Photis Nobelis

Dérivabilité des fonctions aléatoires

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 18 (1984), p. 330-352
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1984__18__330_0>

DERIVABILITE DES FONCTIONS ALEATOIRES

par

Ph. NOBELIS

0. Introduction.

0.1. Dans [5] N. Kôno a donné une condition suffisante pour que presque toutes les trajectoires d'une fonction aléatoire à accroissements dans un espace L^p soient dérivables. Dans ce travail, nous montrons que l'on peut utiliser la méthode des "mesures majorantes" ([2],[7],[8]), qui permet d'étendre le résultat à un espace d'Orlicz quelconque. Nous montrons également, avec la technique introduite pour la continuité par M.G. Hahn et M. Klass [3] et par N. Kôno [4], que cette condition admet, dans les L^p, $p \geq 2$, une réciproque partielle. L'intérêt de ce type de résultats est l'utilisation de la méthode des "mesures majorantes" avec des accroissements d'ordre supérieur à un.

Dans la première partie nous établirons la condition suffisante générale. Puis, après avoir donné quelques corollaires, nous démontrons la condition nécessaire et suffisante.

0.2. Dans toute la suite, X désigne une fonction aléatoire définie sur un espace d'épreuves $(\Omega,\mathcal{A},P)$ et sur $([0,1],\mathcal{B},\lambda)$ où $\mathcal{A}$ est P-complète, $\mathcal{B}$ la tribu des Boréliens et λ la mesure de Lebesgue. Nous supposons que X est continue en probabilité et nous étudions une version séparable et $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-mesurable. Nous faisons également l'hypothèse qu'il existe une fonction de Young Φ, telle que X soit une une L_Φ-fonction aléatoire ; c'est-à-dire qu'il existe un nombre réel $\beta > 0$ tel que

$$\int_0^1 E\, \Phi(\beta X(t))\, dt < \infty \quad .$$

Nous notons, pour tout $\delta \in \mathbb{R}_*^+$, $Q(\delta)$ la Φ-norme de Luxemburg des accroissements d'ordre deux de X, à savoir :

$$Q(\delta) = \inf \{\alpha > 0 : \iint_{|u-v|<\delta} E\,\Phi[\frac{1}{\alpha}(X(u)-2X(\frac{u+v}{2})+X(v))]\,du\,dv < 1\} .$$

C'est une fonction croissante de δ. Dans [6] cette quantité ainsi que les espaces d'Orlicz L_Φ, sont étudiés de manière précise.

1. Une condition suffisante de dérivabilité.

1.1. Dans cette partie nous démontrons le résultat suivant :

THEOREME 1.1. Une condition suffisante pour qu'une L_Φ-fonction aléatoire X ait presque toutes ses trajectoires continument dérivables sur $[0,1]$ est que :

$$\int^{+\infty} Q(\delta^{-1})\, \Phi^{-1}(\delta^2)\, d\delta < \infty .$$

1.2. Dans la démonstration du théorème nous utilisons les notations et propriétés suivantes :

1.2.1. Pour tout nombre entier n et tout $t \in [0,1-2^{1-n}]$, nous posons :

$$C_n(t) = \{(u,v) : t \le u \le t+2^{-n} , 2u-t \le v \le u+2^{-n}\} ,$$

$$X_n(t) = 2^{3n}3 \iint_{C_n(t)} (X(v)-X(u))\,du\,dv .$$

Comme X est une L_Φ-fonction aléatoire $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$-mesurable, si

$$\Omega_1 = \{\omega : \Phi(\beta X(\omega,.)) \in L^1([0,1],_\lambda)\} ,$$

nous savons que $P(\Omega_1) = 1$ et pour tout $\omega \in \Omega_1$, $X_n(\omega,.)$ est bien définie. Le théorème de Fubini et des changements de variables adéquats nous donnent :

LEMME 1.2.1. Pour tout nombre $\delta > 0$, tout nombre entier n et tout nombre $t \in [0,1-2^{1-n}]$, on a :

i) $$\iint_{|u-v|<\delta} \Phi[X(u)-2X(\frac{u+v}{2}) + X(v)]\,du\,dv ,$$

$$= 4\int_0^{\frac{\delta}{2}} dh \int_0^{1-2h} \Phi[X(s+2h)-2X(s+h)+X(s)]\,ds ,$$

$$= 4\int_0^{\frac{\delta}{2}} dh \int_{2h}^{1} \Phi[X(s)-2X(s-h)+X(s-2h)]\,ds .$$

ii) $X_n(t) = 2^{3n}3 \int_0^{2^{-n}} dh \int_t^{t+h} (X(s+h)-X(s))\,ds$.

Toutes les intégrales précédentes sont finies pour $\omega \in \Omega_1$.

1.2.2. Soit $S = \{i2^{-n} : i = 0,1,\dots,2^n-2 \; ; \; n \in \mathbb{N}\}$; c'est une suite dense dans $[0,1]$. Pour tout $t \in [0,1[$, nous notons $(s(t,n),\ n \in \mathbb{N})$ la sous-suite de S liée à t de la manière suivante :

$$s(t,n) = \begin{cases} i2^{-n} , \text{ si } i2^{-n} \leq t < t(i+1)2^{-n} \text{ et } i \in \{0,1,\dots,2^n-3\} , \\ 1-2^{1-n} \text{ si } 1-2^{1-n} \leq t < 1 . \end{cases}$$

1.2.3. Nous notons :

$$\theta(u) = c\, I_{]-1,+1[}(u) \exp - \frac{1}{1-u^2} , \quad \text{avec} \int_{\mathbb{R}} \theta(u)\,du = 1 .$$

C'est une fonction de classe C^∞ à support $[-1,1]$. Elle permet de régulariser X ; soit $\varepsilon > 0$, pour tout $\omega \in \Omega_1$, tout $t \in [\varepsilon,1-\varepsilon]$ et tout nombre entier $\ell > \frac{1}{\varepsilon}$ nous posons :

$$Y_{(\ell)}(\omega,t) = \int_{t-\frac{1}{\ell}}^{t+\frac{1}{\ell}} X(\omega,u)\, \theta(\ell(t-u))\,\ell\, du ,$$

$$= \int_{-1}^{+1} X(\omega, t - \frac{u}{\ell})\, \theta(u)\, du .$$

Nous avons le résultat classique suivant :

LEMME 1.2.3. <u>Soit</u> $\varepsilon > 0$ <u>fixé. Pour tout nombre entier</u> $\ell > \frac{1}{\varepsilon}$, $Y_{(\ell)}$ <u>est une</u> L_Φ<u>-fonction aléatoire sur</u> $[\varepsilon,1-\varepsilon]$. <u>Pour tout</u> $\omega \in \Omega_1$, $Y_{(\ell)}(\omega,.)$ <u>est continument dérivable et converge dans</u> $L^1([\varepsilon,1-\varepsilon],_\lambda)$ <u>vers</u> X .

<u>Démonstration</u> : Soit β la constante associée à X ; de la convexité de Φ et du théorème de Fubini nous obtenons :

$$\int_{\epsilon}^{1-\epsilon} E\Phi(\beta\, Y_{(\ell)}(t))\, dt \le \int_{-1}^{+1} \theta(u)\, du \int_{\epsilon}^{1-\epsilon} E\Phi(\beta\, X(t-\tfrac{u}{\ell}))\, dt \quad ,$$

$$\le \int_{0}^{1} E\Phi(\beta\, X(t))\, dt < \infty \quad ,$$

pour tout $\ell > \frac{1}{\epsilon}$. La continuité de la dérivée de $Y_{(\ell)}$ est immédiate à partir des propriétés de θ . Pour la convergence, nous utilisons le fait que les fonction fonctions continues sont denses dans $L^1([0,1],_\lambda)$.

1.2.4. Pour tout $\delta > 0$, nous notons

$$\tilde{X}(\delta) = \iint_{|u-v|<\delta} \Phi[Q^{-1}(\delta)(X(u)-2X(\tfrac{u+v}{2}) + X(v))]\, du dv \ .$$

De la $\mathcal{G} \otimes \mathcal{B}$-mesurabilité de X , du théorème de Fubini, de celui de Beppo-Levi et de la définition de $\tilde{X}(\delta)$, nous déduisons :

LEMME 1.2.4. <u>Pour tout</u> $\delta > 0$, $\tilde{X}(\delta)$ <u>est une variable aléatoire dont l'espérance est majorée par</u> 1 . <u>De plus l'hypothèse du théorème 1 implique l'existence d'une partie</u> Ω_1' <u>de</u> Ω , $P(\Omega_1') = 1$, <u>telle que pour tout</u> $\omega \in \Omega_1'$, <u>la série de terme général</u>

$$2^n\, Q(2^{-n})\, \Phi^{-1}(2^{2n}\, \tilde{X}(\omega, 2^{-n}))$$

<u>est convergente et l'espérance du reste de cette série est majorée par</u> :

$$\sum_{n \ge n_0} 2^n\, Q(2^{-n})\, \Phi^{-1}(2^{2n}) \le 8 \int_{2^{n_0-1}}^{+\infty} Q(\delta^{-1})\, \Phi^{-1}(\delta^2)\, d\delta \quad .$$

Dans toute la suite nous noterons $\Omega_2 = \Omega_1 \cap \Omega_1'$.

1.2.5. Pour la démonstration du théorème 1.1., nous utiliserons les deux majorations suivantes :

LEMME 1.2.5.

i) <u>Pour tout</u> $t \in [0,1[$ <u>et tout nombre entier</u> n <u>tels que</u> $t \le 1-2^{1-n}$, <u>on a</u> :

$$|X_n(t) - X_{n+1}(t)| \le 2^{n-1}\, 9\, Q(2^{-n})\, \Phi^{-1}(2^{2n}\, \tilde{X}(2^{-n})) \quad .$$

ii) Pour tout $t \in [0,1[$ et tout nombre entier n tels que $t \leq 1-3.2^{-n}$, on a :

$$|X_n(t) - X_n(t+2^{-n})| \leq 2^n 3\, Q(2^{1-n})\ \Phi^{-1}(2^{2(n-1)}\ \tilde{X}(2^{1-n})) \quad .$$

Démonstration du lemme 1.2.5. : i) Du lemme 1.2.1. ii) nous déduisons :

$$X_n(t) - X_{n+1}(t) = 2^{3n}\, 3\, [\int_0^{2^{-n}} dh \int_t^{t+h} (X(s+h)-X(s))\,ds - 8\int_0^{2^{-(n+1)}} dh \int_t^{t+h} (X(s+h)-X(s))\,ds]$$

$$= 2^{3n}\, 3 \int_0^{2^{-n}} dh\, [\int_t^{t+h} (X(s+h)-X(s))\,ds - 4 \int_t^{t+\frac{h}{2}} (X(s+\frac{h}{2})-X(s))\,ds]$$

$$= 2^{3n}\, 3 \int_0^{2^{-n}} dh\, [\int_t^{t+\frac{h}{2}} (X(s+h)-X(s)-4X(s+\frac{h}{2})+4X(s))\,ds + \int_{t+\frac{h}{2}}^{t+h} (X(s+h)-X(s))\,ds] .$$

Dans la seconde intégrale on pose $s'+ \frac{h}{2} = s$. D'où

$$X_n(t) - X_{n+1}(t) = 2^{3n} 3 \int_0^{2^{-n}} dh \int_t^{t+\frac{h}{2}} (X(s+h)+3X(s)-5X(s+\frac{h}{2})+X(s+\frac{3h}{2}))\,ds$$

$$= 2^{3n} 3 \int_0^{2^{-n}} dh\, [\int_t^{t+\frac{h}{2}} (X(s+\frac{3h}{2})-2X(s+h)+X(s+\frac{h}{2}))\,ds + 3\int_t^{t+\frac{h}{2}} (X(s+h)-2X(s+\frac{h}{2}) +X(s))\,ds] .$$

Dans le première intégrale nous posons $s + \frac{h}{2} = s'$ et à partir de l'inégalité triangulaire nous avons :

$$|X_n(t)-X_{n+1}(t)| \leq 2^{3n} 9 \int_0^{2^{-n}} dh \int_t^{t+h} |X(s+h)-2X(s+\frac{h}{2})+X(s)|\,ds \quad ,$$

$$\leq 2^{3n+1} 9 \int_0^{2^{-(n+1)}} dh \int_t^{t+2h} |X(s+2h)-2X(s+h)+X(s)|\,ds \quad .$$

Comme Φ est convexe et

$$\int_0^{2^{-(n+1)}} dh \int_t^{t+2h} ds = 2^{-2(n+1)} \quad ,$$

de l'inégalité de Jensen nous déduisons :

$$|X_n(t)-X_{n+1}(t)| \le 2^{n-1}9\,Q(2^{-n})\,\Phi^{-1}\Big[2^{2n}4\int_0^{2^{-n}/2} dh \int_t^{t+2h} \Phi\Big(\frac{X(s+2h)-2X(s+h)+X(s)}{Q(2^{-n})}\Big)ds\Big] \quad .$$

Mais $t \le 1-2^{1-n}$ et $h \le 2^{-(n+1)}$ impliquent $t+2h \le 1-2h$; comme $t \ge 0$, le lemme 1.2.1. i) et le lemme 1.2.4. nous permettent de conclure.

ii) du lemme 1.2.1. ii), nous déduisons :

$$X_n(t) = 2^{3n}3\int_0^{2^{-n}} dh\,\Big[\int_0^h + \int_h^{t+h} - \int_0^t (X(s+h) - X(s))ds\Big]$$

$$= 2^{3n}3\int_0^{2^{-n}} dh\,\Big[\int_0^h (X(s+h)-X(s))ds + \int_0^t (X(s+2h)-2X(s+h)+X(s))ds\Big] \quad ,$$

où nous avons posé $s = s' + h$ dans la deuxième intégrale. La première intégrale ne dépend pas de t , donc par différence nous déduisons :

$$|X_n(t+2^{-n})-X_n(t)| \le 2^{3n}3\int_0^{2^{-n}} dh \int_t^{t+2^{-n}} |X(s+2h)-2X(s+h)+X(s)|\,ds.$$

Mais comme

$$\int_0^{2^{-n}} dh \int_t^{t+2^{-n}} ds = 2^{-2n} \quad ,$$

le même calcul que ci-dessus donne :

$$|X_n(t)-X_n(t+2^{-n})| \le 2^n 3\,Q(2^{1-n})\,\Phi^{-1}\Big[2^{2n}\int_0^{2^{-n}} dh \int_t^{t+2^{-n}} \Phi\Big[\frac{X(s+2h)-2X(s+h)+X(s)}{Q(2^{1-n})}\Big]ds\Big] \quad .$$

Mais $t \le 1-2^{-n}.3$ et $h \le 2^{-n}$ impliquent $t+2^{-n} \le 1-2h$; du lemme 1.2.1. i) et du lemme 1.2.4., nous déduisons le résultat annoncé.

1.3. <u>Démonstration du théorème 1.1.</u> : Celle-ci comporte trois étapes : convergence presque sûre de la suite $(X_n(s(.,n)),\ n \in \mathbb{N})$ vers une fonction aléatoire notée X_∞ , identification de cette dernière comme étant la dérivée de X , continuité presque sûre de X' .

1.3.1. Première étape, convergence presque sûre de $(X_n(s(.,n)),\ n \in \mathbb{N})$.

Soit $t \in [0,1[$ et considérons $(s(t,n), n \in \mathbb{N})$; nous avons

$$s(t,n) = i\,2^{-n} \Leftrightarrow t \in [2i2^{-(n+1)} ; (2i+1)2^{-(n+1)}[\cup [(2i+1)2^{-(n+1)} ; (2i+2)2^{-(n+1)}[.$$

Dans le premier de ces intervalles, du fait que $i \leq 2^n - 2$, le lemme 1.2.5. i) nous donne :

$$\begin{aligned} |X_n(s(t,n)) - X_n(s(t,n+1))| &\leq |X_n(i2^{-n}) - X_{n+1}(i2^{-n})| , \\ &\leq 2^{n-1} 9\, Q(2^{-n})\, \Phi^{-1}(2^{2n}\, \tilde{X}(2^{-n})) . \end{aligned}$$

Dans le second intervalle, les deux inégalités du lemme 1.2.5. impliquent :

$$\begin{aligned} |X_n(s(t,n)) - X_{n+1}(s(t,n+1))| &= |X_n(i2^{-n}) - X_{n+1}(i2^{-n} + 2^{-(n+1)})| , \\ &\leq |X_n(i2^{-n}) - X_{n+1}(i2^{-n})| + |X_{n+1}(i2^{-n}) + X_{n+1}(i2^{-n} + 2^{-(n+1)})| , \\ &\leq (\tfrac{9}{2} + 6)\ 2^n\, Q(2^{-n})\, \Phi^{-1}(2^{2n}\, \tilde{X}(2^{-n})) ; \end{aligned}$$

la dernière expression majore donc $|X_n(s(t,n)) - X_{n+1}(s(t,n+1))|$ dans tous les cas. Du lemme 1.2.4., nous déduisons, pour tout $\omega \in \Omega_2$ et tout $\eta > 0$, l'existence d'un nombre entier m_o tel que, pour tout $m \geq m_o$ et tout $t \in [0,1[$, nous avons :

$$\sum_{n \geq m} |X_n(\omega, s(t,n)) - X_{n+1}(\omega, s(t,n+1))| \leq 21 \sum_{n \geq m} 2^{n-1} Q(2^{-n}) \Phi^{-1}(2^{2n} \tilde{X}(2^{-n})) \leq \eta .$$

Donc pour tout $\omega \in \Omega_2$, la suite $(X_n(s(t,n)), n \in \mathbb{N})$ converge, pour tout $t \in [0,1[$. Nous posons

$$X_\infty(\omega,t) = \lim_{n \to \infty} X_n(\omega, s(t,n)) .$$

1.3.2. Deuxième étape, identification de X_∞.

Soit $\varepsilon_o > 0$ fixé. Pour tout $\ell > \frac{1}{\varepsilon_o}$, tout $t \in [\varepsilon_o, 1-\varepsilon_o]$ et tout nombre entier n tel que $\varepsilon_o > \frac{1}{\ell} + 2^{1-n}$, nous posons

$$Y_{(\ell),n}(t) = 2^{3n}3 \iint_{C_n(t)} Y_{(\ell)}(u) - Y_{(\ell)}(v))du\, dv \quad ,$$

$$= 2^{3n}3 \int_0^{2^{-n}} dh \int_t^{t+h} (Y_{(\ell)}(s+h) - Y_{(\ell)}(s))ds \quad ,$$

$$= 2^{3n}3 \int_0^{2^{-n}} dh \int_t^{t+h} ds \, [\int_{s+h-\frac{1}{\ell}}^{s+h+\frac{1}{\ell}} X(u)\theta(\ell(s+h-u))\ell du - \int_{s-\frac{1}{\ell}}^{s+\frac{1}{\ell}} X(u)\theta(\ell(s-u))\ell du] \quad .$$

Ces intégrales sont finies pour $\omega \in \Omega_2$, ceci en vertu des conditions imposées sur ϵ, ℓ, n et t . D'après le lemme 1.2.3., pour tout $\omega \in \Omega_2$, $Y_{(\ell)}(\omega,.)$ est continument dérivable. Montrons que, pour tout $\omega \in \Omega_2$:

$$\lim_{n\to\infty} Y_{(\ell),n}(\omega, s(t,n)) = Y'_{(\ell)}(t) \quad .$$

Le théorème des accroissements finis implique pour tout $\omega \in \Omega_2$, tout $\ell > \frac{1}{\epsilon_o}$, tout nombre entier $n > \log_2 \frac{\ell}{\ell\epsilon_o - 1}$, tout $t \in [\epsilon_o, 1-\epsilon_o]$ et tout couple $(u,v) \in C_n(t)$, l'existence d'un nombre $\mu \in]0,1[$ tel que :

$$Y_{(\ell)}(\omega,v) - Y_{(\ell)}(\omega,u) = (v-u)\, Y'_{(\ell)}(\omega, u+\mu(v-u)) \quad .$$

Mais $Y'_{(\ell)}(\omega,t)$ est uniformément continue sur $[\epsilon_o, 1-\epsilon_o]$; donc pour tout $\omega \in \Omega_2$, tout $\eta > 0$, il existe $\epsilon_1 > 0$, tel que

$$|s-t| < \epsilon_1 \Rightarrow |Y'_{(\ell)}(\omega,t) - Y'_{(e)}(\omega,s)| < \eta \quad .$$

De ces deux relations nous déduisons, pour tout $\omega \in \Omega_2$, tout $\eta > 0$, tout $\ell > \frac{1}{\epsilon_o}$ et tout nombre entier $n > \max(\mathrm{Log}_2 \frac{\ell}{\ell\epsilon_o - 1}, \mathrm{Log}_2 \frac{3}{\epsilon_1})$, les majorations suivantes :

$$|Y_{(\ell),n}(s(t,n)) - Y'_{(\ell)}(t)| \le |2^{3n}3 \iint_{C_n(s(t,n))} (Y_{(\ell)}(v) - Y_{(\ell)}(u))dudv - Y'_{(\ell)}(t)| \quad ,$$

$$\le 2^{3n}3 \iint_{C_n(s(t,n))} (v-u)|Y'_{(\ell)}(u+\mu(v-u)) - Y'_{(\ell)}(t)|dudv \quad ,$$

$$\le \eta \quad ,$$

pour tout $t \in [\varepsilon_o, 1-\varepsilon_o]$; en effet il suffit de remarquer que pour tout couple $(u,v) \in C_n(s(t,n))$ nous avons :

$$\begin{aligned} |s(t,n) - u - \mu(v-u)| &\leq (v-u) + (u-s(t,n)) \quad , \\ &\leq 2^{-n} + (u-t) + (t-s(t,n)) \quad , \\ &\leq 3\, 2^{-n} < \varepsilon_1 \quad , \end{aligned}$$

et

$$2^{3n_3} \iint_{C_n(s(t,n))} (v-u)\, dvdu = 1 \quad .$$

Donc presque sûrement, pour tout $\ell > \frac{1}{\varepsilon_o}$, la suite $(Y_{(\ell),n}(s(\cdot,n)), n > \mathrm{Log}_2 \frac{\ell}{\ell\varepsilon_o - 1})$ converge, uniformément sur $[\varepsilon_o, 1-\varepsilon_o]$, vers $Y'_{(\ell)}$. Montrons à présent que presque sûrement la suite $(Y'_{(\ell)}, \ell > \frac{1}{\varepsilon_o})$ converge, uniformément sur $[\varepsilon_o, 1-\varepsilon_o]$, vers $X_\infty(\cdot)$. Soit $\ell_o > \frac{2}{\varepsilon_o}$ et $q_o > \max(\mathrm{Log}_2 \frac{4}{\varepsilon_o} , \mathrm{Log}_2 \frac{3}{\varepsilon_1})$; de ce qui précède et de la 1ère étape nous déduisons, pour tout $\omega \in \Omega_2$, pour tout couple de nombre entiers (ℓ,q) vérifiant $\ell \geq \ell_o$ et $q \geq q_o$, et pour tout $t \in [\varepsilon_o, 1-\varepsilon_o]$:

$$\begin{aligned} |Y'_{(\ell)}(t) - X_\infty(t)| &\leq \sum_{n \geq q} |(Y_{(\ell),n}(s(t,n)) - X_n(s(t,n)) - (Y_{(\ell),n+1}(s(t,n+1)) - X_{n+1}(s(t,n+1)))| \\ &\quad + |Y_{(\ell),q}(s(t,q)) - X_q(s(t,q))| \quad , \\ &\leq \sum_{n \geq q} |X_n(s(t,n)) - X_{n+1}(s(t,n+1))| + \\ &\quad + \sum_{n \geq q} |Y_{(\ell),n}(s(t,n)) - Y_{(\ell),n+1}(s(t,n+1))| + \\ &\quad + |Y_{(\ell),q}(s(t,q)) - X_q(s(t,q))| \quad , \\ &\leq 42 \sum_{n \geq q} 2^{n-1} Q(2^{-n}) \Phi^{-1}(2^{2n} \widetilde{X}(2^{-n})) + |Y_{(\ell),q}(s(t,q)) - X_q(s(t,q))| \quad . \end{aligned}$$

La majoration de $|X_n(s(t,n)) - X_{n+1}(s(t,n+1))|$ est celle obtenue lors de la 1ère étape ; pour $|Y_{(\ell),n}(s(t,n)) - Y_{(\ell),n+1}(s(t,n+1))|$, le calcul est analogue, nous utilisons le fait que Φ est convexe, que $\int_{-1}^{+1} \theta(u)\,du = 1$ et que $\ell_o > \frac{2}{\varepsilon_o}$ et

$\frac{\varepsilon_o}{2} > 2^{1-q_o}$. La somme obtenue est, d'après le lemme 1.2.4., le reste d'une série convergente ; nous avons :

$$\forall\ \omega \in \Omega_2\ ,\ \forall\ \eta > 0\ ,\ \exists\ q_1 (\geq q_o)\ \text{ tel que}$$

$$q \geq q_1 \Rightarrow |Y'_{(\ell)}(\omega,t) - X_\infty(\omega,t)| \leq \frac{\eta}{2} + |Y_{(\ell),q}(\omega,s(t,q)) - X_q(\omega,s(t,q))| \quad ,$$

et ceci pour tout $\ell > \ell_o$ et $t \in [\varepsilon_o, 1-\varepsilon_o]$. Pour $\eta > 0$ donné fixons un nombre entier $q > q_1$. Un calcul simple nous donne, pour tout $\ell > \ell_o$:

$$|Y_{(\ell),q}(s(t,q)) - X_q(s(t,q))| \quad ,$$

$$\leq 2^{3q}3 \int_0^{2^{-q}} dh \int_{s(t,q)}^{s(t,q)+h} |Y_{(\ell)}(s+h) - X(s+h) + X(s) - Y_{(\ell)}(s)|\,ds \quad ,$$

$$\leq 2^{3q}3 \int_0^{2-q} dh \int_{s(t,q)}^{s(t,q)+2h} |Y_{(\ell)}(s) - X(s)|\,ds \quad ,$$

$$\leq 2^{2q}3 \int_{s(t,q)}^{s(t,q)+2^{1-q}} |Y_{(\ell)}(s) - X(s)|\,ds \quad .$$

Mais comme $t \in [\varepsilon_o, 1-\varepsilon_o]$ et

$$s(t,q) = i2^{-q} \Leftrightarrow i2^{-q} \leq t < (i+1)2^{-q} \quad ,$$

il est facile de voir que les conditions $\varepsilon_o > 2^{2-q_o}$ et $q > q_o$, impliquent :

$$s(t,q) + 2^{1-q} \leq 1 - \frac{\varepsilon_o}{2} \quad ,$$

$$s(t,q) \geq \frac{\varepsilon_o}{4} \quad .$$

D'où, à l'aide du lemme 1.2.3., pour tout $\omega \in \Omega_2$, pour tout $\eta > 0$, nous obtenons l'existence d'un nombre entier $\ell_1 = \ell_1(\omega,\eta,\varepsilon_o,q_1,q)$, $\ell_1 > \ell_o$, tel que :

$$\ell > \ell_1 \Rightarrow |Y'_{(\ell)}(\omega,t) - X_\infty(\omega,t)| \leq \frac{\eta}{2} + 2^{2q}3 \int_{\frac{\varepsilon_o}{4}}^{1-\frac{\varepsilon_o}{4}} |Y_{(\ell)}(\omega,s) - X(\omega,s)|\,ds \leq \eta \quad ,$$

uniformément en $t \in [\varepsilon_o, 1-\varepsilon_o]$. Donc $(Y'_{(\ell)}(.), \ell > \frac{1}{\varepsilon_o})$ converge presque sûrement vers $X_\infty(.)$ uniformément en $t \in [\epsilon_o, 1-\epsilon_o]$. Du lemme 1.2.3. et du théorème de Fubini nous avons, pour tout $\omega \in \Omega_2$, l'existence d'un ensemble $T \subset [0,1]$, $\lambda(T) = 1$, tel que pour tout $t \in T$:

$$\lim_{\ell \to \infty} Y_{(\ell)}(\omega,t) = X(\omega,t) \quad .$$

Mais ces deux conditions, à savoir pour tout $\omega \in \Omega_2$, il existe t $t_o \in [\epsilon_o, 1-\epsilon_o]$ tel que $(Y_{(\ell)}(\omega,t_o), \ell > \frac{1}{\epsilon_o})$ converge et $(Y'_{(\ell)}(\omega,.), \ell > \frac{1}{\epsilon_o})$ converge, uniformément en $t \in [\epsilon_o, 1-\epsilon]$, impliquent :

i) $(Y_{(\ell)}(\omega,.), \ell > \frac{1}{\epsilon_o})$ converge, uniformément en $t \in [\epsilon_o, 1-\epsilon_o]$ et

ii) la limite est dérivable et sa dérivée est égale à $\lim_{\ell\to\infty} Y'_{(\ell)}(\omega,.)$ sur $[\epsilon_o, 1-\epsilon_o]$.

Or les f.a. $(Y_{(\ell)}, \ell \in \mathbb{N})$ sont presque sûrement à trajectoires continues et leur limite est presque sûrement λ-presque partout égale à $X(t)$. De la séparabilité de cette dernière nous déduisons l'existence d'une partie Ω_3 de $\Omega, P(\Omega_3) = 1$, incluse dans Ω_2 , telle que pour tout $\omega \in \Omega_3$, pour tout $t \in [\epsilon_o, 1-\epsilon_o]$, $X(\omega,t)$ est la limite de $(Y_{(\ell)}(\omega,t), \ell > \frac{1}{\epsilon})$. Du point ii) ci-dessus nous obtenons alors, pour tout $\omega \in \Omega_3$, la dérivabilité de X , et pour tout $t \in [\epsilon_o, 1-\epsilon_o]$

$$X'(\omega,t) = X_\infty(\omega,t) \quad .$$

Le nombre ϵ_o étant arbitrairement petit, la relation précédente est vraie sur $]0,1[$ et nous posons, pour tout $\omega \in \Omega_3$, $[\frac{d}{dt} X(\omega,t)]_{t=0} = X_\infty(\omega,0)$. En procédant de manière analogue avec une approximation par valeurs inférieures de $X'(\omega,t)$, nous obtenons sa valeur au point $t = 1$. Ceci achève la démonstration de l'existence, presque sûrement, de la dérivée de X .

1.3.3. Troisième étape, continuité presque sûre de $X'(t)$.

En fait nous avons un résultat plus fort :

PROPOSITION 1.3.3. Soit ρ une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$, positive croissante, pour tout nombre entier q , on a :

$$E[\sup_{0<|u-v|\leq 2^{-q}} |\frac{X'(u)-X'(v)}{\rho(4|u-v|)}|] \leq 192\int_{2^{q-1}}^{+\infty} \frac{Q(\delta^{-1})}{\rho(\delta^{-1})} \Phi^{-1}(\delta^2)d\delta \quad .$$

Cette majoration nous donne une condition suffisante pour que presque toutes les trajectoires de $X'(t)$ soient ρ-Lipschitziennes. La démonstration est analogue à celle qui se trouve dans [8] , à partir de la relation, pout tout $\omega \in \Omega_3$:

$$|X'(u)-X'(v)| \leq |X_q(s(u,q))-X_q(s(v,q))| +$$

$$+ \sum_{n\geq q} |X_n(s(u,n))-X_{n+1}(s(u,n+1))|+|X_n(s(v,n))-X_{n+1}(s(v,n+1))| \quad .$$

En prenant $\rho(u) = 1$, l'hypothèse sur l'intégrale nous permet de conclure la démonstration du Théorème 1.1.

2. Remarques.

Nous notons $Q^{(1)}(\delta)$ la Φ-norme de Luxemburg des accroissements d'ordre un de X , c'est-à-dire :

$$Q^{(1)}(\delta) = \inf\{\alpha > 0 : \iint_{|s-t|<\delta} E\,\Phi[\frac{X(s)-X(t)}{\alpha}]ds\ dt < 1\} \quad .$$

Nous avons :

COROLLAIRE 2.1. Soit X une L_Φ-fonction aléatoire telle que :

$$\int^{+\infty} Q^{(1)}(\delta^{-1})\Phi^{-1}(\delta^2)d\delta < \infty \quad .$$

Alors on a les propriétés suivantes :

i) la fonction aléatoire X est presque sûrement à trajectoires Lipschitziennes d'ordre un,

ii) et presque sûrement continument dérivable.

La première propriété est démontrée dans [8] . Pour la seconde, il suffit de remarquer que

$$Q(\delta) \leq 4\, Q^{(1)}(\tfrac{\delta}{2}) \quad ,$$

et que

$$\int^{+\infty} Q(\delta^{-1})\Phi^{-1}(\delta^2)d\delta \leq 96 \int^{+\infty} Q^{(1)}(\delta^{-1})\Phi^{-1}(\delta^2)d\delta \quad ,$$

nous appliquons ensuite le théorème 1.1. .

Ce corollaire nous montre que la "meilleure" condition suffisante pour qu'une fonction aléatoire admette presque sûrement une dérivée d'ordre r continue, s'exprimera par une intégrale sur la norme des accroissements d'ordre au moins égal à $r+1$.

Pour le cas particulier où $\Phi(x) = |x|^p$, $p \geq 1$, nous avons le résultat de N. Kôno [5] :

COROLLAIRE 2.2. Soit X une L_p-fonction aléatoire, $p \geq 1$. Une condition suffisante pour que presque toutes les trajectoires de X soient continument dérivables est que :

$$\int^{\infty} \Big[\iint_{|s-t|<\delta^{-1}} E\big|X(s)-2X(\tfrac{s+t}{2})+X(t)\big|^p ds\,dt\Big]^{\frac{1}{p}} \delta^{\frac{2}{p}}\, d\delta < \infty \quad .$$

Il suffit, pour le voir, de calculer la norme Q pour une fonction puissance et d'appliquer le théorème 1 .

Pour les fonctions de Young de type puissance, cette condition est la meilleure possible dans la mesure où nous allons montrer une réciproque partielle.

3. Une condition nécessaire et suffisante.

Nous avons le résultat suivant :

THEOREME 3.1. Soit f une fonction définie sur R^+ telle que $\frac{f(x)}{x}$ soit croissante et tende vers 0 quand x tend vers 0 et que $\frac{f(x)}{x^2}$ soit décroissante continue. Soit un nombre réel $p \geq 2$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

i) Toute L_p-fonction aléatoire X , définie sur un espace d'épreuves $(\Omega,\mathcal{G},p)$ et sur $([0,1],\mathcal{B},\lambda)$ telle que

$$(*) \qquad E\big|X(s)-2X(\tfrac{s+t}{2}) + X(t)\big|^p \leq f^p(|s-t|) \ , \quad s,t \in [0,1] \ ,$$

est presque sûrement à trajectoires continument dérivables.

ii) La fonction f vérifie :

$$\int^{+\infty} f(\delta^{-1})\, \delta^{\frac{1}{p}}\, d\delta < \infty \quad .$$

Démonstration : La croissance de f, la condition (*) et le lemme 1.2.1.i), impliquent :

$$\iint_{|s-t|<\delta^{-1}} E\left|X(s)-2X\left(\frac{s+t}{2}\right)+X(t)\right|^p ds\,dt \le 4\int_0^{\frac{\delta^{-1}}{2}} dh \int_0^{1-2h} f^p(2h)\,ds ,$$

$$\le 4\delta^{-1} f^p(\delta^{-1})\left(1-\frac{\delta^{-1}}{2}\right) .$$

Du corollaire 2.2., nous obtenons alors le fait que la condition ii), entraine i) . Pour montrer la réciproque, nous supposons que l'intégrale de ii), diverge ; nous posons alors $(\Omega,\mathcal{G},p) = ([0,1],\mathcal{B},\lambda)$ et

$$X(\omega,t) = c \sum_{n\ge 1} \alpha_n \sin 2\pi n(\omega-t) .$$

La constante c et la suite $(\alpha_n , n \in \mathbb{N})$ seront choisies telles que X soit une L_p-fonction aléatoire, vérifiant la condition (*) , dont toutes les trajectoires sont continues mais non dérivables en un point.

La croissance de $x^2 f(x^{-1})$, implique :

$$\int_1^x f(\delta^{-1})\,\delta^{\frac{1}{p}}\,d\delta \le x^2 f(x^{-1}) \int_1^x \delta^{\frac{1}{p}-2}\,d\delta ,$$

$$\le \frac{p}{p-1}\, x^2 f(x^{-1})\left(1-\frac{1}{x^{\frac{p}{p-1}}}\right) .$$

Comme $p \ge 2$, la divergence de l'intégrale implique $\lim_{x\to+\infty} x^2 f(x^{-1}) = +\infty$. Nous pouvons alors définir sans ambiguité la suite :

$$t_o = 1 , \quad t_n = \sup\{x : x^2 f(x^{-1}) \le 2^{2n} f(1)\} \quad n\ge 1 .$$

Mais $x^2 f(x^{-1})$ est croissante, continue, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n^2 f(t_n^{-1}) = 2^{2n} f(1)$, et la suite $(t_n, n \in \mathbb{N})$ est croissante ; de plus

$$(2t_n)^2 f((2t_n)^{-1}) \le 4t_n^2 f(t_n^{-1}) = 4\, 2^{2n} f(1) = t_{n+1}^2\, f(t_{n+1}^{-1}) \quad ;$$

c'est-à-dire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2t_n \le t_{n+1}$. Soit M une variable aléatoire réelle dont la loi vérifie :

$$P(M > t) = \begin{cases} P(M> t_n)\dfrac{2t_n - t}{t_n} + P(M> t_{n+1})\dfrac{t-t_n}{t_n} & , \ t \in [t_n, 2t_n] \ , \\ P(M> t_{n+1}) = \left(\dfrac{t_{n+1} f(t_{n+1}^{-1})}{f(1)}\right)^p = \left(\dfrac{2^{2n}}{t_n}\right)^p & , \ t \in [2t_n, t_{n+1}[\ . \end{cases}$$

Nous avons $P(M > 1) = 1$ et

LEMME 3.2. La variable aléatoire M vérifie :

i) Il existe une constante c_1 telle que :

$$(E[M_\wedge t]^p)^{\frac{1}{p}} \le c_1 \ t^2 f(t^{-1}) \quad .$$

ii) L'intégrale

$$\int_1^{+\infty} P^{\frac{1}{p}} (M > t) \ t^{\frac{1}{p} - 1} \ dt \ ,$$

diverge.

Démonstration du lemme 3.2. : Pour t donné, il existe un nombre entier n tel que $t_n \le t < t_{n+1}$, d'où

$$E[M_\wedge t]^p = t^p P(M> t) + \int_1^t M^p dP = 1 + \int_1^t px^{p-1} \ P(M> x) \ dx$$

$$\le 1 + \int_1^{t_{n+1}} px^{p-1} \ P(M> x) dx \quad .$$

En décomposant l'intervalle $[1, t_{n+1}]$, par définition de $P(M> t)$, nous déduisons :

$$E[M_\wedge t]^p \le 1 + \sum_{K=1}^{n+1} p\, P(M > t_{K+1}) \int_{t_{K-1}}^{2t_{K-1}} (2x^{p-1} - \frac{x^p}{t_{K-1}})\,dx$$

$$+ pP(M > t_K) \int_{t_{K-1}}^{2t_{K-1}} (\frac{x^p}{t_{K-1}} - x^{p-1})\,dx + p\,P(M > t_K) \int_{2t_{K-1}}^{t_K} x^{p-1}\,dx \quad ,$$

$$= 1 + \sum_{K=1}^{n+1} P(M > t_{K-1}) t_{K-1}^p [2^{p+1} - \frac{2^{p+1}p}{p+1} - 2 + \frac{p}{p+1}]$$

$$+ P(M > t_K) t_{K-1}^p [\frac{2^{p+1}p}{p+1} - 2^p - \frac{p}{p+1} + 1] + P(M > t_K)[t_K^p - 2^p t_{K-1}^2] \quad ,$$

$$\le 1 + \sum_{K=1}^{n+1} P(M > t_{K-1}) t_{K-1}^p [\frac{2^{p+1} - 2 - p}{p+1} + \frac{2^p(p-1)+1}{p+1}] + P(M > t_K) t_K^p \quad ,$$

$$= 1 + \sum_{K=1}^{n+1} P(M > t_{K-1}) t_{K-1}^p (2^p - 1) + P(M > t_K) t_K^p \quad ,$$

où nous avons utilisé des majorations simples. La construction de (t_n) et de M , implique alors

$$E[M_\wedge t]^p \le 2^p \sum_{K=0}^{n+1} t_K^p\, P(M > t_K) = 2^p \sum_{K=0}^{n+1} 2^{2Kp} \quad ,$$

$$\le \frac{2^{5p}}{2^p - 1}\, 2^{2np} = \frac{2^{5p}}{(2^p-1) f^p(1)} (t_n^2\, f(t_n^{-1}))^p \quad ,$$

$$\le (c_1\, t^2 f(t^{-1}))^p \quad ,$$

ou nous avons utilisé la croissance de $x^2 f(x^{-1})$. Ceci achève la démonstration du du premier point.

ii) De manière triviale nous avons :

$$\int_1^{+\infty} P^{\frac{1}{p}}(M>t)\,t^{\frac{1}{p}-1}\,dt = \sum_{K=1}^{+\infty}\int_{t_{K-1}}^{t_K} P^{\frac{1}{p}}(M>t)\,t^{\frac{1}{p}-1}\,dt \;,$$

$$\geq \sum_{K=1}^{+\infty} P^{\frac{1}{p}}(M>t_K)\,p\,(t_K^{\frac{1}{p}} - t_{K-1}^{\frac{1}{p}}) \;,$$

$$\geq p\left(1-\frac{1}{2^{1/p}}\right)\sum_{K=1}^{+\infty} t_K^{\frac{1}{p}}\, P^{\frac{1}{p}}(M>t_K) \;,$$

$$= p\left(1-\frac{1}{2^{1/p}}\right)\sum_{K=1}^{+\infty} t_K^{\frac{1}{p}-1}\, 2^{2K} \;,$$

$$= \frac{p}{4f(1)}\left(1-\frac{1}{2^{1/p}}\right)\sum_{K=1}^{+\infty} t_K^{\frac{1}{p}-1}\, t_{K+1}^2\, f(t_{K+1}^{-1}) \;.$$

Comme $x^2 f(x^{-1})$ est croissante,

$$\int_{t_K}^{t_{K+1}} f(t^{-1})\,t^{\frac{1}{p}}\,dt \leq t_{K+1}^2\, f(t_{K+1}^{-1})\int_{t_K}^{t_{K+1}} t^{\frac{1}{p}-1}\,dt \;,$$

$$\leq \frac{p}{p-1}\, t_{K+1}^2\, f(t_{K+1}^{-1})\, t^{\frac{1}{p}-1} \;,$$

ce qui donne le résultat annoncé.

Par la suite nous utilisons le résultat suivant :

LEMME 3.3. (Boas [1]). Soit (a_n) une suite de nombres réels positifs, pour $p>1$, on pose $g_n^p = \sum_{K\geq n} a_K^p\, K^{p-2}$. Il existe alors des constantes c_2 et c_2' , qui dépendent de p telles que :

i) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{g_n}{n^{1-1/p}} \geq c_2 \sum_{n\geq 1} a_n$,

ii) si les (a_n) sont décroissants alors

$$\sum_{n\geq 1} \frac{g_n}{n^{1-1/p}} \leq c_2' \sum_{n\geq 1} a_n \;.$$

Les deux lemmes précédents nous permettent, à présent, de construire la suite (a_n) :

LEMME 3.4. (Kôno [4]). Pour tout nombre entier n, on pose :

$$b_n^p = P(M > n) \quad .$$

Il existe alors une suite (g_n) telle que :

i) Pour tout $n \geq 1$, $g_n \leq b_n$.

ii) Pour tout $n \geq 1$, si on pose $a_n = (g_n^p - g_{n+1}^p)^{1/p} n^{2/p-1}$, on

définit une suite décroissante à termes positifs.

iii) La série de terme général $g_n n^{1/p-1}$ diverge.

iv) La série de terme général a_n diverge.

v) Pour tout nombre entier j on a :

$$\sum_{K=1}^{j} a_K^p K^{2p-2} + j^p \sum_{K>j} a_K^p K^{p-2} \leq \mathbb{E}[M_\wedge j]^p \quad .$$

Démonstration du Lemme 3.4. Nous notons (g_n^p) le plus grand minorant convexe de la suite (b_n^p). C'est-à-dire $g_n^p = b_n^p$ pour certaines valeurs de n et g_n^p est linéaire entre ces valeurs. La propriété i) et le fait que les a_n soient positifs découlent de la décroissance des g_n. La connexité de (g_n^p) implique :

$$\left(\frac{1}{n^{p-2}} + \frac{1}{(n+1)^{p-2}}\right)^{-1}\left(\frac{1}{n^{p-2}} g_n^p + \frac{1}{(n+1)^{p-2}} g_{n+2}^p\right) \geq g^p_{\left(\frac{\frac{n}{n^{p-2}} + \frac{n+2}{(n+1)^{p-2}}}{\frac{1}{n^{p-2}} + \frac{1}{(n+1)^{p-2}}}\right)}$$

Il est alors facile de voir que l'indice du 2ème membre est inférieur à $n+1$, ce qui nous donne la décroissance des (a_n) et la propriété ii) .

iii) Soit r et s deux indices ou consécutivement $g_r^p = b_r^p$ et $g_s^p = b_s^p$. Alors pour $n \in \{r,\ldots,\frac{r+s}{2}\}$ nous avons :

$$g_n^p \geq \frac{1}{2} g_r^p + \frac{1}{2} g_s^p = \frac{1}{2}(b_r^p + b_s^p) \geq \frac{1}{2} b_r^p \geq \frac{1}{2} b_n^p \quad ;$$

d'où

$$\sum_{n=r}^{s} \frac{b_n}{n^{1-1/p}} \le 2 \sum_{n=r}^{\frac{r+1}{2}} \frac{b_n}{n^{1-1/p}} \le 2^{\frac{p+1}{p}} \sum_{n=r}^{\frac{r+s}{2}} \frac{g_n}{n^{1-1/p}}$$

$$\le 2^{\frac{p+1}{p}} \sum_{n=r}^{s} \frac{g_n}{n^{1-1/p}} \quad .$$

Comme

$$\int_1^{+\infty} P^{1/p}(M > t)t^{1/p-1}\, dt \le \sum_{n \ge 1} \frac{b_n}{n^{1-1/p}} \quad ,$$

le lemme 3.2.ii) nous donne le résultat.

Le lemme 3.3. ii), implique immédiatement la quatrième propriété.

v) Par construction des (g_n) nous avons

$$\sum_{K=1}^{j} a_K^p K^{2p-2} + j^p \sum_{K>j} a_K^p K^{p-2} \quad ,$$

$$= \sum_{K=1}^{j} (g_K^p - g_{K+1}^p)K^p + j^p \sum_{K>j} (g_K^p - g_{K+1}^p) \quad ,$$

$$= \sum_{K=1}^{j} (K^p - (K-1)^p)\, g_K^p \quad ,$$

$$\le \sum_{K=1}^{j} (K^p - (K-1)^p)\, b_K^p \quad ,$$

$$= p \int_0^j P(M > t)t^{p-1}\, dt$$

$$= 1 + \int_1^j p\, P(M > t)t^{p-1}\, dt = E[M_\wedge j]^p \quad .$$

Ceci achève la démonstration du Lemme 3.4. .

La suite (a_n) étant ainsi définie, montrons que

$$X(\omega,t) = c \sum_{n\ge 1} \frac{a_n}{n} \sin 2\pi n(\omega - t) \quad ,$$

avec $\omega,t \in [0,1]$ est une Lp-fonction aléatoire sur $[0,1]$. Les (a_n) étant positifs, de l'inégalité triangulaire nous avons :

$$\int_0^1 E|X(t)|^p dt \le c^p[\sum_{n\ge 1} \frac{a_n}{n}]^p ,$$

$$\le c^p(\sum_{n\ge 1} a_n^p n^{p-2})(\sum_{n\ge 1} \frac{1}{n^2})^{p-1} ,$$

$$= c^p\ b_1^p(\frac{\pi^2}{6})^{p-1} < \infty .$$

Nous avons utilisé l'inégalité de Hölder pour les séries. Il est très facile de voir, avec la même inégalité, que la série qui définit X est uniformément convergente et de ce fait, toutes les trajectoires de X sont continues. Pour la dérivabilité nous utilisons :

LEMME 3.5. (Zygmund [9] p.129). Soit (a_n) une suite décroissante de nombres réels positifs tels que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$; alors la série

$$g(x) = \sum_{n\ge 1} a_n \cos 2\pi nx , \quad x \in [0,1] ,$$

converge uniformément sur tout compact de $]0,1[$ de plus pour $p > 1$, $g \in L_p([0,1],\lambda)$ si et seulement si $\sum_{n\ge 1} a_n^p n^{p-2} < \infty$.

Du lemme 3.4. ii) nous savons que la suite (a_n) qui définit X, est décroissante, à termes positifs et comme $p \ge 2$, $\sum_{n\ge 1} a_n^p n^{p-2} = g_1^p = 1$ entraine $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

D'où pour tout $\omega \in]0,1[$, pour tout $t \in [0,1]\setminus\{\omega\}$, $X'(\omega,t)$ existe. Par contre la condition iv) du Lemme 3.4., implique la non-dérivabilité de X pour $t = \omega$. La démonstration du théorème 3.1. sera terminée dès que nous aurons prouvé le fait que X satisfait à la condition (*) . Nous avons :

LEMME 3.6. (Zygmund [9] p. 109). Soit $(C_n, n \in \mathbb{Z})$ une suite de nombres complexes tels que pour $p \ge 2$, on ait :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |C_n|^p (1 + |n|)^{p-2} < \infty .$$

Il existe alors une constante C_3, qui dépend de p, et une fonction $g \in (L_p([0,1],\lambda)$, telles que :

$$\text{i)}\quad c_n = \int_0^1 g(x)\, e^{-2i\pi nx}\, dx \quad ,$$

$$\text{ii)}\quad \left[\int_0^1 |g(x)|^p\, dx\right]^{\frac{1}{p}} \le C_3 \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^p (1+|n|)^{p-2}\right)^{\frac{1}{p}} \quad .$$

Pour tout nombre $n \in \mathbb{Z}$, nous posons

$$c_n = \int_0^1 [X(\omega,t+2h) - 2X(\omega,t+h) + X(\omega,t)]e^{-2i\pi n\omega}\, d\omega \quad ;$$

un calcul élémentaire d'intégrale nous donne alors :

$$c_n = \begin{cases} \dfrac{Cq_K}{2iK}\left(e^{2i\pi K(t+2h)} - 2e^{2i\pi K(t+h)} + e^{2i\pi K}\right) & \text{si } n = K\,, \\ -\dfrac{Cq_K}{2iK}\left(e^{-2i\pi K(t+2h)} - 2e^{-2i\pi K(t+h)} + e^{2i\pi K}\right) & \text{si } n = -K\,, \\ 0 \quad \text{sinon} \; . \end{cases}$$

C'est à dire si $|n| = K$, $n \in \mathbb{Z}$, nous avons :

$$|c_n| = \frac{2Cq_K}{K} \sin^2 K\pi h \; .$$

La condition ii) du Lemme 3.6. implique alors

$$\begin{aligned} E|X(t+2h)-2X(t+h)+X(t)|^p &\le 2\, C_3^p \sum_{n\ge 1} |c_n|^p (1+n)^{p-2} \quad , \\ &\le 2^{2p-1} C_3^p C^p \sum_{n\ge 1} \frac{a_n^p \sin^{2p} n\pi h}{n^2} \quad , \\ &\le 2^{2p-1} C_3^p\, C^p \sum_{n\ge 1} \frac{a_n^p}{n^2} [\min(1,n\pi h)]^{2p} \quad , \\ &\le 2^{2p-1} C_3^p\, C^p \pi^{2p} \sum_{n\ge 1} \frac{a_n^p}{n^2} (\min(1,(nh)^{2p})) \quad . \end{aligned}$$

Pour tout $h > 0$ donné, il existe un nombre entier j tel que $j^{-1} < h \leq (j-1)^{-1}$. Comme $n > j$ entraîne $nh \geq j \geq 1$, nous avons :

$$E|X(t+2h)-2X(t+h)+X(t)|^p \leq$$

$$\leq (4\pi^2 CC_3)^p \left[\sum_{1\leq n\leq j} a_n^p n^{2p-2} h^{2p} + \sum_{n>j} \frac{a_n^p}{n^2} \right] ,$$

Mais $n > j$ implique $n^p j^p \geq j^{2p} \geq h^{-2p}$, d'où nous déduisons

$$E|X(t+2h)-2X(t+h)+X(t)|^p$$

$$\leq (4\pi^2 CC_3)^p h^{2p}\left[\sum_{n\leq j} a_n^p n^{2p-2} + j^p \sum_{n>j} a_n^p n^{p-2}\right] ,$$

$$\leq (4\pi^2 CC_3)^p h^{2p} E(M_\wedge j)^p ,$$

$$\leq (4\pi^2 CC_1C_3)^p h^{2p}(j^2 f(j^{-1}))^p ;$$

où nous avons appliqué successivement le lemme 3.4.v) et le lemme 3.2.i) . Comme f est croissante , $j \geq 2$, en posant $C = (8M^2C_1C_3)^{-1}$, nous déduisons

$$E|X(s) - 2X(\tfrac{s+t}{2}) + X(t)|^p \leq f^p(|s-t|) ;$$

le théorème est démontré.

Ce résultat semble indiquer que la condition du théorème 1.1. est la meilleure possible pour les espaces L_p . Resterait à montrer la réciproque dans le cas où les trajectoires de la dérivée sont lipschitziennes.

-:-:-:-:-:-:-:-:-

REFERENCES

[1] BOAS R.P. Jr. : "Inequalities for monotonic series". J. Math. Anal. and Appl. 1(1960), p. 121-126.

[2] FERNIQUE X. : "Régularité des fonctions aléatoires gaussiennes." Ecole d'Eté de St. Flour (1974). Lectures Notes in Math. (Springer), 480 (1976), p. 1-96 .

[3] HAHN M.G. and KLASS M.J. : "Sample continuity of square integrable processes". Ann. of Prob. 5(1977) n° 3, p. 361-370.

[4] KONO N. : "Best possibility of an integral test for sample Continuity of Lp-processes (p ≥ 2)". Proc. Jap. Acad. 54(1978), ser. A, p. 197-201 .

[5] KONO N. : "A remark on Garsia's integral test about sample continuity of Lp-processes". J. Math. Kyoto. Univ. 20-1 (1979), p. 1-9 .

[6] KRASNOSELSKY M.A. and RUTITSKY Y.B. : Convex functions and Orlicz spaces". Dehli. Publ. Hindustan Corp. (1962) .

[7] NANOPOULOS C. et NOBELIS Ph. : "Etude de la régularité des fonctions aléatoires et de leurs propriétés limites". Sémin. de Prob. XII, 1976/77. Lectures Notes in Math. (Springer), 649 (1978), p. 567-690.

[8] NOBELIS Ph. : "Fonctions aléatoires Lipschitziennes". Séminaire de Prob. XV, 1979/80. Lectures Notes in Math. (Springer), 850 (1981), p. 38-43.

[9] ZYGMUND A. : "Trigonometric series". Cambridge Univ. Press, vol II (1959) .

Université Strasbourg I
Département de Mathématique
7 rue René Descartes
67084 STRASBOURG CEDEX

Université Nancy II
I.U.T. (A)
2 bis, Bd Charlemagne
54000 NANCY