MICHEL ÉMERY

Sur l'exponentielle d'une martingale de *BMO*

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 18 (1984), p. 500

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1984__18__500_0>

SUR L'EXPONENTIELLE

D'UNE MARTINGALE DE BMO

par M. Emery

Kazamaki a établi que si M est une martingale continue de BMO, son exponentielle $Z = \exp(M - \frac{1}{2}\langle M,M\rangle)$ est dans $\underline{\underline{H}}^1$ (et même dans $\underline{\underline{H}}^{1+\varepsilon}$ pour un $\varepsilon > 0$). Meyer m'ayant demandé si ce résultat s'étend au cas matriciel, j'en donne dans cette note un contre-exemple : Si M est une matrice carrée de martingales continues bornées, son exponentielle Z (la solution de $Z_t = I + \int_0^t Z_s \, dM_s$) n'est pas toujours une vraie martingale ; en général c'est seulement une martingale locale.

Dans l'exemple ci-dessous, la martingale locale Z n'est pas uniformément intégrable ; comme M est bornée, M ainsi que Z sont des martingales locales jusqu'à l'infini, et, par un changement de temps qui envoie $[0,\infty]$ sur $[0,1]$, M reste une martingale continue bornée, mais Z n'est plus uniformément intégrable sur $[0,1]$, donc n'est plus une vraie martingale.

Les processus M et Z seront pris à valeurs complexes ; un exemple matriciel s'en déduit directement par l'isomorphisme $\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \longleftrightarrow x + iy$.

Soient B un mouvement brownien réel issu de zéro, T le premier instant où $|B| = \frac{\pi}{2}$ et M la martingale arrêtée iB^T. Son exponentielle $Z = X + iY$ s'écrit explicitement $Z = \exp(iB^T + \frac{1}{2}\langle B,B\rangle^T)$, de sorte que $X_0 = 1$, $X_\infty = \mathrm{Re}(ie^{T/2}) = 0$, et la martingale locale X n'est donc pas uniformément intégrable.

Ce qui permet ce résultat n'est pas la non-commutativité, puisque toutes les martingales ici utilisées commutent (ce sont des complexes). Il est donc permis de se demander si, dans le cas non commutatif, on n'aurait pas une propriété encore plus forte, par exemple une martingale continue, bornée et dans $\underline{\underline{H}}^\infty$ dont l'exponentielle ne serait pas une vraie martingale. Peut-être chez les quaternions ?...