JIA-AN YAN

Une remarque sur les solutions faibles des équations différentielles stochastiques unidimensionnelles

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 17 (1983), p. 78-80
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1983__17__78_0>

UNE REMARQUE SUR LES SOLUTIONS FAIBLES DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES STOCHASTIQUES UNIDIMENSIONNELLES

par J.A. YAN

En ce qui concerne les solutions faibles de l'équation

$$(1) \qquad X_t = x + \int_0^t \sigma(X_s)dB_s$$

où $x\in\mathbb{R}$, $\sigma: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est une fonction borélienne, et (B_t) est un mouvement brownien réel, on connaît maintenant deux résultats remarquables :

THEOREME 1 (Engelbert-Schmidt [2]). Pour que l'équation (1) ait une solution faible non triviale (i.e. non constante) pour tout $x\in\mathbb{R}$, il faut et il suffit que $\int_K \sigma^{-2}(y)dy <\infty$ pour tout compact $K\subset\mathbb{R}$.

THEOREME 2 (Engelbert-Hess [3], p. 254). Si la condition précédente est satisfaite, il y a unicité en loi pour les solutions faibles de l'équation (1) (quel que soit $x\in\mathbb{R}$) si et seulement si $\sigma(y)\neq 0$ pour tout tout $y\in\mathbb{R}$.

Le but de cette note est d'étendre ces résultats au cas des équations du type un peu plus général :

$$(2) \qquad X_t = x + \int_0^t\sigma(X_s)dB_s + \int_0^t a(X_s)ds$$

où a est borélienne. Les méthodes nécessaires pour réaliser cette extension sont tout à fait standard, mais les résultats explicites rendront peut être service.

Dans toute la note, nous faisons les hypotheses suivantes :

(i) $\int_K \frac{|a(u)|}{\sigma^2(u)}du < \infty$ pour tout compact K

(ii) $\int_0^\infty \exp\{-\int_0^y \frac{2a(u)}{\sigma^2(u)}du\}\,dy = \int_{-\infty}^0 \exp\{\int_y^0 \frac{2a(u)}{\sigma^2(u)}du\}\,dy = +\infty$.

Alors les théorêmes 1 et 2 s'étendent sans modification :

THEOREME 1' . La condition $\int_K \sigma^{-2}(y)dy < \infty$ pour tout compact K est nécessaire et suffisante pour l'existence de solutions non triviales.

THEOREME 2'. Si cette condition est satisfaite, la condition $\sigma(y)\neq 0$ pour tout y est nécessaire et suffisante pour l'unicité en loi.

Nous signalerons à la fin une légère extension du théorême 1'.

DEMONSTRATION. Posons

$$F(x) = \int_0^x \exp\{-\int_0^y \frac{2a(u)}{\sigma^2(u)}\,du\}\,dy \quad , x\in\mathbb{R}$$

F est alors strictement croissante avec $F(-\infty)=-\infty$ et $F(\infty)=\infty$. Si l'on désigne par G la fonction inverse de F, la relation $F(G(x))=x$, donc

$$F'(G(x))G'(x) = 1 \quad , x\in\mathbb{R}$$

Posons

$$\tau(x) = F'(G(x))\sigma(G(x))$$

Il n'est pas difficile de vérifier que

$$\int_u^v \frac{dy}{\tau^2(y)} = \int_{G(u)}^{G(v)} \frac{dx}{F'(x)\sigma^2(x)}$$

de sorte que l'intégrabilité locale de σ^{-2} équivaut à celle de τ^{-2}. Il suffit donc, d'après le théorème 1, de démontrer que l'équation (2) admet pour tout x une solution faible non triviale, si et seulement si cette propriété est vraie pour l'équation

$$(3) \qquad Y_t = y + \int_0^t \tau(Y_s)dB_s$$

Or soit (X_t,B_t) une solution faible non triviale de (2) pour la valeur initiale x ; nous allons vérifier que $(Y_t=F(X_t),B_t)$ est une solution faible non triviale de (3) pour $Y_0=F(x)$. De même, en sens inverse , si (Y_t,B_t) est une solution faible de (3) pour la valeur initiale y, $(X_t=G(Y_t),\ B_t)$ est une solution faible de (2) pour la valeur initiale G(y). Le même raisonnement permet de traiter l'unicité (th. 2').

Pour établir cela, nous calculons la dérivée seconde de F au sens des distributions, qui est une mesure signée

$$\mu(dy) = -2F'(y)\frac{a(y)}{\sigma^2(y)}dy$$

Désignons par $(L_t^y,\ y\in\mathbb{R}, t\geq 0)$ la famille des temps locaux de (X_t), choisis continus à droite en y et continus en t. En utilisant la formule d'Ito et la formule de densité des temps d'occupation (Azéma-Yor [1])

$$\begin{aligned} Y_t = F(X_t) &= F(x) + \int_0^t F'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} L_t^y\mu(dy) \\ &= F(x) + \dots\dots\dots\dots - \int_{\mathbb{R}} F'(y)\frac{a(y)}{\sigma^2(y)}L_t^y dy \\ &= F(x) + \dots\dots\dots\dots - \int_0^t F'(X_s)\frac{a(X_s)}{\sigma^2(X_s)}d\langle X,X\rangle_s \\ &= F(x) + \int_0^t F'(X_s)\sigma(X_s)dB_s = F(x) + \int_0^t \tau(Y_s)dB_s . \end{aligned}$$

La démonstration est la même en sens inverse, et nous n'indiquerons pas les détails.

Si les fonctions a et σ satisfont à la condition (i), mais non à la condition (ii), on peut encore obtenir un résultat analogue au théorème 1', mais en introduisant des solutions faibles << avec explosion >> . Il faut alors utiliser, au lieu du théorème 1, le théorème 5 de [2]. Nous ne donnerons aucun détail.

REFERENCES

[1]. J. Azéma et M. Yor. En guise d'introduction. Temps Locaux. Astérisque 52-53, 1977, p. 3-16.

[2]. H.J. Engelbert et W. Schmidt. On the behaviour of certain functionals of the Wiener process and applications to stochastic differential equations. Stochastic Differential Systems. Lecture Notes on Control and Information, Springer, 1981, n°36, p. 47-55.

[3]. H.J. Engelbert et J. Hess. Stochastic integrals of continuous local martingales II. Math. Nachr. 100, 1981, 249-269.

Yan Jia-An
Institute of Applied Mathem.
Academia Sinica
Beijing (Chine)