Érik Lenglart

Sur le théorème de la convergence dominée

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 16 (1982), p. 314-318
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1982__16__314_0>

SUR LE THEOREME DE LA CONVERGENCE DOMINEE

E. Lenglart

Le théorème de la convergence dominée pour les intégrales stochastiques a deux versions, l'une concernant la convergence uniforme en probabilité sur tout compact : $(\phi^n - \phi)^*_T$ converge en probabilité vers 0 pour tout t.a. borné T ; et l'autre la convergence simple : ϕ^n converge simplement vers ϕ, ce qui équivaut d'ailleurs à ϕ^n_T converge p.s. vers ϕ, pour tout t.a. T borné. On peut montrer qu'à force de sous suites, la deuxième implique la première. Nous faisons remarquer ici qu'il en existe une troisième qui implique visiblement les deux premières! : c'est la convergence en probabilité pour tout t.a. borné T (prévisible). Au passage, nous démontrerons également un théorème de convergence dominée pour la convergence faible : ϕ^n_T converge faiblement (dans L^1) vers ϕ_T pour tout t.a. T borné (prévisible).

I CONVERGENCE FAIBLE DOMINEE.

Redémontrons un lemme qu'on trouve déjà dans " Convergence faible de processus d'après Mokobodzki" rédigé par P.A. Meyer [4]. Nous y faisons figurer une tribu de Meyer $\underline{\underline{A}}$ car le résultat est vraiment intéressant et mérite d'être énoncé, non seulement pour les optionnels sous les conditions habituelles, comme dans l'article précité, mais aussi pour les prévisibles, les optionnels sans conditions habituelles etc... Pour avoir un énoncé complet, nous l'avons rédigé sous la forme du théorème de Mokobodzki, mais la partie "existence d'une limite faible" n'e est qu'un corollaire évident.

Nous nous plaçons sur un espace de probabilité complet $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ et considérons une tribu de Meyer $\underline{\underline{A}}$ [2] incluse dans $\underline{\underline{B}}_{\mathbb{R}_+} \otimes \underline{\underline{F}}$. Nous noterons $f_n \xrightarrow{W} f$ pour f_n converge faiblement dans L^1 vers f.

THEOREME 1 (de Mokobodzki). <u>Soit</u> (ϕ^n) <u>une suite de processus</u> $\underline{\underline{A}}$<u>-mesurabl uniforméments bornés</u>. <u>On suppose que</u>,

pour tout t.a. T borné de $\underline{\underline{A}}$, $\phi^n_T \xrightarrow{W}$

<u>alors</u>

1°) <u>Il existe un processus</u> $\underline{\underline{A}}$<u>-mesurable</u> (<u>unique à l'indistinguabité près</u>) <u>tel que</u>, <u>pour tout t.a. borné</u> T <u>de</u> $\underline{\underline{A}}$, $\phi^n_T \xrightarrow{W} \phi_T$

2°) <u>On a de plus</u>: <u>si</u> B <u>est un processus croissant brût intégrable</u>

$$\int_0^\infty \phi^n_s dB_s \xrightarrow{W} \int_0^\infty \phi_s dB_s$$

DEMONSTRATION. D'abord, on voit sans difficulté qu'en fait, pour tout t.a. T de $\underline{\underline{A}}$, $\phi_T^n I_{\{T<\infty\}}$ converge faiblement dans L^1.

Montrons que si B est un processus croissant intégrable brût, $E[\int_0^\infty \phi_s^n dB_s]$ converge. Soit A la $\underline{\underline{A}}^P$-projection duale de B [2]: c'est un processus croissant $\underline{\underline{A}}^P$-mesurable intégrable ($\underline{\underline{A}}^P$ est la tribu engendrée par les processus càdlàg indistinguables de processus $\underline{\underline{A}}$-mesurables) et, ϕ^n étant $\underline{\underline{A}}$-mesurable, on a

$$E[\int_0^\infty \phi_s^n dB_s] = E[\int_0^\infty \phi_s^n dA_s]$$

Posons, pour tout s, $T_s = \inf\{t:\, A_t \geq s\}$. Les T_s sont des t.a. de $\underline{\underline{A}}^P$ et sont donc égaux p.s. à des t.a. de $\underline{\underline{A}}$ [2]. Par suite $E[\phi_{T_s}^n I_{\{T_s<\infty\}}]$ converge. On a alors

$$E[\int_0^\infty \phi_s^n dB_s] = E[\int_0^\infty \phi_s^n dA_s] = E[\int_0^\infty \phi_{T_s}^n I_{\{T_s<\infty\}} ds] = \int_0^\infty E[\phi_{T_s}^n I_{\{T_s<\infty\}}] ds \quad (1)$$

expression qui converge, d'après le théorème de Lebesgue et les remarques précédentes.

On voit alors que $\int_0^\infty \phi_s^n dB_s$ converge faiblement grâce à l'identité, valide pour tout $F \in \underline{\underline{F}}$:

$$E[\int_0^\infty \phi_s^n dB_s \;;\; F] = E[\int_0^\infty \phi_s^n \, d(I_F B_s)]$$

En particulier, si S est une v.a. positive, en considérant $B_t = I_{\{S \leq t\}}$, on voit que $\phi_S^n I_{\{S<\infty\}}$ converge faiblement. On est alors ramené au théorème de Mokobodzki: les ϕ^n sont mesurables et $\phi_S^n I_{\{S<\infty\}}$ converge faiblement pour toute v.a.$S \geq 0$. Il démontre alors qu'il existe ψ mesurable (borné) tel que, pour tout S, $\phi_S^n I_{\{S<\infty\}} \xrightarrow{W} \psi_S I_{\{S<\infty\}}$. Il suffit de prendre pour ϕ la $\underline{\underline{A}}$-projection de ψ pour démontrer le point 1°).*

Pour le 2°), il suffit de reprendre la démonstration à l'identité (1) et de remarquer que $E[\phi_{T_s}^n I_{\{T_s<\infty\}}]$ converge vers $E[\phi_{T_s} I_{\{T_s<\infty\}}]$. []

Nous allons maintenant améliorer le 2°) du théorème en remplaçant B par n'importe quelle semimartingale de $\underline{\underline{H}}^1$. Nous considérons une filtration $(\underline{\underline{F}}_t)$ satisfaisant aux conditions habituelles, formée de sous tribus de $\underline{\underline{F}}$. On appelle $\underline{\underline{H}}^0$ l'espace des semimartingales jusqu'à l'infini muni de la topologie de la convergence uniforme en probabilité sur la boule unité de l'espace des processus prévisibles. Si X est une semimartingale nous appelons $L^0(X)$ l'ensemble des processus ϕ prévisibles X-intégrables, c'est à dire tels que $\int \phi dX$ existe et appartienne à $\underline{\underline{H}}^0$.

* En fait ϕ et ψ sont indistinguables .

Si F est une fonction convexe modérée (ex: $F(x)=x^p, p\geq 1$), on appelle $\underline{\underline{H}}^F$ l'espace des semimartingales de $\underline{\underline{H}}^0$ telles que, pour tout processus prévisible borné Y, $\int_0^\infty Y_s dX_s$ appartienne à L^F, muni de la topologie de la convergence uniforme sur la boule unité de l'espace des prévisibles bornés, quand on identifie X à: $Y \longrightarrow \int_0^\infty Y_s dX_s \in L^F$. Une norme équivalente étant donnée par

$$\|X\|^F = \| [\overset{c}{X},\overset{c}{X}]_\infty^{1/2} + \int_0^\infty |d\tilde{X}_s| \|_F$$

On appelle $L^F(X)$ l'espace des processus prévisibles ϕ de $L^0(X)$ tels que $\int \phi dX$ appartienne à $\underline{\underline{H}}^F$.

THEOREME 2 (de la convergence faible dominée). <u>Soient</u> $(\phi^n)_n$, ϕ <u>et</u> ψ <u>des processus prévisibles tels que</u>, <u>pour tout t.a. prévisible borné</u> T <u>on ait</u>

$$\phi_T^n \xrightarrow{W} \phi_T \quad \text{et} \quad |\phi_T^n| \leq \psi_T \text{ p.s.}$$

<u>Soit</u> X <u>une semimartingale</u>. <u>Si</u> ψ <u>appartient à</u> $L^1(X)$ <u>alors</u>

1°) ϕ^n <u>et</u> ϕ <u>appartiennent à</u> $L^1(X)$

2°) $\int_0^\infty \phi_s^n dX_s$ <u>converge faiblement vers</u> $\int_0^\infty \phi_s dX_s$. (*)

DEMONSTRATION. On voit immédiatement que, pour tout t.a. T borné, on a $|\phi_T| \leq \psi_T$ p.s. et donc, d'après le théorème de section, on a $|\phi^n|$ et $|\phi|$ majorés par ψ, ce qui démontre le point 1°) (qui est alors bien connu). Montrons le 2°). On se ramène, en considérant $X' = \int \psi dX$, $\phi'_n = \phi^n/\psi \; I_{\{\psi>0\}}$ et $\phi' = \phi/\psi \; I_{\{\psi>0\}}$ au cas où X appartient à $\underline{\underline{H}}^1$ et les ϕ^n et ϕ sont bornés par 1. En considérant $\phi^n - \phi$, on est ramené au cas où $\phi = 0$.

On peut alors écrire $X = M+A$ où M est une martingale de $\underline{\underline{H}}^1$, nulle en 0 et A est un processus à variation totale intégrable. On a alors

$$E[\int_0^\infty \phi_s^n dX_s] = E[\int_0^\infty \phi_s^n \, dM_s] + E[\int_0^\infty \phi_s^n dA_s] = E[\int_0^\infty \phi_s^n dA_s]$$

car $\int \phi dM$ est une martingale de $\underline{\underline{H}}^1$ donc u.i. . On voit donc, d'après le théorème 1, que $E[\int_0^\infty \phi_s^n dX_s]$ converge vers 0. (2)

Soit maintenant F un ensemble mesurable, de probabilité >0 . Pour la probabilité $Q = P^F = P[\,.\cap F]/P[F]$, la semimartingale X est encore dans $\underline{\underline{H}}^1(Q)$, et les intégrales stochastiques par rapport à P et à Q coincident sur F. On a donc, d'après (2):

$$E_Q[\int_0^\infty \phi_s^n dX_s \,] \longrightarrow 0$$

soit $\quad E[\int_0^\infty \phi_s^n dX_s \, ; \, F] \longrightarrow 0 \qquad$ cqfd.

(*) On en déduit qu'aussi $\int_0^S \phi_s^n \, dX_s$ converge faiblement vers $\int_0^S \phi_s dX_s$ pour toute variable aléatoire positive S.

II. <u>CONVERGENCE EN PROBABILITE ET CONVERGENCE DOMINEE</u>.

Les notations restant celles du I, nous allons maintenant étudier la convergence en probabilité pour chaque temps d'arrêt prévisible borné.

THEOREME 3 (de la convergence en probabilité dominée). <u>Soient</u> (ϕ^n), ϕ <u>et</u> ψ <u>des processus prévisibles tels que, pour tout t.a. prévisible borné</u> T <u>on ait:</u>

$$\phi^n_T \xrightarrow{P} \phi_T \quad \text{et} \quad |\phi^n_T| \leqq \psi_T \quad \text{p.s.}$$

<u>Soit</u> X <u>une semimartingale</u>. <u>Si</u> ψ <u>appartient à</u> $L^0(X)$ (resp. $L^F(X)$) <u>alors</u>

1°) ϕ^n <u>et</u> ϕ <u>appartiennent à</u> $L^0(X)$ (resp. $L^F(X)$)

2°) $\int\phi^n dX \xrightarrow{\underline{\underline{H}}^0} \int\phi dX$ (resp. $\int\phi^n dX \xrightarrow{\underline{\underline{H}}^F} \int\phi dX$)

<u>En particulier</u> $\sup_t|\int_0^t(\phi^n_s-\phi_s)dX_s|$ <u>converge en probabilité</u> (resp. <u>dans</u> L^F) <u>vers</u> 0.

DEMONSTRATION. Le point 1°) s'obtient comme précédemment. Montrons le 2°). On se ramène encore au cas où ϕ^n est borné par 1, $\phi = 0$ et X appartient à $\underline{\underline{H}}^0$ (resp. $\underline{\underline{H}}^F$). Traitons d'abord le cas de L^F (F convexe modérée).

On peut écrire que $X = M+A$ avec M martingale de $\underline{\underline{H}}^F$ et A à variation totale dans L^F. Si B est un processus croissant intégrable, d'après le théorème 1, 2°),

$$\int_0^\infty|\phi^n_s|dB_s \quad \text{et} \quad \int_0^\infty(\phi^n_s)^2 dB_s$$

convergent faiblement vers 0 et donc dans L^1 (car $\geqq 0$), donc en probabilité.

Par suite, $(\int_0^\infty(\phi^n_s)^2 d[M,M]_s)^{1/2}$ converge en probabilité vers 0 en étant majoré par $[M,M]^{1/2}_\infty$ qui appartient à L^F; par convergence dominée il doit donc converger vers 0 dans L^F.

De même, $\int_0^\infty |\phi^n_s||dA_s|$ converge dans L^F vers 0, ce qui prouve que $\int\phi^n dX$ converge vers 0 dans $\underline{\underline{H}}^F$.

Pour $L^0(X)$, on peut le démontrer directement ou se ramener au cas précédent: on peut trouver une probabilité Q équivalente à P (à densité bornée) telle que X appartienne à $\underline{\underline{H}}^2(Q)$. D'après le résultat précédent appliqué à $F(x) = x^2$, $\int\phi^n dX$ converge vers 0 dans $\underline{\underline{H}}^2(Q)$, donc dans $H^0(Q)$ qui est égal à $\underline{\underline{H}}^0(P)$.

REMARQUES. Sous les hypothèses du théorème précédent, si ϕ appartient à $L^0(X)$, alors il existe une probabilité Q équivalente à P, à densité bornée, telle que ϕ appartienne à $\cap_p L^p(X,Q)$ [2] On a alors :

1°) ϕ^n et ϕ appartiennent à $\cap_F L^F(X,Q)$ $(=\cap_p L^p(X,Q))$

2°) $\forall F$ convexe modérée $\int \phi^n dX \xrightarrow{\underline{\underline{H}}^F(Q)} \int \phi dX$

Il suffit de remarquer que $\cap_p L^p = \cap_{F \text{ convexe modérée}} L^F$, car si F est convexe modérée d'exposant p, alors l'espace L^p est inclus dans L^F.

Enfin, il est clair que ces résultats se localisent (dans le temps) trivialement.

REFERENCES.

1. C. DELLACHERIE et P.A. MEYER. Probabilité et Potentiel. Chap. V à VIII Théorie des martingales. Hermann 1980.

2. E. LENGLART. Appendice a l'exposé : présentation unifiée de certaines inégalités de la théorie des martingales. Séminaire de Probabilité XIV Lect. notes in Math. 784 p. 49-52 (1980).

3. E. LENGLART. Tribus de Meyer et théorie des processus. Sémin. de Proba XIV, Lect. notes in Math. 784 p. 500- 546 (1980).

4. P.A. MEYER. Convergence faible de processus d'après Mokobodzki. Sém. de Proba. XI, Lect. notes in Math. 581, 109-119 (1977)

Erik Lenglart
Université de Rouen
Laboratoire de Mathématiques
Equipe de recherche associée
au CNRS n° 900.
B.P. n° 67, 76 130
Mont Saint Aignan