Séminaire de probabilités (Strasbourg)

Robert C. Dalang

Sur l'arrêt optimal de processus à temps multidimensionnel continu

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 18 (1984), p. 379-390
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1984__18__379_0>

SUR L'ARRET OPTIMAL

DE PROCESSUS A TEMPS MULTIDIMENSIONNEL CONTINU

par Robert C. DALANG

1. Introduction

Le problème d'arrêt optimal pour des processus indexés par $\mathbb{R}_+$ a été étudié par de nombreux auteurs (voir [EK] pour une bibliographie exhaustive). Les hypothèses suffisantes "presque nécessaires" sur le processus de gain qui assurent l'existence d'un temps d'arrêt optimal sont l'appartenance à la classe (D) et la semi-continuité supérieure des trajectoires, ou ce qui est équivalent, la semi-continuité supérieure en espérance sur les suites monotones de temps d'arrêt. Dans ces conditions, le temps d'entrée dans l'ensemble où le processus de gain coïncide avec son enveloppe de Snell est un temps d'arrêt optimal.

Pour les processus indexés par deux ou plusieurs paramètres diverses notions de temps d'entrée ont été proposées, mais aucune ne semble d'utilité pour le problème d'arrêt optimal. Néanmoins, ce problème a déjà été étudié par plusieurs auteurs, notamment par U. Krengel et L. Sucheston [K-S], G. Mazziotto et J. Szpirglas [M-S], A. Millet [Mi], et G. Mazziotto [Ma]. Dans le cas où l'ensemble d'indices est $\mathbb{R}_+^2$, A. Millet [Mi] a introduit la notion de "tactique aléatoire randomisée" et, par des méthodes de représentation, a montré l'existence d'un temps d'arrêt optimal sous certaines hypothèses de régularité. Dans un article récent [Ma], G. Mazziotto a réduit le problème de la recherche d'un temps d'arrêt optimal sur $\mathbb{R}_+^2$ au même problème sur une ligne d'arrêt donnée; les conditions de régularité qu'il propose portent sur l'enveloppe de Snell du processus de gain.

Ce travail s'appuie sur un article de N. Ghoussoub [G], où est établie une représentation intégrale des v.a. floues sur un espace compact, généralisant les résultats bien connus de Baxter et Chacon [B-C]. L'existence de temps d'arrêt optimaux pour les processus continus est ramenée à l'étude d'une fonction affine sur l'ensemble des temps d'arrêt flous. L'objectif principal de notre travail est de montrer que, pour les processus sur $\overline{\mathbb{R}_+^n}$ séparables, bornés et à trajectoires semi-continues supérieurement (s.c.s), cette fonction est s.c.s, ce qui suffit pour résoudre le problème d'arrêt optimal. Lorsque l'espace probabilisé est séparable, le théorème de Choquet permet d'étendre ce résultat aux processus s.c.s séparables de la classe (D). On remarquera que l'hypothèse d'indépendance conditionnelle (F4) de [C-W] n'est pas utilisée.

2. Notations, définitions et rappels

L'espace $\mathbb{R}_+^n$ sera muni de la relation d'ordre partielle $\leqslant$ suivante : $s=(s_1,\dots,s_n) \leqslant t=(t_1,\dots,t_n)$ si et seulement si $s_i \leqslant t_i$, $1\leqslant i\leqslant n$. Nous écrirons en outre $s < t$ si $s \leqslant t$ et $s \neq t$, et $s \ll t$ si $s_i < t_i$, $1\leqslant i\leqslant n$. Ces relations engendrent différents types d'intervalles ouverts, fermés, semi-ouverts, ..., par exemple $[s,t[= \{u\in \mathbb{R}_+^n \,/\, s \leqslant u \ll t\}$.

Nous adjoignons à $\mathbb{R}_+^n$ un élément noté ∞, strictement supérieur à tous les autres et posons $\overline{\mathbb{R}_+^n} = \mathbb{R}_+^n \cup \{\infty\}$. $\overline{\mathbb{R}_+^n}$ est muni de sa topologie usuelle d'espace métrique compact et de la tribu borélienne $\underline{\underline{B}}^n$ correspondante. Pour alléger les notations nous poserons $K_n = \overline{\mathbb{R}_+^n}$.

Soit $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ un espace probabilisé complet, muni d'une filtration $(\underline{\underline{F}}_t)_{t\in K_n}$ complète et continue à droite. Une variable aléatoire T définie sur $(\Omega,\underline{\underline{F}})$ à valeurs dans K_n est un temps d'arrêt relativement à la filtration $(\underline{\underline{F}}_t)_{t\in K_n}$ si $\{T \leqslant t\} \in \underline{\underline{F}}_t$, $\forall\, t\in \mathbb{R}_+^n$. L'ensemble des temps d'arrêt sera noté $\underline{\underline{T}}$. Le problème d'arrêt optimal pour un processus X est le suivant: trouver un temps d'arrêt T_0 (dit "optimal pour X") tel que $E(X_{T_0}) = \sup\limits_{T\in\underline{\underline{T}}} E(X_T)$.

Nous désignerons par C l'ensemble des processus continus $X=(X_t)_{t\in K_n}$ tels que $E(\sup|X_t|)<\infty$, (les processus indistinguables sont identifiés). C muni de la norme $\|X\|=E(\sup|X_t|)$ est un espace de Banach: c'est en fait l'espace $L^1(\Omega,C(K_n))$ des fonctions sur Ω à valeurs dans $C(K_n)$ (ensemble des fonctions continues de K_n dans $\mathbb{R}$), intégrables au sens de Bochner.

Considérons C', le dual topologique de C, muni de la topologie faible $\sigma(C',C)$, c'est-à-dire de la topologie la moins fine par rapport à laquelle les fonctions $f\longmapsto f(X)$ de C' dans $\mathbb{R}$ sont continues pour tout $X\in C$. Rappelons que C' muni de cette topologie est un espace vectoriel topologique de Hausdorff localement convexe.

Un processus $A=(A_t)_{t\in K_n}$ sera dit croissant si pour tout $w\in\Omega$,

$t \longmapsto A_t(w)$ est la fonction de répartition associée à une mesure ν_w positive, finie et σ-additive sur $\underline{\underline{B}}^n$: $\forall\ t\in K_n$, $A_t(w) = \nu_w([0,t])$. A noter qu'un tel processus est continu à droite et admet des limites dans les autres hyperquadrants. L'ensemble des processus croissants tels que $A_\infty \equiv 1$ sera noté $\underline{\underline{A}}$.

Suivant P.A. Meyer [Me], nous appellerons v.a. floue une mesure positive, σ-additive sur $K_n\times\Omega$, dont la projection sur Ω est P. L'ensemble des v.a. floues sera noté $\underline{\underline{U}}$. Pour tout $\mu\in\underline{\underline{U}}$ et toute v.a. μ-intégrable X sur $K_n\times\Omega$, nous poserons

$$\langle X,\mu\rangle = \int_{K_n\times\Omega} X\, d\mu.$$

D'après le théorème de désintégration des mesures, il y a bijection affine entre v.a. floues et processus croissants ([Me], [G] lemme I.1). Si $\mu\in\underline{\underline{U}}$ correspond à $A\in\underline{\underline{A}}$, alors pour toute v.a. μ-intégrable X sur $K_n\times\Omega$:

$$\langle X,\mu\rangle = E\Big(\int_{K_n} X_t(.)\ d_tA_t(.)\Big)\ .$$

A chaque élément $\mu\in\underline{\underline{U}}$ correspond un élément de C' par la formule $X \longmapsto \langle X,\mu\rangle$, $X\in C$. Une réciproque partielle est donnée par le résultat bien connu (cf. [D-M_2] p.217, ou [D-U] p.98): pour tout $f\in C'$ tel que $f \geqslant 0$ ($f(X)\geqslant 0$, pour tout processus positif $X\in C$), $\|f\|\leqslant 1$ et $f(1)=1$, il existe un élément unique $\mu\in\underline{\underline{U}}$ tel que

$$f(X) = \langle X,\mu\rangle = \int_{K_n\times\Omega} X\ d\mu\ ,\quad \forall\ X\in C.$$

$\underline{\underline{U}}$ peut donc être considéré comme un sous-ensemble de C', que l'on munit de la topologie induite, c'est-à-dire de la topologie la moins fine par rapport à laquelle les fonctions $\mu \longmapsto \langle X,\mu\rangle$ sont continues.

Soit $\underline{\underline{U}}_a$ le sous-ensemble de v.a. floues auxquelles sont associées les processus croissants adaptés à la filtration $(\underline{\underline{F}}_t)_{t\in K_n}$. D'après un résultat dû à Baxter et Chacon, $\underline{\underline{U}}$ et $\underline{\underline{U}}_a$ sont faiblement compacts ([B-C], [Me]). La démonstration de ce résultat fait appel à la continuité à droite de la filtration $(\underline{\underline{F}}_t)_{t\in K_n}$. Cette propriété de la filtration n'interviendra plus par la suite.

Comme $\underline{\underline{U}}$ et $\underline{\underline{U}}_a$ sont convexes, ils possèdent des points extrémaux: l'identification de ces points extrémaux a été faite par N. Ghoussoub ([G], prop.I.2) en appliquant un résultat bien connu de M. Yor ([Y], prop.1.6): ce sont les v.a. floues μ portées par le graphe d'une fonction mesurable $g:\Omega \longrightarrow K_n$. Le processus croissant A associé à un tel μ est alors de la forme $A_t(w)=I_{[0,t]}(g(w))=I_{\{g\leqslant t\}}(w)=I_{[g(w),\infty]}(t)$ et donc

$$\langle X,\mu\rangle = E(\int_{K_n} X_t(.)\, d_tA_t(.)) = E(X_g).$$

Si de plus $\mu\in\underline{\underline{U}}_a$, il est clair que g est un temps d'arrêt, et il y a correspondance biunivoque entre temps d'arrêt et points extrémaux de $\underline{\underline{U}}_a$.

3. Existence de temps d'arrêt optimaux

Dans le cas d'un processus continu, l'existence d'un temps d'arrêt optimal se démontre exactement comme l'a fait N. Ghoussoub dans [G], prop. 2.3. Ce problème a aussi été résolu par d'autres méthodes dans [Mi] et [Ma]. Afin de rendre notre démarche plus transparente, nous rappelons ici brièvement le résultat et la preuve.

3.1. Théorème : Soit $Y=(Y_t)_{t\in \overline{\mathbb{R}^n_+}}$ un processus continu (adapté ou non) tel que $E(\sup|Y_t|)<\infty$. Alors il existe un temps d'arrêt optimal pour Y.

Démonstration : Considérons la fonction affine φ_Y: $\underline{\underline{U}}_a\to \mathbb{R}$ définie par $\varphi_Y(\mu)=\langle Y,\mu\rangle$. Par définition de la topologie faible, φ_Y est continue. Elle atteint donc son maximum sur $\underline{\underline{U}}_a$ en un point extrémal μ_0 de $\underline{\underline{U}}_a$. Le temps d'arrêt T_0 associé à μ_0 est optimal, car

$$E(Y_{T_0}) = \langle Y,\mu_0\rangle = \sup_{\mu\in\underline{\underline{U}}_a} \langle Y,\mu\rangle \geqslant \sup_{T\in\underline{\underline{T}}} E(Y_T) ,$$

d'où le résultat.

Il est bien connu qu'une fonction affine s.c.s sur un compact convexe atteint son maximum en un point extrémal ([B_3] p.II.58, prop.1). Dans la démonstration précédente, la continuité de φ_Y n'est donc pas indispensable: φ_Y s.c.s suffit! Dans la suite, l'objectif de notre travail sera d'établir des conditions qui assurent la semi-continuité supérieure de φ_Y.

3.2. Proposition : Soit $Y=(Y_t)_{t\in \overline{\mathbb{R}^n_+}}$ un processus mesurable. Supposons qu'il existe une suite décroissante $(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$ de processus mesurables tels que:

a. L'application $\mu\mapsto \langle X^k,\mu\rangle$ est faiblement s.c.s, pour tout $k\in\mathbb{N}$.
b. $Y_t(w)= \lim\downarrow_{k\to\infty} X^k_t(w)$ hors d'un ensemble évanescent.

Alors l'application φ_Y: $\underline{\underline{U}}_a\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi_Y(\mu)=\langle Y,\mu\rangle$ est faiblement s.c.s et il existe un temps d'arrêt optimal pour Y.

Démonstration : Définissons $\varphi_k : \underline{\underline{U}}_a \longrightarrow \mathbb{R}$ par $\varphi_k(\mu)=\langle X^k,\mu\rangle$. φ_k est faiblement s.c.s et $\varphi_k \geq \varphi_{k+1}$. De plus

$$\varphi_Y(\mu)= \int_{K_n\times\Omega} Y \, d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_{K_n\times\Omega} X^k \, d\mu = \lim_{k\to\infty} \varphi_k(\mu).$$

φ_Y est donc faiblement s.c.s et affine, donc il existe un temps d'arrêt optimal pour Y.

Si on dispose d'une classe de processus pour lesquels la condition a. de la proposition 3.2 est vérifiée, cette classe peut être étendue par passage à la limite monotone décroissante. Ceci permet d'établir l'existence de temps d'arrêt optimaux pour les processus qui sont limite d'une suite décroissante de processus continus.

3.3. Exemples

1. $Y=f(X^1,\dots,X^k)$, où f est une fonction s.c.s. de $\mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ et les X^i sont des processus continus.

2. $$Y= \sum_{i=1}^{m} I_{F_i}(w)\, g_i(t),$$

où $F_1,\dots,F_m \in \underline{\underline{F}}$ et les $g_i : K_n \longrightarrow \mathbb{R}$ sont s.c.s. et bornés.

3. $$Y_t(w)= \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \, g_i(t) \, I_{\{S^i \leq t\}}(w),$$

où $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ vérifie $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i < \infty$, les $g_i : K_n \longrightarrow \mathbb{R}$ sont s.c.s et bornés, et les S^i sont des v.a. quelconques à valeurs dans K_n.

Rappelons qu'une fonction s.c.s. bornée sur un espace topologique est l'enveloppe inférieure des fonctions continues qui la majorent (si l'espace en question est à base dénombrable, toute fonction s.c.s. est même limite d'une suite décroissante de fonctions continues). Pour les processus s.c.s. on a le résultat analogue suivant:

3.4. Théorème : Soit $Y=(Y_t)_{t\in\overline{\mathbb{R}}^n_+}$ un processus mesurable borné à trajectoires s.c.s. Alors Y est l'enveloppe inférieure des processus continus bornés qui le majorent.

Démonstration : Elle est analogue à celle de la proposition 7 p.IX.10 de [B_2]

pour les fonctions s.c.s.

Supposons $|Y_t(w)|<1$, $\forall\, t\epsilon K_n$, $\forall w\epsilon\Omega$. Il est suffisant de montrer que pour tout $t_0\epsilon K_n$ et tout $0<\varepsilon<1$, il existe un processus continu et borné $(X_t^{\varepsilon,t_0})_{t\epsilon K_n}$ tel que

1. $X_t^{\varepsilon,t_0}(w)\geqslant Y_t(w)$, $\forall\, t\epsilon K_n$, $\forall w\epsilon\Omega$.
2. $X_{t_0}^{\varepsilon,t_0}(w)\leqslant Y_{t_0}(w)+\varepsilon$, $\forall\, w\epsilon\Omega$.

Soit $d(.,.)$ la métrique sur K_n induite par la projection stéréographique, et $h: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $h(x)=\min(1,|x|)$, $x\epsilon\mathbb{R}$.

Soit Z^{ε,t_0} la v.a. définie par $Z^{\varepsilon,t_0}(w)=(1-\varepsilon/2)Y_{t_0}(w)+\varepsilon/2$. Nous avons $Z^{\varepsilon,t_0}(w)<1$ et $Z^{\varepsilon,t_0}(w)-Y_{t_0}(w)=(1-Y_{t_0}(w))\varepsilon/2$. Cette dernière expression est à la fois >0 et $<\varepsilon$.

Comme les trajectoires de Y sont s.c.s., il existe $\delta^{\varepsilon,t_0}(w)>0$ tel que $d(t,t_0)<\delta^{\varepsilon,t_0}(w)\Longrightarrow Y_t(w)<Z^{\varepsilon,t_0}(w)$. Si nous montrons que l'application $w\mapsto\delta^{\varepsilon,t_0}(w)$ peut être choisie $\underline{\underline{F}}$-mesurable, ce qui sera fait plus bas, en posant

$$X_t^{\varepsilon,t_0}(w)=Z^{\varepsilon,t_0}(w)+(1-Z^{\varepsilon,t_0}(w))\ h\Big(\frac{d(t,t_0)}{\delta^{\varepsilon,t_0}(w)}\Big),$$

nous obtenons un processus X^{ε,t_0} continu borné par 1, qui vérifie les conditions 1 et 2, et la conclusion s'ensuit.

En ce qui concerne l'application $w\mapsto\delta^{\varepsilon,t_0}(w)$, elle sera $\underline{\underline{F}}$-mesurable si nous posons $\delta^{\varepsilon,t_0}(w)=\inf\{d(t,t_0)\ /\ Y_t(w)\geqslant Z^{\varepsilon,t_0}(w)\}$. Soit en effet, $B=\{(t,w)\ /\ Y_t(w)\geqslant Z^{\varepsilon,t_0}(w)\}$; B est $\underline{\underline{B}}^n x\underline{\underline{F}}$-mesurable. Il est en outre facile de voir que $A=\{(s,w)\ /\ s=d(t,t_0),\ (t,w)\epsilon B\}$ est $\underline{\underline{B}}^1 x\underline{\underline{F}}$-analytique. Le théorème p.102 de [D-M1] affirme alors que l'application $w\to\delta^{\varepsilon,t_0}(w)$ est mesurable par rapport à la tribu complétée universelle de $\underline{\underline{F}}$, et comme $\underline{\underline{F}}$ est complète, elle est $\underline{\underline{F}}$-mesurable.

Vu ce résultat, on peut se demander s'il est possible dans certains cas d'extraire un sous-ensemble dénombrable de processus continus dont l'enveloppe inférieure est Y. Il est bien connu que cette extraction peut être faite trajectoire par trajectoire. Mais en procédant de cette manière il se pose un problème de mesurabilité en w. C'est pour cette raison que nous avons besoin d'une hypothèse de séparabilité dans le théorème suivant.

<u>3.5. Théorème</u> : Soit $Y=(Y_t)_{t\in \overline{\mathbb{R}_+^n}}$ un processus mesurable borné (adapté ou non). Supposons qu'il existe un sous-ensemble dénombrable dense H dans $\overline{\mathbb{R}_+^n}$ tel que

$$Y_t(w)=\limsup_{\substack{s\to t\\ s\in H}} Y_s(w),\ \forall\, t\in \overline{\mathbb{R}_+^n},\ \forall w\in\Omega.$$

Alors l'application $\mu\mapsto\langle Y,\mu\rangle$ est faiblement s.c.s. et il existe un temps d'arrêt optimal pour Y.

<u>Démonstration</u> : Nous employons ici quelques notions bien connues de topologie (voir [N] par exemple).

Par la projection stéréographique, K_n est homéomorphe à une partie de la sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$; cette sphère est elle-même homéomorphe au n-simplexe standard S^n de $\mathbb{R}^n$. Dans la suite de la démonstration, K_n sera remplacé par S^n, et nous supposerons par homéomorphisme que tous les processus considérés sont indexés par S^n.

Soit $m\in\mathbb{N}$ fixé. Par un nombre fini de subdivisions barycentriques successives nous obtenons une triangulation de S^n de diamètre inférieur à 1/m.

Nous appellerons "intérieur" d'un k-simplexe son intérieur en tant que sous-ensemble de l'espace de dimension k qu'il engendre.

Soit Δ^k l'intérieur d'un k-simplexe qui est une face d'un des n-simplexes de la triangulation de S^n. Nous définissons un processus $X^m=(X_t^m)_{t\in S^n}$ par

$$X_t^m(w)=\sup_{s\in\Delta^k\cup L_k} Y_s(w),\ \forall\, t\in\Delta^k,\ \forall w\in\Omega,$$

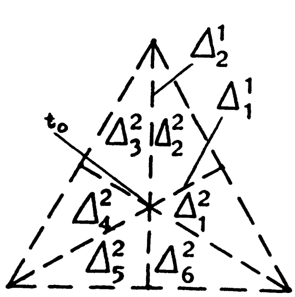
où L_k est l'union des intérieurs des p-simplexes de la triangulation dont Δ^k est une des faces, $k<p\leq n$.

Pour n=2, la situation est la suivante:

$$X_t^m(w)=\sup_{s\in\Delta_1^2} Y_s(w),\ \forall\, t\in\Delta_1^2.$$

$$X_t^m(w)=\sup_{s\in\Delta_1^1\cup\Delta_1^2\cup\Delta_2^2} Y_s(w),\ \forall\, t\in\Delta_1^1;$$

$$X_{t_o}^m(w)=\max\,(Y_{t_o}(w),\ \sup_{s\in L_o} Y_s(w)),$$



où L_0 est l'union des intérieurs des 12 faces de 1- et 2-simplexes de la triangulation dont $\{t_0\}$ est une des faces.

L'hypothèse faite sur Y dans l'énoncé du théorème garantit la mesurabilité de X_t^m pour tout t. Par construction, X^m est s.c.s. et $X^m \geq Y$. En outre, Y étant s.c.s. et la triangulation devenant de plus en plus fine, nous voyons que $\lim_{m\to\infty}\searrow X^m = Y$. Pour conclure, il suffit donc de vérifier l'hypothèse a. de la proposition 3.2 pour chaque processus X^m, $m \in \mathbb{N}$.

Soit à nouveau $m \in \mathbb{N}$ fixé. Nous allons exhiber une nouvelle suite $(\tilde{X}^j)_{j\in\mathbb{N}}$ de processus s.c.s. qui décroît vers X^m, dont chaque élément est limite d'une suite décroissante de processus continus. La conclusion du théorème résultera de la proposition 3.2.

Rangeons les faces des n-simplexes de la triangulation de S^n en une suite finie. Appelons $M_1,\dots,M_{k(m)}$ leurs intérieurs et $Z_i(w)$ la valeur de $X_t^m(w)$ sur M_i. Nous pouvons alors écrire:

$$X_t^m(w) = \sum_{i=1}^{k(m)} Z_i(w)\ I_{M_i}(t).$$

Comme Y est borné, les Z_i le sont uniformément. Il est donc possible d'écrire chaque Z_i comme limite d'une suite décroissante de v.a. étagées $U^{i,j}$ de la forme

$$\sum_{p\in L_j} (p+1)2^{-j}\ I_{\{p2^{-j} \leq Z_i < (p+1)2^{-j}\}},$$

où L_j est fini et ne dépend que de j. Posons alors

$$\tilde{X}_t^j(w) = \sum_{i=1}^{k(m)} U^{i,j}(w)\ I_{M_i}(t).$$

Nous avons bien $\lim_{j\to\infty}\searrow \tilde{X}^j = X^m$. D'autre part, en se rappelant que l'application $t \longmapsto X_t^m(w)$ est constante sur les M_i, il est facile de vérifier que les trajectoires de $\tilde{X}^j$ sont encore s.c.s.

Fixons maintenant $j \in \mathbb{N}$ (m étant toujours fixé) et posons $G_{i,p} = \{p2^{-j} \leq Z_i < (p+1)2^{-j}\}$, où $1 \leq i \leq k(m)$ et $p \in L_j$. Nous avons

$$X_t^j(w) = \sum_{i=1}^{k(m)} \sum_{p\in L_j} (p+1)2^{-j}\ I_{G_{i,p}}(w)\ I_{M_i}(t).$$

Ordonnons les $G_{i,p}$ en une suite finie $G_1,\dots,G_{k'}$ et considérons la famille finie D formée des éléments de F de la forme $G_1' \cap \dots \cap G_{k'}'$, où G_ℓ' est soit

G_i soit G_i^c. Pour $F \in D$ posons $\varepsilon_{F,i,p}=1$ si $F \subset G_{i,p}$ et 0 sinon. Alors

$$\tilde{X}_t^j(w)=\sum_{i=1}^{k(m)}\sum_{p\in L_j}(p+1)2^{-j}\sum_{F\in D}\varepsilon_{F,i,p}\, I_F(w)\; I_{M_i}(t)$$

$$=\sum_{F\in D} I_F(w)\sum_{i=1}^{k(m)} I_{M_i}(t)\sum_{p\in L_j}(p+1)2^{-j}\,\varepsilon_{F,i,p}\,.$$

La dernière parenthèse est une fonction de t uniquement:

$$\tilde{X}_t^j(w)=\sum_{F\in D} I_F(w)\, f_F(t).$$

Comme les trajectoires de $\tilde{X}^j$ sont s.c.s., $f_F : K_n \longrightarrow \mathbb{R}$ est s.c.s. pour tout $F \in D$. D'après la proposition 3.2 (ex. 2 de 3.3) $\tilde{X}^j$ est limite d'une suite décroissante de processus continus, ce qu'il fallait démontrer.

<u>3.6. Exemples</u> : Voici quelques types de processus sur $\overline{\mathbb{R}_+^n}$ qui vérifient la condition de l'énoncé du théorème 3.5:

- Y est borné, continu à droite et s.c.s. dans la réunion des autres hyperquadrants.

- Y est borné, continu dans l'un des hyperquadrants et s.c.s. dans la réunion des autres hyperquadrants.

- Y est borné, s.c.s. et séparable au sens de [D-M1], déf.IV.25.

- Y est le prolongement s.c.s. à $\overline{\mathbb{R}_+^n}$ ([B1] chap.I.V.31) d'un processus Y s.c.s. borné indexé par $\mathbb{Q}_+^n$.

4. Extension aux processus s.c.s. séparables de la classe (D)

Lorsque la tribu $\underline{F}$ est séparable, $L^1(\Omega, C(K_n))$ est séparable et la topologie faible sur $\underline{U}_a$ est par conséquent métrisable ([D-S] p.426, Th.1). Dans ce cas le théorème de représentation intégrale de Choquet ([P] p.19 et 100) permet de représenter les temps d'arrêt flous par des temps d'arrêt, ce que nous utiliserons dans la proposition suivante.

<u>4.1. Proposition</u> : Supposons que la tribu $\underline{F}$ de l'espace probabilisé $(\Omega,\underline{F},P)$ soit séparable. Soit $X=(X_t)_{t\in\overline{\mathbb{R}_+^n}}$ un processus mesurable de la classe (D). Supposons

qu'il existe une suite $(Y^m)_{m\in\mathbb{N}}$ de processus mesurables telle que

1. $\mu \longmapsto \langle Y^m,\mu\rangle$ est faiblement s.c.s, pour tout $m\in\mathbb{N}$;
2. $\lim\limits_{m\to\infty} \sup\limits_{T\in\underline{\underline{T}}} |E(X_T) - E(Y^m_T)| = 0.$

Alors il existe un temps d'arrêt optimal pour X.

<u>Démonstration</u> : Elle s'inspire de celle du théorème 3.3 de [Mi]. Soit $\varphi_m : \underline{\underline{U}}_a \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi_m(\mu)=\langle Y^m,\mu\rangle$. Par le théorème de Choquet, pour tout $\mu\in\underline{\underline{U}}_a$ il existe une mesure de probabilité (non-unique en général) ν_μ sur $\underline{\underline{U}}_a$ portée par $\underline{\underline{T}}$ telle que

$$\varphi_m(\mu)=\int_{\underline{\underline{T}}} \varphi_m(T)\, d\nu_\mu(T) = \int_{\underline{\underline{T}}} E(Y^m_T)\, d\nu_\mu(T) .$$

Comme $E(Y^m_T)$ converge uniformément en T vers $E(X_T)$, l'application $T\longmapsto E(X_T)$ est s.c.s. pour la topologie sur $\underline{\underline{T}}$ induite par la topologie faible et nous avons

$$\lim_{m\to\infty} \varphi_m(\mu) = \lim_{m\to\infty} \int_{\underline{\underline{T}}} E(Y^m_T)\, d\nu_\mu(T) = \int_{\underline{\underline{T}}} E(X_T)\, d\nu_\mu(T) .$$

Le membre de droite est donc indépendant de la mesure ν_μ choisie pour représenter μ. Posons, pour $\mu\in\underline{\underline{U}}_a$,

$$\varphi(\mu)=\int_{\underline{\underline{T}}} E(X_T)\, d\nu_\mu(T) .$$

Notons que pour $T\in\underline{\underline{T}}$, $\varphi(T)=E(X_T)$ ($\nu_T=\varepsilon_T$ est ici la seule possibilité!). Nous avons

$$|\varphi(\mu)-\varphi_m(\mu)| \leqslant \int_{\underline{\underline{T}}} |E(X_T)-E(Y^m_T)|\, d\nu_\mu(T) \leqslant \sup_{T\in\underline{\underline{T}}} |E(X_T)-E(Y^m_T)| ,$$

pour tout $\mu\in\underline{\underline{U}}_a$ et donc $\lim\limits_{m\to\infty}\varphi_m=\varphi$ uniformément sur $\underline{\underline{U}}_a$. Il s'ensuit que φ est une fonction faiblement s.c.s. et affine. Elle prend donc son maximum sur $\underline{\underline{U}}_a$ en un temps d'arrêt T_0, qui est alors optimal pour X, d'où la conclusion.

<u>4.2. Corollaire</u> : Supposons que $\underline{\underline{F}}$ est séparable. Soit X un processus séparable s.c.s. de la classe (D). Alors il existe un temps d'arrêt optimal pour X.

<u>Démonstration</u> : Posons $Y^m = X\, I_{\{|X|\leqslant m\}} + m\, I_{\{|X|>m\}}$: Y^m est un processus mesurable borné s.c.s. séparable, et par le théorème 3.5, la suite $(Y^m)_{m\in\mathbb{N}}$ vérifie l'hypothèse 1 de la proposition 4.1. Vérifions l'hypothèse 2:

$$|E(X_T)-E(Y_T^m)| \leqslant \int_{\Omega} |X_T-Y_T^m| \, dP = \int_{\{|X_T|>m\}} |X_T-Y_T^m| dP$$

$$\leqslant \int_{\{|X_T|>m\}} |X_T| \, dP + \int_{\{|X_T|>m\}} m \, dP \leqslant 2 \int_{\{|X_T|>m\}} |X_T| \, dP .$$

La dernière expression tend vers 0 uniformément en T, d'où le résultat.

REFERENCES

[B-C] S.R. Baxter - R.V. Chacon : Compactness of Stopping Times. Z.Wahr.verw.Geb. 40 p.169-181 (1977).

[B_1] N. Bourbaki : Elem. de Math. Top. Gen. Chap.1-4. Hermann (1971).

[B_2] N. Bourbaki : Elem. de Math. Top. gen. Chap.5-10. Hermann (1974).

[B_3] N. Bourbaki : Elem. de Math. Esp. Vect. Top. Chap.1-5. Hermann (1981).

[C-W] R. Cairoli - J.B. Walsh : Stochastic Integrals in the Plane. Acta Math. 134 p.111-183 (1975).

[D-M_1] C. Dellacherie - P.A. Meyer : Probabilités et potentiels Chap. I à IV. Hermann (1975).

[D-M_2] C. Dellacherie - P.A. Meyer : Probabilités et potentiels Chap. V à VIII. Hermann (1980).

[D-U] J. Diestel - J.J. Uhl : Vector Measures. American Math.Soc. (1977).

[D-S] N. Dunford - J.T. Schwarz : Linear Operators Part I General Theory. Interscience Publishers (1967).

[Ek] N. El Karoui : Les aspects probabilistes du contrôle stochastique. Ecole d'été de St. Flour 1979. Lect .N. in Math. 876 p.74-239, Springer Verlag, Berlin (1981).

[G] N. Ghoussoub : An integral representation of randomized probabilities and its applications. Lect. N. in Math 920 p.519-543, Springer Verlag (1982).

[K-S] U. Krengel - L. Sucheston : Stopping Rules and Tactics for Processes indexed by a Directed Set. J. Mult. Anal. 11 p.199-229 (1981).

[M-S] G. Mazziotto - J. Szpirglas : Arrêt optimal sur le plan. Z.Wahr.verw.Geb. 62 p.215-233 (1983).

[Ma] G. Mazziotto : Arrêt optimal de processus markoviens à deux indices (prépublication).

[Me] P.A. Meyer : Convergence faible et compacité des temps d'arrêt d'après Baxter et Chacon. Lect. N. in Math 649 p.411-423, Springer Verlag (1978).

[Mi] A. Millet : On Randomized Tactics and Optimal Stopping in the Plane (prépublication).

[N] G. Naber : Topological Methods in Euclidean Spaces. Cambridge University Press (1980).

[P] R.R. Phelps : Lectures on Choquet's Theorem. Van Nostrand (1966).

[Y] M. Yor : Sous-espaces denses dans L^1 ou H^1 et représentation de martingales. Lect. N. in Math 649 p.265-309, Springer Verlag (1978).

Robert C. DALANG
Département de Mathématiques
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne
1015 LAUSANNE
Suisse