CHRISTOPHE STRICKER

Approximation du crochet de certaines semimartingales continues

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 18 (1984), p. 144-147

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1984__18__144_0>

Séminaire de Probabilités
1982/83

APPROXIMATION DU CROCHET DE CERTAINES SEMIMARTINGALES CONTINUES

C. STRICKER

Tous les processus ou filtrations considérés seront indexés par $[0,1]$. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ un espace probabilisé filtré vérifiant les conditions habituelles. Il est bien connu que si X est une semimartingale continue appartenant à $\mathcal{S}^2$, alors la suite $\sum_{\sigma_n} E[(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 \mid \mathcal{F}_{t_i}]$ converge dans L^1 vers $\langle X,X\rangle_t$ lorsque le pas de la subdivision $\sigma_n = (0 = t_o < t_1 < \dots < t_p = t)$ tend vers 0. Nous nous proposons ici de préciser cette convergence lorsque X appartient à une certaine classe de semimartingales continues. Après avoir établi un théorème assez général, nous examinerons quelques cas particuliers qu'on rencontre notamment en mécanique aléatoire.

THEOREME. Soit H un processus prévisible borné dans L^2 et soit B un mouvement brownien. On pose $X_t = B_t + \int_o^t H_s\, ds$ et on suppose qu'il existe un processus prévisible borné dans L^2 et Riemann-intégrable tel que :

$$\epsilon_s(t) = E[(s-t)^{-1}(B_s - B_t)(H_s - H_t - H'_t(B_s - B_t)) \mid \mathcal{F}_t]$$

tende uniformément vers 0 dans L^1 quand s tend vers t.

Alors $nu^{-1}\left(\sum_{i=0}^{n-1} E[(X_{u(i+1)/n} - X_{ui/n})^2 \mid \mathcal{F}_{ui/n}] - u\right)$ tend dans L^1 vers $\int_o^u H_s^2\, ds + \int_o^u H'_s\, ds$.

DEMONSTRATION. On pose $t_i = ui/n$. En développant $(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2$ on décompose la somme $nu^{-1} \sum_{i=0}^{n-1} E[(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 \mid \mathcal{F}_{t_i}]$ en trois parties que nous allons étudier séparément.

i) Comme B est une martingale de carré intégrable et que $[B,B]_t = t$, on a :

$$\sum_{\sigma_n} E[(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 \mid \mathcal{F}_{t_i}] = u.$$

ii) Montrons que $Z^n = nu^{-1} \sum_{\sigma_n} E[(\int_{t_i}^{t_{i+1}} H_s\, ds)^2 \mid \mathcal{F}_{t_i}]$ converge dans L^1 vers $\int_o^u H_s^2\, ds$. On désigne par λ la mesure de Lebesgue sur $[0,u]$.

Comme le processus H est borné dans $L^2(P)$, pour presque tout ω, $H_s(\omega)$ appartient à $L^2(\lambda)$. Le théorème de convergence des martingales entraine que pour presque tout ω $K_t^n = nu^{-1} \sum_{\sigma_n} \int_{t_i}^{t_{i+1}} H_s \, ds \; 1_{[t_i, t_{i+1}]}(t)$ converge dans $L^2(\lambda)$ vers H.
En développant $\int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(H_s - K_s^n\right)^2 ds$, on remarque que $\sum_{\sigma_n} \left|\int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(H_s^2 - (K_s^n)^2\right) ds\right|$ tend vers 0, P p.s. et même dans $L^1(P)$ car H est borné dans $L^2(P)$. Or :

$$E\left[\left|Z^n - \int_0^u H_s^2 \, ds\right|\right] \leq E\left[\sum_{\sigma_n} \left| n u^{-1} E\left[\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} H_s \, ds\right)^2 \middle| \mathcal{F}_{t_i}\right] - E\left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} H_s^2 \, ds \middle| \mathcal{F}_{t_i}\right]\right|$$

$$+ E\left[\sum_{\sigma_n} \left| E\left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} H_s^2 \, ds \middle| \mathcal{F}_{t_i}\right] - \int_{t_i}^{t_{i+1}} H_s^2 \, ds\right]\right| .$$

La première somme ci-dessus converge vers 0 car, en vertu de l'inégalité de Jensen, elle est majorée par $E\left[\sum_{\sigma_n} \left|\int_{t_i}^{t_{i+1}} \left((K_s^n)^2 - H_s^2\right) ds\right|\right]$ qui tend vers 0. Montrons maintenant que la deuxième somme tend aussi vers 0.
D'après [1], il existe une version mesurable de $E[H_s^2 \mid \mathcal{F}_{t_i}]$ si bien que

$$\sum_{\sigma_n} E\left[\left|\int_{t_i}^{t_{i+1}} H_s^2 \, ds - E\left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} H_s^2 \, ds \mid \mathcal{F}_{t_i}\right]\right|\right]$$

$$= \sum_{\sigma_n} E\left[\left|\int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(H_s^2 - E[H_s^2 \mid \mathcal{F}_{t_i}]\right) ds\right|\right.$$

$$\leq \sum_{\sigma_n} \int_{t_i}^{t_{i+1}} E\left[\left|H_s^2 - E[H_s^2 \mid \mathcal{F}_{t_i}]\right|\right] ds .$$

Cette somme converge vers 0 car H est borné dans $L^2(P)$ et H_s est $\mathcal{F}_s$-mesurable.
Ainsi Z^n converge dans $L^1(P)$ vers $\int_0^u H_s^2 \, ds$.

iii) Pour achever la démonstration du théorème, il reste à examiner les termes mixtes. Comme B est une martingale de carré intégrable et que H est borné dans $L^2(P)$, la formule d'intégration par parties montre que :

$$E\left[\left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right) \int_{t_i}^{t_{i+1}} H_s \, ds \mid \mathcal{F}_{t_i}\right] = E\left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} H_s \left(B_s - B_{t_i}\right) ds\right]$$

$$= \int_{t_i}^{t_{i+1}} E\left[H_s \left(B_s - B_{t_i}\right) \mid \mathcal{F}_{t_i}\right] ds .$$

Si on pose $\gamma_t(s) = H_s - H_t - H_t'\left(B_s - B_t\right)$, on a :

$$E\left[\left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right) \int_{t_i}^{t_{i+1}} H_s \, ds \mid \mathcal{F}_{t_i}\right] = \int_{t_i}^{t_{i+1}} E\left[B_s - B_{t_i}\right]^2 ds \, H_{t_i}'$$

$$+ \int_{t_i}^{t_{i+1}} E\left[\left(B_s - B_{t_i}\right) \gamma_{t_i}(s) \mid \mathcal{F}_{t_i}\right] ds .$$

Reprenant les notations du théorème, il vient :

$$E[|(B_s - B_{t_i})\gamma_{t_i}(s)|] \leq |s-t_i|\, E[|\varepsilon_{t_i}(s)|].$$

Comme H' est Riemann intégrable et borné dans $L^2(P)$, les sommes de Riemann $\sum_{\sigma_n} un^{-1} H'_{t_i}$ convergent dans L^1 vers $\int_0^u H'_s\, ds$. Ainsi :

$2nu^{-1} \sum_{\sigma_n} E[(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})\int_{t_i}^{t_{i+1}} H_s\, ds \,|\, \mathcal{F}_{t_i}]$ converge dans $L^1(P)$ vers $\int_0^u H'_s\, ds$.

Le théorème est établi.

REMARQUE. On peut noter que si X est une semimartingale continue appartenant à $\mathcal{S}^2$ telle que pour tout u, $nu^{-1}\left(\sum_{i=0}^{n-1} E[(X_{u(i+1)/n} - X_{ui/n})^2 | \mathcal{F}_{ui/n}] - u\right)$ converge dans L^1, alors $\langle X,X\rangle_u = u$ et la partie martingale de X est un mouvement brownien B. On pourrait sans doute montrer que $X_t = B_t + \int_0^t H_s\, ds$ où H est un processus prévisible vérifiant $\int_0^1 H_s^2\, ds < +\infty$. Ainsi X appartiendrait à la classe $W'(\mathcal{F})$ définie dans [2].

Nous allons maintenant examiner quelques cas particuliers du théorème ci-dessus. Les hypothèses du théorème sont évidemment vérifiées lorsque H est un processus déterministe, mesurable et borné. Dans ce cas $H' = 0$. D'ailleurs, si on examine de près la démonstration précédente, on peut remplacer l'hypothèse "H borné" par "de carré intégrable pour la mesure de Lebesgue" lorsque H est déterministe.

Voici un autre cas important où le théorème s'applique.

PROPOSITION. Soient H un processus prévisible borné et B un mouvement brownien. Posons $X_t = B_t + \int_0^t H_s\, ds$ et supposons qu'il existe un processus prévisible borné H' vérifiant :

$H_s - H_t - H'_t(X_s - X_t) = (X_t - X_s)\,\eta_t(s)$ où $\eta_t(s)$ tend vers 0 uniformément dans L^2.

Alors $\varepsilon_s(t) = E[(s-t)^{-1}(B_s - B_t)(H_s - H_t - H'_t(B_s - B_t)) \,|\, \mathcal{F}_t]$ tend uniformément vers 0 dans L^1 quand s tend vers t.

DEMONSTRATION. D'après les hypothèses de cette proposition il existe une constante α majorant $|H|$ et $|H'|$. Posons :

$$K_t(s) = (s-t)^{-1}(B_s - B_t)[H_s - H_t - H'_t(B_s - B_t)]$$

$$= (s-t)^{-1}[(B_s - B_t)H'_t \int_t^s H_u\, du + (B_s - B_t)^2 \eta_t(s) + (B_s - B_t)\int_t^s H_u\, du\, \eta_t(s)].$$

Or $(B_s - B_t)^2 (s-t)^{-1}$ est borné dans L^2 d'après les inégalités de Burkholder-Davis-Gundy tandis que $\eta_t(s)$ et $B_s - B_t$ tendent uniformément vers 0 dans L^2 quand s tend vers t. Ainsi $K_t(s)$ tend uniformément vers 0 dans L^1 et il en est de même a fortiori pour $E[K_t(s) \,|\, \mathcal{F}_t]$, ce qui achève la démonstration de la proposition ci-dessus.

La formule des accroissements finis nous donne immédiatement le :

COROLLAIRE. Si f est une fonction de classe C^1 à support compact ou si, plus généralement, f est de classe C^1, f et f' étant bornés, alors $X_t = B_t + \int_0^t f(X_s)\,ds$ vérifie les hypothèses du théorème ci-dessus.

REFERENCES

[1] STRICKER, C., YOR, M. : Calcul stochastique dépendant d'un paramètre. Z. W. 45, 109-133 (1978).

[2] STRICKER, C. : Quelques remarques sur les semimartingales gaussiennes et le problème de l'innovation. A paraitre.

Ajouté sur les épreuves : Nous allons montrer que la conjecture émise dans la remarque est correcte.

Faisons d'abord quelques remarques dans le cas déterministe. Soit λ la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$. f désigne une fonction à variation bornée sur $[0, 1]$ et $\sigma_n = \left(0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{2^n} = 1\right)$ est la $n^{\text{ième}}$ subdivision dyadique de $[0, 1]$. On pose $h_n(t) = 2^n \sum_{\sigma_n} \left(f(t_{i+1}) - f(t_i)\right) 1_{[t_i, t_{i+1}]}(t)$. Il est bien connu que h_n est une martingale discrète par rapport à sa filtration naturelle et qu'elle converge λ p.s. D'autre part, elle converge dans $L^1(\lambda)$ si et seulement si f est absolument continue. En particulier si f n'est pas absolument continue, la martingale h_n n'est pas uniformément intégrable et ne peut donc pas être bornée dans $L^2(\lambda)$. Enfin si $f(t) = \int_0^t h(s)\,ds$ et si h_n est bornée dans $L^2(\lambda)$, le lemme de Fatou entraine que $\int_0^1 h^2(s)\,ds$ est finie.

Revenons maintenant au cas général. Soit X une semimartingale continue appartenant à $\mathcal{S}^2$ telle que pour tout u, $n u^{-1}\left(\sum_{i=0}^{n-1} E\left[\left(X_{u(i+1)/n} - X_{ui/n}\right)^2 \mid \mathcal{F}_{ui/n}\right] - u\right)$ converge dans L^1. Alors $\langle X, X\rangle_u = u$ et la partie martingale de X est un mouvement brownien B : X = B + A. Comme $\sum_{i=0}^{n-1} E\left[\left(B_{u(i+1)/n} - B_{ui/n}\right)^2 \mid \mathcal{F}_{ui/n}\right] = u$, l'inégalité de Cauchy-Schwartz montre que la suite $n u^{-1} \sum_{i=0}^{n-1} E\left[\left(A_{u(i+1)/n} - A_{ui/n}\right)^2\right]$ est bornée. En prenant u = 1 et la sous-suite associée aux subdivisions dyadiques, les remarques ci-dessus montrent que $A_t = \int_0^t H_s\,ds$ avec $\int_0^t H_s^2\,ds < +\infty$.