

# SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

PAUL-ANDRÉ MEYER

## Un résultat d'approximation

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 18 (1984), p. 268-270

[http://www.numdam.org/item?id=SPS\\_1984\\_\\_18\\_\\_268\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SPS_1984__18__268_0)

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

UN RESULTAT D'APPROXIMATION

par P.A. Meyer

Soit  $(X_t)$  une quasimartingale. A toute subdivision  $\tau=(t_i)$  de  $[0,1]$  associons la somme

$$(1) \quad S_\tau(X) = \sum_i E[X_{t_{i+1}} - X_{t_i} | \mathbb{F}_{t_i}]$$

Il est bien connu que, lorsque le pas de la subdivision tend vers 0,  $S_\tau(X)$  converge faiblement dans  $L^1$  vers  $A_1$ , où  $A$  est le processus à variation finie dans la décomposition canonique  $X=X_0+M+A$ . Si l'on veut, ce résultat peut être énoncé sans parler de quasimartingales : on a  $S_\tau(X)=S_\tau(A)$ , et il s'agit d'un théorème d'approximation concernant les processus prévisibles à variation intégrable.

Dans son travail récent sur les semimartingales gaussiennes, Stricker a été amené à étudier la convergence des sommes (1) relatives à un processus  $X$  qui est bien une semimartingale spéciale, mais dont on ignore a priori s'il est ou non une quasimartingale. La démonstration de Stricker est délicate, et je pense qu'il y a grand intérêt à la traduire dans le langage de la "théorie générale" en la débarrassant des ses éléments "gaussiens". C'est le but de cette note.

Nous désignons par  $X$  une semimartingale indexée par  $[0,1]$  ( nous ne restreignons pas la généralité en supposant que  $X_0=0$  ). Nous posons pour toute subdivision  $\tau=(t_i)$  de  $[0,1]$

$$(2) \quad Q_\tau(X) = \sum_i (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 .$$

THEOREME. Supposons que les sommes  $\sqrt{Q_\tau(X)}$ , où  $\tau$  parcourt la suite des subdivisions dyadiques de  $[0,1]$ , soient uniformément intégrables. Alors  $X$  est spéciale - on désigne par  $M+A$  sa décomposition canonique - et la martingale locale  $M$  appartient à  $H^1$ . De plus  $X_t$  est intégrable pour  $t$  dyadique, et les sommes  $S_\tau(X)$  relatives aux subdivisions dyadiques convergent vers  $A_1$  au sens faible dans  $L^1$ .

L'aspect intéressant de cet énoncé est le caractère purement "quadratique" de l'hypothèse, et le caractère "linéaire" de la conclusion.  
DEMONSTRATION. L'hypothèse entraîne que  $[X,X]_1^{1/2}$  est intégrable, donc  $X$  est spéciale. D'après Probabilités et Potentiel VII,95,  $[A,A]_1^{1/2}$  et  $[M,M]_1^{1/2}$  sont intégrables, donc  $M$  est dans  $H^1$ . Il est clair que  $X_t$  est intégrable pour  $t$  dyadique, donc  $A_t=X_t-M_t$  l'est aussi. Soit  $H$  une v.a.

$\mathbb{F}_1$ -mesurable, bornée par 1 en valeur absolue. Introduisons la martingale  $H_t = E[H | \mathbb{F}_t]$ . Remarquons que  $S_\tau(X) = S_\tau(A)$ ; nous avons

$$E[HA_1] = E[HE_1(A_{t_{i+1}} - A_{t_i})] = E[\Sigma_i H_{t_{i+1}} (A_{t_{i+1}} - A_{t_i})]$$

de même  $E[HS_\tau(A)] = E[\Sigma_i H_{t_i} (A_{t_{i+1}} - A_{t_i})]$

et par conséquent tout revient à montrer que, le long de la suite des subdivisions dyadiques

$$(3) \quad E[\Sigma_i (H_{t_{i+1}} - H_{t_i})(A_{t_{i+1}} - A_{t_i})] \rightarrow 0.$$

Ces sommes convergent en probabilité vers  $[H, A]_1$ ; or  $H$  est une martingale,  $A$  un processus à variation finie prévisible, donc ( lemme de Yoeurp : PP VII.36 )  $[H, A]$  est une martingale locale nulle en 0. D'autre part, d'après une inégalité du type de Fefferman ( PP, VII.93-95 )

$$E\left[\int_0^1 |d[H, A]_s| \right] \leq c \|H\|_{\text{BMO}} E[[A, A]_1^{1/2}],$$

donc la martingale  $[H, A]$  est en fait à variation intégrable, et l'on a  $E[[H, A]_1] = 0$ . En définitive, ce qu'il nous faut montrer est l'intégrabilité uniforme des sommes

$$\Sigma_i (H_{t_{i+1}} - H_{t_i})(A_{t_{i+1}} - A_{t_i}).$$

Nous sommes partis de l'hypothèse de l'intégrabilité uniforme des sommes  $\sqrt{Q_\tau(X)}$ ; les sommes  $\sqrt{Q_\tau(M)}$  sont uniformément intégrables, parce que  $M$  appartient à  $H^1$ : en effet, on a  $M^* \in L^1$ , donc il existe une fonction de Young modérée  $G$  telle que  $E[G(M^*)] < \infty$ , et il existe une constante universelle  $c_G$  telle que

$$E[G([M, M]_1^{1/2})] \leq c_G E[G(M^*)]$$

Mais en appliquant cela aux martingales discrétisées de  $M$  sur les subdivisions dyadiques, on a aussi

$$E[G(Q_\tau(M)^{1/2})] \leq c_G E[G(M^*)]$$

et il suffit d'appliquer le lemme de La Vallée Poussin. Comme  $\sqrt{Q_\tau(A)} \leq \sqrt{Q_\tau(X)} + \sqrt{Q_\tau(M)}$ , les v.a. à gauche sont aussi uniformément intégrables.

Appliquant le lemme de La Vallée Poussin dans le sens non évident, nous choisissons une fonction de Young modérée ( encore notée  $G$  par économie ) telle que  $E[G(Q_\tau(A)^{1/2})]$  soit borné. Puis nous appliquons la remarque de Yor ( combinaison de Fefferman et Garsia-Neveu ) suivant laquelle l'inégalité de Fefferman, ou sa conséquence l'inégalité VII.(93.3) de PP, a lieu avec une fonction modérée sous la forme

$$E[G(\Sigma_i |H_{t_{i+1}} - H_{t_i}| |A_{t_{i+1}} - A_{t_i}|)] \leq c_G \|H\|_{\text{BMO}} E[G(Q_\tau(A)^{1/2})]$$

On conclut alors à nouveau par le lemme de La Vallée Poussin.

REMARQUES. 1) La situation étudiée par Stricker ( cas gaussien ) est plus simple, parce que les v.a.  $Q_T(X)$  sont bornées dans  $L^1$ , les v.a.  $\sqrt{Q_T(X)}$  bornées dans  $L^2$  par conséquent l'hypothèse est satisfaite. Mais on peut écrire, au lieu de Fefferman, une inégalité du type de Kunita-Watanabe : prenant  $r=3/2$ ,  $p=4$ ,  $q=4/3$  ( donc  $rq=2$  )

$$\begin{aligned} E[(\Sigma_i |H_{t_{i+1}} - H_{t_i}| |A_{t_{i+1}} - A_{t_i}|)^r] &\leq E[ Q_T(H)^{r/2} Q_T(A)^{r/2} ] \\ &\leq E[Q_T(H)^{rp/2}]^{1/p} E[Q_T(A)^{rq/2}]^{1/q} \end{aligned}$$

A droite, le premier facteur est borné ( $(H_t)$  est une martingale bornée ) et le second vaut  $E[Q_T(A)]^{1/q}$ , qui est aussi borné. Donc l'intégrabilité uniforme des sommes (3) est établie de manière bien plus élémentaire.

2) Peut on étendre ce résultat aux << processus de Dirichlet >> ( cf. Föllmer, Stochastic Integrals, proceedings of the Durham Symposium, LN 851, p. 477 ) ?

#### REFERENCE

C. STRICKER. Semimartingales gaussiennes. Application au problème de l'innovation. ZW 64, 1983, p. 303-312.

IRMA, 7 rue René Descartes  
67084 Strasbourg-Cedex