JEAN PELLAUMAIL

Règle maximale

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 16 (1982), p. 469-489
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1982__16__469_0>

REGLE MAXIMALE

Jean PELLAUMAIL *

Résumé :

On prouve l'existence d'une "règle maximale" sous des hypothèses très larges : celles-ci sont notamment satisfaites quand on considère la famille des règles associées aux solutions faibles d'une équation différentielle stochastique.

Summary :

Let us consider the family $\mathcal{R}$ of the "rules" which are the "weak solutions" of the stochastic differential equation $dX = a(X)dZ$ when a depends on all the past and is continuous for the uniform topology and when Z is a general semi-martingale. This family $\mathcal{R}$ is studied : namely, the existence of a "maximal" element in $\mathcal{R}$ is stated.

* INSA - Laboratoire de Probabilités et Statistiques
20, avenue des Buttes de Coësmes - 35043 RENNES CEDEX

INTRODUCTION

En [11] (cf. aussi, [12], [13] et [5]), on a prouvé, pour l'équation différentielle stochastique $dX = a(X)dZ$ où Z est une semi-martingale, l'existence d'une "solution faible" en un sens un peu plus précis que celui introduit par Strook et Varadhan (cf. [17] ou [18]) : une telle solution faible est appelée règle.

Le présent papier continue et précise cette étude : on y prouve l'existence d'une "solution extrémale" pour laquelle on a un "théorème de représentation". La preuve proposée n'utilise pas explicitement la notion de point extrémal : en fait, on prouve l'existence d'une règle qui maximise une suite $(h_n)_{n>0}$ de fonctions données. En plus du théorème de représentation évoqué ci-dessus, on montre que cette "règle maximale" R correspond à une propriété, nouvelle semble-t-il, d'approximation discrète des R-martingales (section 6).

PREMIERE PARTIE

Pour toutes les définitions classiques, on renvoie à [8].

1. DONNEES ET NOTATIONS

Pour toute cette première partie, on se donne :

- un élément t^* de $\mathbb{R}$ avec $t^* > 0$; on pose $T = [0,t^*]$
- deux bases stochastiques (indexées par T) continues à droite $(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t)_{t\in T})$ et $(\Omega,\mathcal{G},(\mathcal{G}_t)_{t\in T})$; ces deux bases stochastiques sont donc définies sur le même espace Ω ; on suppose que, pour tout élément t de T, $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{G}_t$ et que $\mathcal{F}_0 = \mathcal{G}_0$
- une probabilité P sur $(\Omega,\mathcal{F})$.

- une famille $\mathcal{H}$ de fonctions réelles, définies sur Ω et $\mathcal{G}$-mesurables ; les éléments de $\mathcal{H}$ seront appelés les "fonctions tests" ; on suppose que la tribu $\mathcal{G}$ est engendrée par une famille dénombrable d'éléments de $\mathcal{H}$.

Soit R une probabilité définie sur $(\Omega, \mathcal{G})$. On dira que M est une R-$\mathcal{G}$-martingale (resp. une P-$\mathcal{F}$-martingale) si M est martingale pour R (resp. P) relativement à la filtration $(\mathcal{G}_t)_{t\in T}$ (resp. $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$).

2. REGLE

Définitions : On dira que R est une règle si R est une probabilité définie sur $(\Omega, \mathcal{G})$ dont la restriction à $\mathcal{F}$ est P.

On dira qu'une suite $(R_n)_{n>0}$ de règles converge en règle vers R si R est une règle et si, pour toute fonction test h, $\int h \, dR = \lim_{n\to\infty} \int h \, dR_n$.

On remarque que ces deux définitions sont données dans un cadre un peu plus général que celui proposé en [12], lequel sera repris dans la deuxième partie de cette note.

Pour toute règle R et pour toute fonction réelle bornée $\mathcal{G}$-mesurable g on notera $R(g) := \int g \, dR$ (autrement dit R sera considérée comme un opérateur sur l'ensemble de telles fonctions).

On dira qu'une règle R est adaptée si toute P-$\mathcal{F}$-martingale M est aussi une R-$\mathcal{G}$-martingale (cf. [19] pour l'étude de cette propriété).

3. REGLE MAXIMALE

Définition : Soit $\mathcal{R}$ un ensemble non vide de règles. On dira qu'un élément R de $\mathcal{R}$ est maximal dans $\mathcal{R}$ si, pour tout élément R' de $\mathcal{R}$ dominé (au sens usuel) par R, on a R' = R.

Théorème : Soit $\mathcal{R}$ un ensemble non vide de règles qui satisfait aux deux propriétés suivantes :

(i) de toute suite d'éléments de $\mathcal{R}$, on peut extraire une sous-suite qui converge en règle vers un élément R de $\mathcal{R}$.

(ii) si R appartient à $\mathcal{R}$ et si h est une fonction test positive bornée telle que $R'(h) \leq R(h)$ pour tout élément R' de $\mathcal{R}$ dominé par R, alors $R''(h) = R(h)$ pour tout élément R" de $\mathcal{R}$ dominé par R.

Alors, il existe un élément R de $\mathcal{R}$ qui est maximal dans $\mathcal{R}$.

Preuve : 1°) Soit $(h_k)_{k>o}$ une suite de fonctions tests positives bornées qui engendre $\mathcal{G}$. On pose $h_o = 1$. On introduit sur $\mathcal{R}$ la relation d'ordre suivante :

$R' >> R$ si et seulement si l'une des deux conditions suivantes est satisfaite :

a) quel que soit k, $R'(h_k) = R(h_k)$

b) il existe $n > o$ tel que $R'(h_n) > R(h_n)$ et tel que, quel que soit $k < n$, $R'(h_k) = R(h_k)$.

2°) Soit $(R_i)_{i\in I}$ une famille maximale totalement ordonnée. Pour tout k, on pose $a_k := \sup_{i\in I} R_i(h_k)$. Soit $(R_n)_{n>o}$ une suite extraite de la famille $(R_i)_{i\in I}$ telle que, pour tout k, $a_k = \sup_{n>o} R_n(h_k)$.

3°) De la suite $(R_n)_{n>o}$ on peut extraire une sous-suite (condition (i)), qui converge en règle vers la règle R.

Raisonnons par l'absurde, et supposons qu'il existe un entier k pour lequel on ait un élément R' de $\mathcal{R}$ tel que $R'(h_k) > R(h_k)$ et R' dominé par R.

Soit m le plus petit de ces tels entiers. Soit R' élément de $\mathcal{R}$ dominé par R tel que $R'(h_m) > R(h_m)$. Pour $k < m$, $R(h_k) = R'(h_k)$, sinon m ne serait pas le plus petit entier comme défini ci-dessus (condition (ii)).

On aurait alors $R' >> R_i$ pour tout élément i de I et $R'(h_m) > a_m$ ce qui est impossible.

4°) Ce raisonnement par l'absurde montre que, si R" appartient à $\mathcal{R}$ et est dominé par R, alors $R(h_k) = R''(h_k)$ pour une suite de fonctions qui engendre la tribu $\mathcal{G}$. On a donc la même propriété pour tout élément de $\mathcal{G}$.

4. NOTATIONS $\mathcal{M}, \mathcal{M}', \mathcal{M}''$

Soit R une probabilité définie sur $(\Omega, \mathcal{G})$. On notera :

$\mathcal{M}_R$ l'espace des R-$\mathcal{G}$-martingales cadlag de carré intégrable nulles en 0 ; cet espace sera considéré comme un espace de Hilbert muni du produit scalaire usuel $\langle M,N\rangle = E_R(M_{t^*} N_{t^*})$.

$\mathcal{M}'_R$ le sous-espace de Hilbert de $\mathcal{M}_R$ engendré par les martingales de la forme $1_G \, 1_{]s,t]} \, M_r$ où M est une P-$\mathcal{F}$-martingale avec $M_s = 0$ et où G appartient à G_s (avec $s < t$).

$\mathcal{M}''_R$ l'orthogonal de $\mathcal{M}'_R$ dans $\mathcal{M}_R$.

5. CHANGEMENT DE REGLE ADAPTEE

Proposition : Soit R une règle adaptée et M un élément de $\mathcal{M}''_R$. On pose

$W = M_{t^*}$ et on suppose que $W \geq -1$. On pose :

$$R' := \int (1+W)\,dR$$

Alors, R' est une règle adaptée.

<u>Preuve</u> :

a) Soit N une P-$\mathcal{F}$-martingale

$$E_{R'}(N_{t^*} - N_o) = E_R\{(1+W)(N_{t^*} - N_o)\} = E_R(N_{t^*} - N_o)$$

(car M est orthogonale aux P-$\mathcal{F}$-martingales)

$= 0$ car N est une R-$\mathcal{G}$-martingale.

b) On a donc :

$$E_{R'}(N_{t^*}) = E_{R'}(N_o) = E_R(N_o) = E_R(N_{t^*})$$

ce qui montre que R et R' coïncident en restriction à $\mathcal{F}$, donc R' est une règle.

c) Il faut maintenant prouver que N est une R'-$\mathcal{G}$- martingale. Soit $s < t$ et g une fonction bornée $\mathcal{G}_s$-mesurable. On a :

$$E_{R'}\{g(N_t-N_s)\} = E_R\{g(N_t-N_s)(1+W)\}$$

$= E_R\{g(N_t-N_s)\}$ car M est orthogonale à $\mathcal{M}'_R$

$= 0$ car N est une R-$\mathcal{G}$-martingale,

ceci montre que N est une R'-$\mathcal{G}$-martingale.

6. APPROXIMATION DE M'

<u>Lemme</u> : Soit R une règle adaptée et M un élément de $\mathcal{M}''_R$. Pour tout couple (s,t), avec s < t, on a Z = 0 si $Z := E\{M_t \mid (\mathcal{F}_t \vee \mathcal{G}_s)\} - M_s$.

<u>Preuve</u> : On peut supposer $|M_t| < 1$ et $M_s = 0$. Dans ce cas, soit R' défini par $R' = \int (1 + M_t)\, dR$. On sait (cf. paragraphe 5 qui précède) que R' est une règle adaptée. Ceci implique que R' coïncide avec R en restriction à $(\mathcal{F}_t \vee \mathcal{G}_s)$ car $\mathcal{F}_t$ et $\mathcal{G}_s$ sont indépendantes (cf. [19]) sachant $\mathcal{F}_s$ à la fois pour R et pour R' ; or, en restriction à cette tribu, $dR'/dR = 1+Z$ donc Z = 0.

<u>Proposition</u> : Soit R une règle adaptée. Pour tout entier $n \geq 2$, soit $(t(n,k))_{1 \leq k \leq n}$ une suite finie croissante d'éléments de T. On suppose que $t(2,1) := 0$, $t(2,2) := t^*$ et que les partitions de T associées à chacune de ces suites sont de plus en plus fines, c'est-à-dire que, pour tout n, on a :

$$\{t(n,k)\}_{1 \leq k \leq n} \subset \{t(n+1,k)\}_{1 \leq k \leq n+1}$$

Soit ϕ^n l'application à valeurs dans $\mathcal{M}_R$ et définie sur $\mathcal{M}_R$ par :

$$\phi^n(M)_t := E\{M_{t^*} \mid (\mathcal{F}_t \vee \mathcal{G}_{t(n,k)})\} + (\phi^n(M)-M)_{t(n,k)}$$

pour $t(n,k) \leq t \leq t(n,k+1)$.

Alors, pour tout élément M de $\mathcal{M}_R$, la suite $(\Phi^n(M))_{n>1}$ converge dans $\mathcal{M}_R$ vers la projection orthogonale M' de M sur $\mathcal{M}'_R$. Il existe donc une sous-suite extraite de la suite $(\phi^n(M))_{n>1}$ pour laquelle la convergence a lieu, R-p.s., uniformément par trajectoires.

Preuve :

a) Si <.,.> désigne le produit scalaire dans $\mathcal{M}_R$, on note que, quel que soit $M \in \mathcal{M}_R$, on a :

$$\langle \phi^n(M), \phi^n(M) \rangle = \sum_k E\{(\phi^n(M)_{t(n,k+1)} - \phi^n(M)_{t(n,k)})^2\}$$

$$\leq \sum_k E\{(M_{t(n,k+1)} - M_{t(n,k)})^2\}$$

$$\leq \langle M,M \rangle$$

b) Par ailleurs, si M appartient à $\mathcal{M}''_R$, le lemme qui précède montre que $\phi^n(M) = 0$, pour tout entier n.

c) Pour tout entier n, soit $\mathcal{M}^n_R$ le sous-espace de Hilbert de $\mathcal{M}_R$ engendré par les martingales de la forme $\int Y\,dN$ avec N P-$\mathcal{F}$-martingale et

$$Y := \sum_{k=1}^{n-1} Y_k \, 1_{]t(n,k),t(n,k+1)]}$$

chaque variable aléatoire Y_k étant $\mathcal{G}_{t(n,k)}$-mesurable.

D' une part, si M appartient à $\mathcal{M}^n_R$, on a $\phi^n(M) = M$.

d) D'autre part, soit M un élément de $\mathcal{M}_R$ et soit M^n la projection orthogonale de M sur $\mathcal{M}^n_R$. La suite d'ensembles $(\mathcal{M}^n_R)_{n>1}$ croît évidemment vers un sous-ensemble dense de $\mathcal{M}'_R$ donc la suite $(M^n)_{n>o}$ converge, dans $\mathcal{M}_R$, vers la projection orthogonale M' de M sur $\mathcal{M}'_R$. Donc, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe q tel que $n \geq q$

implique : $||M'-M^n|| \leq \varepsilon$ si $||.||$ désigne la norme dans $\mathcal{M}_R$.
Compte tenu du a), ceci implique :

$$||\phi^n(M') - \phi^n(M^n)|| \leq \varepsilon$$

Or, $\phi^n(M') = \phi^n(M)$ (cf. le b))

et $\phi^n(M^n) = M^n$

ce qui donne $||\phi^n(M) - M^n|| \leq \varepsilon$ et $||\phi^n(M)-M'|| \leq 2\varepsilon$

et prouve la première partie de la proposition .

e) La fin de la proposition est alors une application classique du lemme de Borel-Cantelli.

Corollaire :

Soit R une règle adaptée et M un élément de $\mathcal{M}_R$. Soit $M = M' + M''$ la décomposition de M avec $M' \in \mathcal{M}'_R$ et $M'' \in \mathcal{M}''_R$. Soit $a := \sup_{\omega} |M_t{*}(\omega)|$.

On a alors, R-p.s., $|(M'_t - M'_{t-})(\omega)| \leq 2a$. Plus généralement, M' et M'' ont, vis-à-vis de M, les mêmes propriétés que des transformées de Burkholder (cf. [21]).

Preuve : Ceci se déduit immédiatement de l'approximation donnée dans la proposition précédente.

7. CONCENTRATION D'UNE REGLE :

Proposition : Soit R une règle adaptée. Soit g une fonction réelle bornée (en valeur absolue) $\mathcal{G}$-mesurable. Soit M la R-$\mathcal{G}$-martingale définie par $M_t := E_R(g \mid \mathcal{G}_t) - E_R(g \mid \mathcal{G}_o)$. On suppose que M n'appartient pas à $\mathcal{M}'_R$.
Alors, il existe une règle adaptée R' dominée par R telle que $R'(g) > R(g)$.

Preuve : On peut supposer que $|M|$ est bornée par $1/4$. Soit $M = M' + M''$ la décomposition de M avec M' élément de $\mathcal{M}'_R$ et M'' élément de $\mathcal{M}''_R$. Soit u le temps d'arrêt défini par :

$$u := \inf.\ \{t : M''_t < -(1/2)\}$$

Compte tenu du corollaire donné à la section 6 qui précède, on a $M''_u \geqslant -1$. Soit $W = 1 + M''_u$ et $R' = \int W\, dR$. Puisque M'' appartient à $\mathcal{M}''_R$, il en est de même de la martingale M'' arrêtée à u. La section 5 montre alors que R' est une règle adaptée.

Posons $g_o := E_R\,(g \mid \mathcal{G}_o)$. On a :

$$R'(g) - R(g) = E_R\,(gM''_u) = E_R\,\{(g-g_o)\ M''_u\}$$

$$= E_R\,\{(M'_u + M''_u)\ M''_u\} = E_R\,\{(M''_u)^2\}$$

(puisque M' est orthogonale à M'').

Mais, par hypothèse, $M''_u \neq 0$ donc $R'(g) > R(g)$.

8. EXISTENCE D'UNE REGLE MAXIMALE

Lemme :

1°) Soit R une règle adaptée et g une fonction $\mathcal{G}$-mesurable bornée. On suppose que M appartient à $\mathcal{M}'_R$ si M est la R-$\mathcal{G}$-martingale définie par $M_t := E(g \mid \mathcal{G}_t) - E(g \mid \mathcal{G}_o)$. Alors, on a $R'(g) = R(g)$ pour toute règle adaptée R' dominée (au sens usuel) par R.

2°) Soit R une règle adaptée telle que $\mathcal{M}''_R = \{0\}$. On a alors $R' = R$ pour toute règle adaptée dominée par R.

__Preuve__ : On pose $g_o := E(g \mid \mathcal{G}_o)$

Le 2°) est une conséquence triviale du 1°). Par ailleurs, si M est à la fois une R-$\mathcal{G}$-martingale et une R'-$\mathcal{G}$-martingale, on a $R(M_t*) = 0 = R'(M_t*)$ donc : $R(g) = R(g_o) = R'(g_o) = R'(g)$.

Le seul problème est donc de prouver que, si M est une R-$\mathcal{G}$-martingale bornée qui appartient à $\mathcal{M}'_R$, alors M est aussi une R'-$\mathcal{G}$-martingale (bornée et qui appartient à $\mathcal{M}'_{R'}$) .

Par densité, (puisque R domine R'), il suffit de prouver cette propriété quand $M = \sum_{k=1}^{n} \int Y_k \, d N_k$ où $(Y_k)_{1 \leq k \leq n}$ est une famille de processus $\mathcal{G}$-prévisibles bornés étagés et $(N_k)_{1 \leq k \leq n}$ est une famille de $\mathcal{F}$-martingales.

Dans ce cas, puisque R' est adaptée, chaque martingale N_k est une R'-$\mathcal{G}$-martingale ; on a donc la même propriété pour M ce qui achève la démonstration.

__Théorème__ :

Soit $\mathcal{R}$ un ensemble non vide de règles adaptées qui satisfait aux deux conditions suivantes :

(i) de toute suite d'éléments de $\mathcal{R}$, on peut extraire une sous-suite qui converge en règle vers un élément de $\mathcal{R}$.

(ii) si R appartient à $\mathcal{R}$ et si R' est une règle adaptée dominée par R, alors R' appartient à $\mathcal{R}$.

Alors il existe une règle (adaptée) R qui est un élément maximal dans $\mathcal{R}$. De plus, $\mathcal{M}''_R = \{0\}$. De plus, il existe une suite $(h_n)_{n>0}$ de fonctions tests positives bornées qui engendre $\mathcal{G}$ et telle que, si R' appartient à $\mathcal{R}$ et si R' est différent de R, il existe un entier k tel que $R'(h_k) < R(h_k)$ et $R'(h_j) = R(h_j)$ pour $j < k$. En fait, la famille $(h_n)_{n>o}$ peut être choisie a priori.

Preuve :

1°) Il faut d'abord prouver que la condition (ii) du théorème de la section 3 est satisfaite. Soit donc une fonction g bornée et $\mathcal{G}$-mesurable telle que $R'(g) \leq R(g)$ pour tout élément R' de $\mathcal{R}$ dominé par R : ceci signifie que cette condition est satisfaite pour toute règle adaptée dominée par R (condition (ii)) du présent théorème). Compte tenu de la proposition donnée à la section 7, ceci signifie que M appartient à $\mathcal{M}'_R$ si M est la R-$\mathcal{G}$-martingale définie par $M_t = E_R(g \mid \mathcal{G}_t) - E_R(g \mid \mathcal{G}_o)$. Mais ceci implique $R''(g) = R(g)$ pour toute règle adaptée R'' dominée par R (lemme précédent), c'est-à-dire que l'on peut appliquer le théorème de la section 3.

2°) On sait donc qu'il existe une règle maximale R. Le fait que $\mathcal{M}''_R = \{0\}$ résulte immédiatement de la proposition de la section 7. La fin du théorème résulte de la démonstration du théorème de la section 3.

9. REGLE EXTREMALE

Nous avons donné une démonstration "directe" du théorème ci-dessus parce que cette preuve nous semble intéressante en elle-même, notamment dans le fait que la famille $(h_n)_{n>0}$ puisse être choisie a priori et qu'on "maximise" suivant cette suite $(h_n)_{n>0}$.

Il faut toutefois noter que, moyennant quelques hypothèses supplémentaires très peu contraignantes, on peut donner une autre preuve en notant qu'une règle maximale au sens ci-dessus est, en général, une règle extrémale dans un sous-ensemble convexe compact de règles. Comme cela est très clairement expliqué dans [20], un point fondamental de la preuve est le théorème de Douglas (cf. [22]), ou, plus précisément, une généralisation facile de ce théorème.

Théorème de Douglas généralisé

Soit $\mathcal{H}_o$ un ensemble de fonctions tests bornées. Soit $\mathcal{R}$ un ensemble de règles tel que :

(i) $\mathcal{R}$ est compact pour la topologie $\sigma(\mathcal{R},\mathcal{H})$

(ii) $R \in \mathcal{R}$, R' dominé par R et R'(h) = 0 pour tout élément h de $\mathcal{H}_o$ implique $R' \in \mathcal{R}$

(iii) $\mathcal{R}_o \neq \emptyset$ où $\mathcal{R}_o$ est l'ensemble des éléments R de $\mathcal{R}$ tels que R(h) = 0 pour tout élément h de $\mathcal{H}_o$.

Alors il existe au moins un élément extrémal dans $\mathcal{R}_o$: un tel élément extrémal R est tel que $1 \oplus \text{span}(\mathcal{H}_o)$ est dense dans $L^1(R)$.

Enfin, considérons le cas où $\mathcal{H}_o$ est l'ensemble des fonctions bornées h telles que, il existe $t \in T$, g fonction test $\mathcal{G}_t$-mesurable et f fonction $\mathcal{F}$-mesurable avec $E_p(f \mid \mathcal{F}_t) = 0$ et $h = f\,g$ (on suppose donc que l'ensemble $\mathcal{H}_o$ de telles fonctions est contenu dans $\mathcal{H}$). Supposons, de plus, que, quel que soit t, l'ensemble des fonctions test $\mathcal{G}_t$-mesurables engendre $\mathcal{G}_t$. Alors, la condition R(h) = 0 pour tout élément h de $\mathcal{H}_o$ signifie exactement que R est une règle adaptée.

Preuve

La fin du théorème est évidente ; la preuve du début se calque exactement sur la preuve du théorème de Douglas (cf. [22] ou [20]). L'ensemble $\mathcal{R}_o$ est fermé dans $\mathcal{R}$ et donc compact pour la topologie $\sigma(\mathcal{R},\mathcal{H})$. Soit R un élément extrémal dans $\mathcal{R}_o$. Raisonnons par l'absurde et supposons que $1 \oplus \text{span}(\mathcal{H}_o)$ ne soit pas dense dans $L^1(R)$. D'après le théorème de Hahn-Banach, il existe un élément non nul k de $L^\infty(R)$ tel que R(k) = 0 et R(hk) = 0 pour tout élément h de $\mathcal{H}_o$. Puisque k appartient à $L^\infty(R)$, on peut supposer $-1/2 \leq k \leq \frac{1}{2}$. On pose alors $R' := \int(1+k)dR$ et $R'' := \int(1-k)dR$. Les probabilités R' et R" sont dominées par R et R'(h) = R"(h) = 0 pour tout élément h de $\mathcal{H}_o$ donc (condition (ii)) R' et R" appartiennent à $\mathcal{R}_o$: or $R = \frac{1}{2}(R' + R'')$ ce qui contredit le fait que R est extrémal et achève le raisonnement par l'absurde.

10. REGLE FORTE

Définition : Soit R une règle. On dira que R est une règle forte si $L^2(\Omega,\mathcal{F},P) = L^2(\Omega,\mathcal{G},R)$. Dans ce cas, toutes les R-$\mathcal{G}$-martingales sont aussi des P-$\mathcal{F}$-martingales. L'intérêt d'une règle maximale est justement d'être "presque" dans ce cas.

Le théorème suivant (cf. les travaux de Lévy, Ito, Kallianpur, [18], [23], [24], etc...) précise ce point en donnant une propriété techniquement fondamentale d'une règle maximale.

11. THEOREME DE REPRESENTATION

On suppose que la base stochastique $(\Omega,\mathcal{F},P,(\mathcal{F}_t)_{t\in T})$ a la propriété de représentation au sens qu'il existe une P-$\mathcal{F}$-martingale N telle que, pour toute P-$\mathcal{F}$-martingale bornée M il existe un processus $\mathcal{F}$-prévisible Y avec $M = \int Y\, d\, N$. Soit R une règle adaptée telle que $\mathcal{M}''_R = \{0\}$.
On pose $\bar{N}_t(f,\omega) := N_t(\omega)$. Alors, $(\Omega,\mathcal{G},R,(\mathcal{G}_t)_{t\in T})$ a la propriété de représentation relativement à $\bar{N}$ au sens suivant : pour toute R-$\mathcal{G}$-martingale bornée M, il existe un processus $\mathcal{G}$-prévisible Y tel que $M = \int Y\, d\, \bar{N}$

Preuve

Soit M une R-$\mathcal{G}$-martingale bornée. La condition $\mathcal{M}'_R = \mathcal{M}_R$ signifie que $M = \lim_{k\to\infty} . M^k$ avec, quel que soit k , $M^k = \int Y_k\, d\bar{N}$. Quitte à considérer une sous-suite, on peut supposer que $\lim_{k\to\infty} . E\{(M^k - M)^*_t\}^2 = 0$. Ceci implique que $(Y_k)_{k>0}$ converge dans $L_1(\Omega\times T,\mathcal{P},m)$ où $\mathcal{P}$ est la tribu des $\mathcal{G}$-prévisibles et $m := E(d[\bar{N},\bar{N}])$. La limite Y de cette suite (qui est donc un processus prévisible) est telle que $M = \int Y\, d\, \bar{N}$. Quand M n'est pas bornée, cf. [25].

DEUXIEME PARTIE

12. DONNEES ET NOTATIONS

Pour toute cette deuxième partie, on se donne :

- une base stochastique probabilisée $B^I := (\Omega', \mathcal{F}', P', (\mathcal{F}'_t)_{t \in T})$ avec $T = [0,t^*]$, $t^* < +\infty$; on suppose que cette base est complète et continue à droite ; elle sera appelée la base initiale

- deux espaces vectoriels de dimension finie H et K : on notera L l'espace vectoriel des opérateurs linéaires continus de K dans H

- une semi-martingale cadlag Z (au sens de [3]), à valeurs dans K et adaptée à la base initiale.

Soit $Z = V + M$ une décomposition de Z en la somme d'un processus à variation bornée V et d'une martingale M localement de carré intégrable ; on pose $Q := 8\,(|V| + [M,M] + \langle M,M\rangle)$ où $|V|$ est la variation totale de V, $[M,M]$ la variation quadratique de M et $\langle M,M\rangle$ est le processus de Meyer associé à $[M,M]$. On sait que Q^*_- domine Z au sens [8].

On introduit alors les notations suivantes :

D^H est l'espace des fonctions cadlag définies sur T et à valeurs dans H ; on munit D^H de la topologie de Skorohod, soit τ_s (cf. [2]) et de la topologie de la convergence uniforme, soit τ_u.

$\mathcal{D}^H_t$ est la tribu des sous-ensembles de D^H engendrée par les cylindres $\{f : f \in D^H, f(s) \in B\}$ où $s \leq t$ et B borélien de H ; on pose $\mathcal{D}^H := \mathcal{D}^H_{t^*+} := \mathcal{D}^H_{t^*}$ et, pour $t < t^*$, $\mathcal{D}^H_{t+} := \bigcap_{s>t} \mathcal{D}^H_s$.

$\Omega := D^H \times \Omega'$, $\mathcal{G} := \mathcal{D}^H \otimes \mathcal{F}'$, $\mathcal{G}_t := \mathcal{D}^H_{t+} \otimes \mathcal{F}'_t$

$B^H := (\Omega, \mathcal{G}, (\mathcal{G}_t)_{t \in T})$ et cette famille sera appelée la base canonique.

$\mathcal{H}$: = ensemble des fonctions (les fonctions tests) réelles bornées, définies sur $D^H \times \Omega$, $\mathcal{G}$-mesurables et τ_s-continues en la première variable

$\mathcal{F}$: = $\{F : F := D^H \times F', F' \in \mathcal{F}'\}$ et $P(F) := P'(F')$

On définit de même $\mathcal{F}_t$.

On constate immédiatement que ce cadre d'étude est un cas particulier de celui introduit dans la première partie.

13. SOLUTIONS FAIBLES

Théorème

Soit a une "fonctionnelle" satisfaisant aux hypothèses suivantes :

1°/ a peut être considéré comme un processus à valeurs dans L , défini et prévisible par rapport à la base canonique B^H .

2°/ il existe un processus B^I-prévisible positif α tel que $\int \alpha dR < +\infty$ P-p.s. et quel que soit f élément de D^H, $||a(f,\omega,t)||^2 \leq \alpha(\omega,t)$.

3°/ pour tout élément (ω,t) de $(\Omega \times T)$, l'application $f \rightsquigarrow a(f,\omega,t)$ est τ_u-continue.

De plus, pour tout élément (f,ω,t) de $(D^H \times \Omega \times T)$, on pose $\bar{Z}_t(f,\omega) := Z_t(\omega)$ et $\bar{X}_t(f,\omega) := f(t)$ (processus canonique).

Alors il existe une règle adaptée R telle que, pour cette probabilité R (définie sur $(D^H \times \Omega, \mathcal{D}^H \otimes \mathcal{F})$) , on a :

$$\bar{X}_t = \int_{]0,t]} a(\bar{X},\omega,s)\, d\bar{Z}_s$$

cette intégrale étant une intégrale stochastique au sens usuel.

De plus, soit $\mathcal{R}$ l'ensemble des règles adaptées R pour lesquelles l'égalité ci-dessus est satisfaite.

Supposons que les règles considérées soient toutes portées par un ensemble $\mathcal{G}$-mesurable de la forme $(\Omega \times K) \cap K'$ où K est un compact de Skorohod et, pour tout élément ω de Ω, $\{f : (f,\omega) \in K'\}$ est un τ_u-compact. (en général, on peut se ramener à ce cas par prélocalisation).

Alors, l'ensemble $\mathcal{R}$ satisfait aux hypothèses (i) et (ii) du théorème de la section 8. Autrement dit, il existe un élément maximal dans $\mathcal{R}$ (au sens défini et étudié dans la première partie).

<u>Preuve</u>

L'existence d'une "solution faible" au sens indiqué dans ce théorème a été prouvée en [11].

Le fait de pouvoir se contenter de la τ_u-continuité (au lieu de la τ_s-continuité) est dû à Jacod et Mémin (cf. [5]).

Pour toute règle adaptée, le processus $\bar{Q}$ défini par $\bar{Q}_t(f,\omega) := Q_t(\omega)$ est $*$-dominant pour $\bar{Z}$ (au sens de [MeP-2]) : en effet, si $Z = V + M$, $\bar{V}_t(f,\omega) := V_t(\omega)$ et $\bar{M}_t(f,\omega) := M_t(\omega)$, $\bar{V}$ est à variation bornée et $\overline{|V|} = |\bar{V}|$, $[\bar{M},\bar{M}] = \overline{[M,M]}$, $\langle\bar{M},\bar{M}\rangle = \overline{\langle M,M\rangle}$, et $\bar{M}$ est une R-$\mathcal{G}$ martingale locale si R est adaptée.

Ceci implique que, si R est une règle adaptée, si K^* est un élément de $\mathcal{G}$ tel que $R(K^*) = 1$, si b est un processus B^H-prévisible et si on pose $b^* = \sup_{f \in K^*} ||b(f,.)||^2$, alors on a, pour tout B^I- temps d'arrêt v :

$$E_R \left\{ \left(\int_{]0,v[} b \, d\bar{Z} \right)^2 \right\} \leq E_R \left\{ \bar{Q}_{v-} \int_{]0,v[} ||b||^2 \, d\bar{Q} \right\}$$

$$\leq E_P \left\{ Q_{v-} \int_{]0,v[} b^* dQ \right\}$$

Cette propriété de domination uniforme permet de vérifier facilement que R satisfait aux hypothèses (i) et (ii) du théorème de la section 8 (comme dans [11]).

14. REGLE FORTE

Lemme et définition

Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace mesurable ; soit D un espace métrisable séparable muni de sa tribu des boréliens $\mathcal{D}$; soit R une probabilité définie sur $(\mathcal{D} \otimes \mathcal{F})$. Soit $\mathcal{D}_o$ la tribu triviale sur D (i.e. $\mathcal{D}_o := \{D, \emptyset\}$). On suppose que la complétion, pour R, de $(\mathcal{D}_o \otimes \mathcal{F})$ contient $(\mathcal{D} \otimes \mathcal{F})$.

Alors il existe une variable aléatoire X définie sur $(\Omega, \mathcal{F})$, à valeurs dans $(D, \mathcal{D})$ et telle que, pour tout élément (A,F) de $(\mathcal{D} \times \mathcal{F})$, $R(A \times F) = R\big(D \times (F \cap X^{-1}(A))\big)$. Autrement dit, la variable aléatoire X^* définie sur $(D \times \Omega)$ par $X^*(d,\omega) = X(\omega)$ est R-indistinguable de la variable aléatoire Y définie par $Y(d,\omega) = d$.

Preuve

Pour tout entier n, soit $(B_{n,k})_{k \in K(n)}$ une partition dénombrable de D qui est constituée d'éléments de $\mathcal{D}$ et telle que, pour tout entier k, le diamètre de $B_{n,k}$ soit inférieur à $\frac{1}{n}$.

On suppose, de plus, que, quand n augmente, les partitions $(B_{n,k})_{k \in K(n)}$ sont de plus en plus fines. On pose $B'_{n,k} := B_{n,k} \times \Omega$.

Par hypothèse, pour tout couple (n,k), il existe $A_{n,k}$ élément de $\mathcal{F}$ tel que, si $A'_{n,k} := D \times A_{n,k}$, on a :

$$R\Big((B'_{n,k} \setminus A'_{n,k}) \cup (A'_{n,k} \setminus B'_{n,k})\Big) = 0 .$$

On peut construire ces ensembles $A_{n,k}$ en sorte que, pour tout entier n, $(A_{n,k})_{k \in K(n)}$ constitue une partition de Ω, et en sorte que ces partitions soient de plus en plus fines quand n tend vers l'infini.

$$\text{Soit } C_n := \bigcup_{k \in K(n)} (B_{n,k} \times A_{n,k}) .$$

Pour tout entier n, $C_{n+1} \subset C_n$ et $R(C_n) = 1$.

Soit $C = \bigcap_{n>o} C_n$. D'une part, $R(C) = 1$; donc , $R(D \times H) = 1$

si $H := \{\omega : \text{il existe } x \in D, \text{ avec } (x,\omega) \in C\}$.

Or, si ω appartient à H, l'élément x de D tel que (x,ω) appartienne à C est unique (le "diamètre" de C est nul) ; on peut donc poser $X(\omega) = x$. Si ω appartient à $(\Omega \setminus H)$, on peut poser $X(\omega) = x_o$ où x_o est un point quelconque de D : en effet $R(D \times (\Omega \setminus H)) = 0$.
On vérifie alors facilement que X satisfait aux propriétés données dans le lemme.

Théorème

Une règle est forte, au sens indiqué à la section 10, si et seulement si il existe une variable aléatoire X, définie sur Ω', à valeurs dans D^H et telle que, pour tout élément (A,F) de $\mathcal{D}^H \times \mathcal{F}'$, on a :

$$R(A \times F) = P(X^{-1}(A) \cap F) .$$

De plus, X est un processus adapté si et seulement si R est adapté.

Preuve

1°/ Supposons d'abord que R soit une règle associée à une variable aléatoire comme indiquée ci-dessus. Pour prouver que $\mathcal{G}_t$ est contenue dans $\mathcal{F}_t$, R- p.s., puisque $\mathcal{G}_t$ est engendrée par $\mathcal{F}_t$ et par les ensembles de la forme $(A \times \Omega')$ avec A élément de $\mathcal{D}_t$, il suffit de vérifier que de tels ensembles appartiennent à $\mathcal{G}_t$. Or, $(A \times \Omega')$ est identique, R- p.s., à $(D^H \times X^{-1}(A))$ (vérification immédiate).

Ceci montre que R est une règle forte et que cette règle est adaptée si X est un processus adapté.

2°/ Réciproquement, soit R une règle forte. Le lemme précédent montre que R est associée à une application X définie sur Ω et à valeurs dans D^H , c'est-à-dire à un processus.

On vérifie immédiatement que ce processus X est adapté si R l'est.

BIBLIOGRAPHIE

[1] D.J. ALDOUS, *Limit theorems for subsequences of arbitrarily dependent sequences of random variables,* Z. für Wahr. 40, 59-82, 1977.

[2] P. BILLINGSLEY, *Convergence of probability measures,* Wiley and sons, New York, 1968.

[3] C. DELLACHERIE, P.A. MEYER, *Probabilités et potentiel, théorie des martingales,* Herman, Paris, 1980.

[4] J. JACOD, *Calcul stochastique et problèmes de martingales,* Lect. Notes in Math, 724, Springer Verlag, Berlin, 1979.

[5] J. JACOD, J. MEMIN, *Existence of weak solutions for stochastic differential equations driven by semimartingales.* Preprint.

[6] KRYLOW, *Quasi diffusion processes,* Theory of probability and applications, 1966.

[7] M.METIVIER, J. PELLAUMAIL, *Notions de base sur l'intégrale stochastique,* Séminaire de Probabilités de Rennes, 1976.

[8] M. METIVIER, J. PELLAUMAIL, *Stochastic integration,* Academic Press, 1980.

[9] P.A. MEYER, *Convergence faible et compacité des temps d'arrêt, d'après Baxter et Chacon,* Sém. Proba. XII, 411-423, Lect. Notes in Math. 649, Springer Verlag, Berlin, 1978.

[10] J. PELLAUMAIL, *Quelques remarques sur l'intégrale stochastique,* Séminaire de Probabilités XIV, Lect. Notes in Math 784, Springer Verlag, 1980.

[11] J. PELLAUMAIL, *Solutions faibles et semimartingales,* Séminaire de Probabilités XV, Lect. Notes in Math 850, Springer Verlag 1981.

[12] J. PELLAUMAIL, *Convergence en règle,* C.R.A.S. 290 (A), 289-291, 1980.

[13] J. PELLAUMAIL, *Solutions faibles pour des processus discontinus,* C.R.A.S. 290 (A), 431-433, 1980.

[14] P. PRIOURET, *Processus de diffusion et équations différentielles stochastiques*, Lect. Notes in Math; 390, Springer Verlag, 1974.

[15] Yu.V. PROKHOROV, *Probability distributions in functional spaces*, Uspelin Matem. Nank., N.S. 55, 167, 1953.

[16] A.V. SHOROKHOD, *Limit theorems for stochastic processes*, Theor. Proba. and Appli. 1, 261-290 (SIAM Translation), 1956.

[17] D.W. STROOCK, S.R.S. VARADHAN, *Diffusion processes with continuous coefficients, com. in Pure and Appl. Math. Vol. 22, 1969.*

[18] D.W. STROOCK, S.R.S. VARADHAN, *Multidimensional diffusion processes*, Springer Verlag (Grundlehren S. 233), Berlin, 1979.

[19] P. BREMAUD, M. YOR, *Changes of filtrations and of probability measures*, Z. für Wahr, 45, 269-295, 1978.

[20] D.W. STROOK and M. YOR, *On entremal solutions of martingale problems*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 4e série, t. 13, 1980, p. 95 à 164.

[21] D.L. BURKHOLDER, *Martingale transforms*, Ann. Math. Statist. 37, 1495-1505 (1966).

[22] R. DOUGLAS, *On extremal measures and Subspace Density*, Michigan Math J., Vol. 11, 1964, p. 644-652.

[23] H. KUNITA and S. WATANABE, *On square integrable martingales*, Nagoya Math. J. Vol. 30, 1967, p. 209-245.

[24] J. JACOD and M. YOR, *Etude des solutions extrémales et représentation intégrale des solutions pour certains problèmes de martingales* (Z. für Wahr., Vol. 38, 1977, p. 83-125).

[25] M. YOR, *Convergence de martingales dans L^1 et dans H^1*, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 286, 1978, p..571-573.
