{E}\Big[\int_0^\infty {}^o(1_A R)_t dC_t\Big] \geq \mathbb{E}\Big[\int_0^\infty\Big(\int_0^{a_t} \rho_t(v)dv\Big)dC_t\Big]$$

$$\geq \mathbb{E}\Big[\int_0^{a_*} dv \int_0^\infty \rho_t(v)dC_t\Big],$$

si $a_* = \inf_s a_s$; notons que $\{a_* > 0\}$ contient A (et lui est égal si A appartient à $\mathcal{F}_\infty$).

Prenons en particulier : $A_n = \{\int_0^\infty R_t dC_t \leq n\}$, $a^{(n)} = {}^o(1_{A_n})$;

$$n\,\mathbb{P}[A_n] \geq \mathbb{E}\Big[\int_0^\infty R_t dC_t \ ; A_n\Big] \geq \int_0^1 dv\, \mathbb{E}\Big[\int_0^\infty \rho_t(v) dC_t \ ; v \leq a_*^{(n)}\Big].$$

Pour $0 < x < 1$, $\{\int_0^\infty \rho_t(x) dC_t < +\infty\}$ contient $\{x < a_*^{(n)}\}$; lorsque n tend vers l'infini, on obtient :

Lemme 3 : Soit $A = \{\int_0^\infty R_t dC_t < +\infty\}$, $a_* = \inf_s a_s$; pour tout x de $]0,1[$, $\int_0^\infty \rho_t(x) dC_t$ est fini sur $\{x < a_*\}$.

Remarques :

- on a aussi la propriété (plus faible) : $\int_0^\infty \Phi_R(x) dC_t$ est fini sur $\{x < a_*\}$.

- la même conclusion subsiste si on remplace C par un processus croissant optionnel formel au sens de L. Schwartz.

III - APPLICATIONS.

1) Le premier exemple est tiré de [2] : le processus R est "indépendant" de la filtration $(\mathcal{F}_t)$ au sens suivant : il existe une mesure μ sur $\mathbb{R}_+$ telle que, pour toute fonction borélienne positive h sur $\mathbb{R}_+$

$${}^o(h(R)) = \int_{\mathbb{R}_+} h(x)\ \mu(dx).$$

On peut prendre $\rho(v) = \inf(u) \mid \mu([0,u] \geq v)$ et on a :

$$\int_0^\infty \rho_t(x) dC_t = \rho(x) \int_0^\infty dC_t \quad (0\cdot\infty = 0).$$

Par suite :

a) si $\mu(\{0\}) = 0$, $\{\int_0^\infty dC_t < +\infty\}$ contient $\{\int_0^\infty R_t dC_t < +\infty\}$; si de plus $\int x\, d\mu(x)$ est fini, les deux ensembles sont égaux, d'après le "théorème de Borel - Cantelli" de P. Lévy.

b) si $\mu(\{0\}) < 1$ et $\mathbb{P}\left[\int_0^\infty R_t dC_t < +\infty\right] = 1$, $\int_0^\infty dC_t$ est p.s. fini.

c) soit $y > 0$ et $T = \inf(t, a_t \leq y)$; d'après le théorème d'arrêt,

$$\mathbb{P}[A] = \mathbb{E}[a_T] = y\,\mathbb{P}[a_* \leq y] + \mathbb{P}[A\ ;\ a_* > y] \leq y + (1-y)\,\mathbb{P}[a_* > y].$$

On a donc en général :

$$\mathbb{P}\left[\int_0^\infty R_t dC_t < +\infty\right] \leq \mu(\{0\}) + \mu(]0,\infty[)\ \mathbb{P}\left[\int_0^\infty dC_t < +\infty\right].$$

2) Prenons maintenant $R_t = G(|\overline{R}_t - V_t|)$, où

- V est un processus optionnel ;

- G est croissante positive sur $\mathbb{R}_+$, strictement positive sur $]0,\infty[$ et telle que $g(a) = \liminf_{t\to+\infty} \frac{G(t-a)}{G(t)}$ soit strictement positive $(a \geq 0)$;

- $\overline{R}$ est un processus mesurable "indépendant" de la filtration $\mathcal{F}_t$:

${}^o(h(\overline{R})) = \int h(y)\,\mu(dy)$ pour toute fonction h borélienne bornée sur $\mathbb{R}$, avec μ probabilité diffuse sur $\mathbb{R}$.

En appliquant le lemme 2, on a : $\Phi_R(x) \geq \phi(x)\ (1 + G(|V|))$, où ϕ est une fonction (déterministe) strictement positive sur $]0,1]$.

$\{\int_0^\infty G(|\overline{R}_s - V_s|)dC_s < +\infty\}$ est donc contenu dans $\{\int_0^\infty (1 + G(|V_s|))dC_s < +\infty\}$; si on suppose de plus G modérée et $\int G(|y|)\,\mu(dy) < +\infty$, les deux ensembles sont égaux.

3) Comme cas particulier des exemples précédents, prenons la filtration $\mathcal{F}_t$ constante : $\mathcal{F}_o$ est la tribu engendrée par les ensembles de mesure nulle de $\mathcal{A}$, $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_o$ pour tout t.

Soit X un processus sur $\mathbb{R}_+^*$, tel que X_t ait une loi indépendante de t et ν une mesure σ-finie sur R_+^* ; alors :

- si $\nu(\mathbb{R}_+^*)$ est infini, $\mathbb{P}\left[\int_{\mathbb{R}_+^*} |X_t|\nu(dt) < +\infty\right]$ est majoré par $\mathbb{P}[X_1 = 0]$;

- si $\mathbb{P}[X_1 = 0] < 1$ et $\mathbb{P}\left[\int_{\mathbb{R}_+^*} |X_t|\nu(dt) < +\infty\right] > 0$, on a nécessairement $\nu(\mathbb{R}_+^*) < +\infty$;

- supposons la loi de X_1 diffuse ; pour toute fonction mesurable b et toute croissante modérée G telle que $\mathbb{E}[G(|X_1|)]$ soit fini,

$P\left[\int_{\mathbb{R}_+^*} G(|X_t - b(t)|)\ \nu(dt) < +\infty\right]$ vaut 1 ou 0 selon que $\int_{\mathbb{R}_+^*} (1 + G\circ|b|)d\nu$ est fini ou non.

On peut ainsi énoncer la

Proposition 4 : <u>Soit</u> X <u>un processus mesurable tel que</u> X_t <u>ait une loi indépendante de</u> t <u>et diffuse,</u> b <u>et</u> c <u>deux fonctions boréliennes sur</u> $\mathbb{R}_+$ <u>et</u> ν <u>une mesure positive</u> σ-<u>finie sur</u> $\mathbb{R}_+^*$. <u>Notons</u> $Y_t = b(t)\, X_t + c(t)$.

a) <u>Pour tout réel</u> $\alpha > 0$ <u>tel que</u> $E\left[|X_1|^\alpha\right]$ <u>soit fini,</u> $\mathbb{P}\left[\int |Y_t|^\alpha \nu(dt) < +\infty\right]$ <u>vaut</u> 1 <u>ou</u> 0 <u>selon que</u> $\int (|b| + |c|)^\alpha d\nu$ <u>est fini ou non</u>.

b) <u>La même conclusion subsiste pour</u> $-1 < \alpha < 0$ <u>lorsque la loi de</u> $|X_1|$ <u>a une densité</u> g <u>à variation finie sur</u> $\mathbb{R}_+^*$ <u>vérifiant</u> $\int_{\mathbb{R}_+^*} (1 + y^\alpha)\ y|dg(y)| < +\infty$.

c) <u>Si</u> $\int (|b| + |c|)^\alpha d\nu$ <u>est infini, on a toujours</u> $\mathbb{P}\left[\int |Y_t|^\alpha \nu(dt) < +\infty\right] = 0$.

<u>Démonstration</u> : Le cas $\alpha \geq 0$ résulte immédiatement de ce qui précède ; regardons b) et c) et supposons : $\mathbb{P}\left[\int |Y_t|^\alpha \nu(dt) < +\infty\right] = x_o > 0$; on a alors :

$$x_o \leq \mathbb{P}\left[\int (|b(t)|\,|X_t| + |c(t)|)^\alpha\ \nu(dt) < +\infty\right].$$

Prenons $R_t = (|b(t)||X_t| + |c(t)|)^\alpha$; soit $H(y) = \mathbb{P}\left[|y| \leq |X_1|\right]$, K son inverse sur $]0,1[$; un calcul immédiat donne, pour $0 < v < 1$,

$$\rho_t(v) = (|b(t)|\ K(v) + |c(t)|)^\alpha$$

et le lemme 3 nous dit que, pour $0 < v < x_o$, $\int (|b(t)|\ K(v) + |c(t)|)^\alpha\ \nu(dt)$ est fini ; puisque $K(v)$ est fini, $\mathbb{P}\left[\int_0^\infty |Y_t|^\alpha\ \nu(dt) < +\infty\right] > 0$ impose donc $\int (|b| + |c|)^\alpha\ d\nu < +\infty$.

Pour achever la démonstration (de b)) il suffit de montrer qu'il existe deux constantes $0 < a < A < +\infty$, telles que, pour y et z réels, on ait :

$$a(|y| + |z|)^\alpha \leq \mathbf{E}\left[|y\ X_1 + z|^\alpha\right] \leq A(|y| + |z|)^\alpha.$$

Tout revient à étudier les deux fonctions (définies sur $\mathbb{R}_+^*$) :

$$f(z) = \mathbf{E}\left[(|X_1| + z)^\alpha\right] = \int_0^\infty (x + z)^\alpha\ g(x)dx$$

et :

$$\overline{f}(z) = \mathbf{E}\left[||X_1| - z|^\alpha\right] = \int_0^\infty |x-z|^\alpha\ g(x)dx \quad (= \int_0^\infty dg(t) \int_0^t |x-z|^\alpha\ dx).$$

Comme $\alpha > -1$, on montre aisément que f et $\overline{f}$ sont continues, tendent vers $\mathbf{E}\left[|X_1|^\alpha\right]$ (qui est fini) en 0, et sont équivalentes à z^α quand z tend vers $+\infty$.

Corollaire (cf. [3], *Théorème 3) :* Soit $\mathbb{Z}$ un processus gaussien et ν une mesure positive σ-finie sur $\mathbb{R}$; pour $\alpha > -1$, $\mathbb{P}\left[\int_{\mathbb{R}} |\mathbb{Z}_t|^\alpha\ \nu(dt) < +\infty\right]$ vaut 1 ou 0 selon que $\int_{\mathbb{R}} \{\mathbf{E}[\mathbb{Z}_t^2]\}^{\alpha/2}\ \nu(dt)$ est fini ou non.

Notons que les méthodes utilisées sont beaucoup trop grossières pour que l'on puisse améliorer le point c) de la proposition 4 ; les conditions données s'appliquent en effet aussi bien à $Y_t = b(t)X_t + c(t)$ qu'à $b(t)X_1 + c(t)$!

4) Un dernier exemple illustre ce fait : $(B_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien issu de 0 et $S_t = \sup_{s \leq t} X_s$; pour tout t, S_t et $|B_t|$ ont la même loi, celle de $\sqrt{t}\,|B_1|$. Or, pour tout $0 < a < b < +\infty$, et tout $c \geq 1$, $\mathbb{P}\left[\int_a^b \frac{dt}{S_t^c} < +\infty\right]$ vaut 1, tandis que $\mathbb{P}\left[\int_a^b \frac{dt}{|B_t|^c} < +\infty\right]$ est exactement la probabilité que B ne s'annule pas sur $[a,b]$ (et vaut donc $1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{Arctg} \sqrt{\frac{b}{a} - 1}$).

BIBLIOGRAPHIE :

[1] BLACKWELL D., DUBINS L.E. : A converse to the dominated convergence theorem. (Ill. J. of Math., t. 7, 1963, 508-514).

[2] JEULIN T. : Semi-martingales et grossissement d'une filtration. (L.N. in Math. 833, 1980, 44-45).

[3] VARBERG D.E. : Equivalent gaussian measures with a particularly simple Radon - Nikodym derivative. (Ann. Math. Stat. 38, 1967, 1027-1030).